



真空中超强啁啾激光场下正电子产生的二维动量分布

任芝^{1,3}, 尚大凯^{1,3}, 李松涛^{1,3}, 杨世芳², 龚驰^{1,3*}

1. 华北电力大学数理系, 保定 071003;

2. 华北电力大学电力工程系, 保定 071003;

3. 华北电力大学河北省物理学与能源技术重点实验室, 保定 071003

*联系人, E-mail: chigong@ncepu.edu.cn

收稿日期: 2024-01-02; 接受日期: 2024-04-07; 网络出版日期: 2024-08-27

国家自然科学基金(编号: 12304337, 52207154)和中央高校基本科研经费(编号: 20226943)资助项目

摘要 运用数值求解量子电动力学方程, 研究了在不同形式超强啁啾激光场下真空中产生的正电子的二维动量谱分布, 及不同啁啾系数下的粒子数密度. 研究表明激光频率经过各种不同形式啁啾化后, 在真空当中产生的正电子的二维动量谱呈现出明显的干涉效应, 并且逐渐趋于各向同性, 即正圆分布, 这是啁啾场体现在二维动量谱上的显著特征. 此外, 还通过分析转变点结构来定性理解发生各向同性、干涉效应的原因. 对粒子数密度的研究表明, 粒子数密度对啁啾系数非常敏感, 随着啁啾参量的变化呈现出明显的周期性分布及增强, 这在未来的实验中可以提供一种新的方式来增加正电子的产量.

关键词 强啁啾场, 正负电子对, 二维动量分布

PACS: 34.50.Rk, 03.65.-w, 12.20.-m

1 引言

早在1916年, 物理学家爱因斯坦便提出了受激辐射的激光放大原理^[1], 之后在1960年, 梅曼^[2]成功发明了第一台激光器, 从此追求以及应用高峰值功率激光一直是激光技术研究领域的热点. 近年来, 由于超短脉冲啁啾放大^[3](Chirped Pulse Amplification, CPA)技术取得的重大突破, 实验室的超短脉冲激光经过聚焦后, 其场强已经可以超过原子内部的电场强度. 目前,

激光强度已经可以达到 10^{22} – 10^{23} W/cm²^[4]. 最近几年, 随着欧洲一些国家开始设计建造极端光场设施(Extreme Light Infrastructure, ELI)^[4], 人们甚至开始关注激光强度达到甚至超过 10^{24} W/cm²时的非线性物理效应, 诸如真空极化非线性效应、辐射阻尼现象, 乃至真空中正负电子对产生等量子电动力学效应.

自从量子电动力学发展起来之后, 真空中产生正负电子对便成为人们研究的热门话题: Dirac^[5]通过求解电子运动方程提出了负能量的概念, 并且预言了正

引用格式: 任芝, 尚大凯, 李松涛, 等. 真空中超强啁啾激光场下正电子产生的二维动量分布. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2024, 54: 111011
Ren Z, Shang D K, Li S T, et al. Two-dimensional momentum distribution of positrons in super-chirped laser field in the vacuum (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2024, 54: 111011, doi: [10.1360/SSPMA-2024-0001](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2024-0001)

电子的存在. Schwinger^[6]在1951年用最佳时间法(Proper-Time)计算出了产生粒子对的临界场强为 $E_{cr} \approx 10^{29} \text{ W/cm}^2$, 即如果作用于真空中的能量达到此强度, 真空则会被击穿, 正负电子对从而源源不断地被产生. 但是遗憾的是, 由于实验条件的限制, 目前实验室当中的能量强度(10^{23} W/cm^2)并不能达到这一临界场强(10^{29} W/cm^2). 所以人们在努力提高外场能量强度的同时, 也在寻求应用一些其他特殊形式的外场来实现在能量为次临界强度时如何在真空中激发产生正负电子对.

不同于其他研究真空中正负电子对产生的方法^[7-10]: 如Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB)近似方法^[8]、世界线瞬子技术^[7-9]和局部空间场近似方法(Locally-Constant Field Approximation, LCFA)^[11-15]等. 本文以数值求解量子Vlasov方程(Quantum Vlasov Equation, QVE)为理论基础, 在外部电场为超强激光场的情况下对产生的正电子的特性进行了研究. 众所周知, 激光场的形式有多种, 在真空中产生的正负电子对中, 人们也研究了各种形式电场下正负电子对产生的特征: 在局域化电场下, 有空间Sauter电场^[16]、阶梯电势、势阱势垒等形式^[17-22]; 而在非局域电场下, 空间分量为均匀状态(一个电子的康普顿波长), 时间分量上为高斯形式、啁啾形式等, 其中以啁啾电场为最多, 啁啾电场下产生的正负电子对的增强效应也最明显^[23-29]. 同时, Akkermans和Dunne^[24]讨论了Sauter电场下真空中正负电子对产生的一维动量分布, 并且基于隧穿效应, 在理想状态下观察到了动量干涉现象(见文献^[24]图3), 给出了一维动量分布.

真实状态下的粒子是在高维条件下产生的, 由此可见对正电子产生的研究从一维向高维逐步扩展是势在必行的. 本文全面地对不同形式啁啾电场(相同能量)下产生的正负电子对的特性进行了研究, 同时对二维(2D)状态下正电子的动量分布进行了研究, 其结果是令人惊讶的, 我们发现了全动量空间分布的正电子的均匀干涉图谱, 并且通过对转变点^[30,31]结构的分析, 同时应用多光子吸收效应, 对2D动量谱的干涉现象给出了定性的解释. 同时也给出了何种啁啾参数对粒子对的增强效应最为明显.

本文的组织结构如下: 在第2节中介绍了QVE方法. 在第3节中, 我们给出了外部超强激光电场及其内部光子频谱. 在第4节中, 讨论了真空中产生的正电子

的二维动量分布和产生粒子的数密度, 同时我们还用半经典的方法分析了二维动量谱特征, 并研究了动量峰值与频率调制场的频率分量之间的关系, 此外, 我们还考虑了不同啁啾参量下产生正电子的粒子数密度. 第5节是对本工作的总结.

2 量子Vlasov方程

我们使用的背景超强激光场是一个空间均匀但随时间变化的电场 $\mathbf{E}(t) = (0, 0, E(t))$, 对应的矢势为 $\mathbf{A}(t) = (0, 0, A(t))$, 其中 $E(t) = -\dot{A}(t)$. 从空间均匀含时电场下的Dirac方程出发, 运用正则含时的Bogoliubov变换, 可以推导出单粒子动量分布函数 $f(\mathbf{p}, t)$ 所满足的微分积分方程如下:

$$\frac{df(\mathbf{p}, t)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{eE(t)\varepsilon_{\perp}}{\Omega^2(\mathbf{p}, t)} \int_{t_0}^t dt' \frac{eE(t')\varepsilon_{\perp}}{\Omega^2(\mathbf{p}, t')} [1 - 2f(\mathbf{p}, t')] \times \cos\left[2 \int_t^{t'} d\tau \Omega(\mathbf{p}, \tau)\right]. \quad (1)$$

本文中应用的是自然单位 $\hbar = c = 1$, 其中 $-e$ 和 m 分别是电子的电荷和质量, $\mathbf{p} = (p_{\perp}, p_{\parallel})$ 是正则动量, 其中 $\varepsilon_{\perp}^2 = m^2 + p_{\perp}^2$ 表示垂直能量的平方, $\Omega^2(\mathbf{p}, t) = \varepsilon_{\perp}^2 + k_{\parallel}^2$ 是总能量的平方, $k_{\parallel}(t) = p_{\parallel} - eA(t)$ 是沿电场 $\mathbf{E}(t)$ 方向的动量. 同时注意到单粒子分布函数 $f(\mathbf{p}, t)$ 只是对 $t \rightarrow \infty$ 时, 即外部电场为零时产生的实粒子的描述, 因此我们只对分布函数 $f(\mathbf{p}, t \rightarrow \infty)$ 和粒子数密度 $n(t \rightarrow \infty)$ 感兴趣.

对公式(1)数值求解, 我们可以引入两个辅助变量

$$u(\mathbf{p}, t) = \int_{t_0}^t dt' W(\mathbf{p}, t') [1 - 2f(\mathbf{p}, t')] \cos[2\Theta(\mathbf{p}, t', t)],$$

$$v(\mathbf{p}, t) = \int_{t_0}^t dt' W(\mathbf{p}, t') [1 - 2f(\mathbf{p}, t')] \sin[2\Theta(\mathbf{p}, t', t)].$$

则方程(1)可等价地转化为下列一阶常微分方程组:

$$\begin{aligned} \frac{df(\mathbf{p}, t)}{dt} &= \frac{1}{2} W(\mathbf{p}, t) u(\mathbf{p}, t), \\ \frac{du(\mathbf{p}, t)}{dt} &= W(\mathbf{p}, t) [1 - 2f(\mathbf{p}, t)] - 2\Omega(\mathbf{p}, t) v(\mathbf{p}, t), \\ \frac{dv(\mathbf{p}, t)}{dt} &= 2\Omega(\mathbf{p}, t) v(\mathbf{p}, t), \end{aligned} \quad (2)$$

其中有 $W(\mathbf{p}, t) = eE(t)\varepsilon_{\perp} / \Omega^2(\mathbf{p}, t)$, 此外还有 $\Theta(\mathbf{p}, t', t) = \int_{t'}^t d\tau \Omega(\mathbf{p}, \tau)$. 之后运用4阶Runge-Kutta方法进行求解.

在初始条件为 $f(\mathbf{p}, -\infty) = u(\mathbf{p}, -\infty) = v(\mathbf{p}, -\infty) = 0$ 的情况下, 通过求解方程组(2)得到单粒子动量分布函数 $f(\mathbf{p}, t)$, 对动量分布函数进行积分则可以得到随时间演化的粒子数密度

$$n(t) = 2 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} f(\mathbf{p}, t), \quad (3)$$

其中, 系数2来自于电子自旋产生的简并度.

3 超强激光场及光子频谱

本文的目的是研究外部强激光场下产生的正电子的二维动量谱的分布, 并研究不同激光啁啾系数对正电子产生机理的影响. 由于我们想探究二维动量分布的差异性, 所以我们采用了一组不同形式的超强激光电场来得到正电子的二维动量分布图. 在本文中, 我们选取了不同条件下的激光啁啾外场, 形式为

$$\begin{aligned} E_0(t) &= e_0 \cdot e^{-\frac{t^2}{2\tau^2}} \cdot \cos[\omega_0 t + \varphi], \\ E_1(t) &= e_0 \cdot e^{-\frac{t^2}{2\tau^2}} \cdot \cos[(\omega_0 + b_1 t)t + \varphi], \\ E_2(t) &= e_0 \cdot e^{-\frac{t^2}{2\tau^2}} \cdot \cos[(\omega_0 + b_2 |t|)t + \varphi], \\ E_3(t) &= e_0 \cdot e^{-\frac{t^2}{2\tau^2}} \cdot \cos[(\omega_0 + b_3 t^2)t + \varphi], \end{aligned} \quad (4)$$

其中, e_0 , ω_0 , φ 和 τ 分别为啁啾电场的强度、频率、相位和脉冲持续时间, b 为啁啾系数.

图1为公式(4)中不同啁啾形式下电场随时间变化图像, 图1(a)是没有啁啾情况下的电场形式, 记为 $E_0(t)$, 此电场在任意时刻频率都是 $\omega_0 = 0.5$, 激光的频率不随时间变化; 图1(b)所示为电场 $E_1(t)$ 随时间变化图, 啁啾系数 $b_1 = 0.002$, 激光频率随时间增加; 图1(c)所示则为电场 $E_2(t)$ 随时间变化图, 啁啾系数 $b_2 = 0.002$, 激光频率随时间先减小后增加, 最小频率是当时间 $t = 0$ 时的 $\omega_0 = 0.5$, 且最小频率对应电场的中间时刻; 图1(d)所示为电场 $E_3(t)$ 随时间变化图, 啁啾系数 $b_3 = 0.00004$, 激光频率随时间先减小后增加, 最小频率仍是 $\omega_0 = 0.5$, 同样最小频率在电场的中间时刻取得, 图1(c)和(d)中激光频率大小的变化都为对偶形式.

图1横坐标时间均为相对时间, 同时为了提高能量利用率, 我们选择啁啾参数满足 $b_1\tau = b_2\tau = b_3\tau^2$, 这是使脉冲激光提供的场能量相同, 即满足公式(6), 把 $b_1 = 0.002$, $b_2 = 0.002$, $b_3 = 0.00004$ 和 $\tau = 50$ 代入公式(4)和

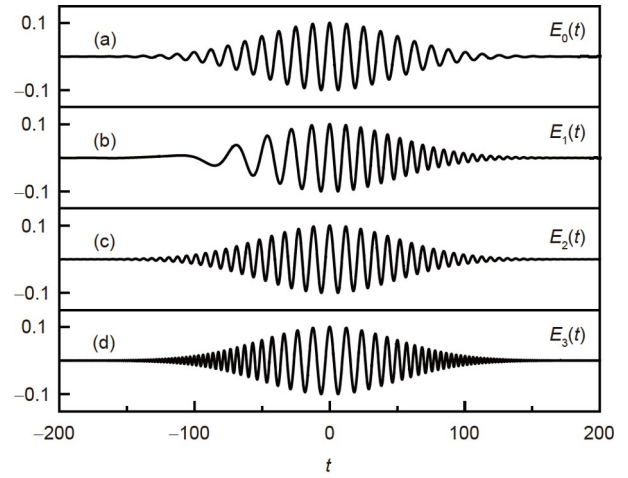


图1 按照从上到下的顺序, 电场强度随时间变化的曲线分别为 $E_0(t)$, $E_1(t)$, $E_2(t)$ 和 $E_3(t)$, 其中相对应的啁啾系数分别为 $b = 0$, $b_1 = 0.002$, $b_2 = 0.002$ 和 $b_3 = 0.00004$. 其余共同参数为 $e_0 = 0.1$, $\omega_0 = 0.5$, $\varphi = 0$ 和 $\tau = 50$

Figure 1 From top to bottom, the electric fields are $E_0(t)$, $E_1(t)$, $E_2(t)$, and $E_3(t)$, respectively, and the corresponding modulated chirp parameters are $b = 0$, $b_1 = 0.002$, $b_2 = 0.002$, and $b_3 = 0.00004$, respectively. The other parameters are $e_0 = 0.1$, $\omega_0 = 0.5$, $\varphi = 0$, and $\tau = 50$.

(5), 得 $W_0 = W_1 = W_2 = W_3 = 0.443c^4$, 其中 W 表示激光能量.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dt E_0^2(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt E_1^2(t, b_1) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt E_2^2(t, b_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt E_3^2(t, b_3). \end{aligned} \quad (5)$$

图2所示的频谱图是通过对图1中的电场作傅里叶变换而得到的, 每张频谱图的物理量与图1相同, 可以看出对于每个电场来说, 主频率还是激光的原频率 $\omega_0 = 0.5$, 这样我们不仅可以保留激光电场在没有被啁啾调制时正电子产生的主要特征, 同时也可对激光被进行啁啾调制后的正电子产生的特性进行研究. 可以看出, 图2(a)的频谱图为电场没有被调制时的频谱, 其中只包含激光的原频率 $\omega_0 = 0.5$, 频谱在0.5附近的展宽是由于高斯波包的作用所致. 当对电场 E_0 做不同形式的啁啾调制时, 通过图2(b)–(d)曲线, 我们可以看出激光的频率是这样变化的: 图2(b)在原有频率的基础上, 频率的展宽更加充分, 其中所包含的不同频率的光子也有所增加, 且光子的频率成连续状态分布; 图2(c)在激光原频率的频谱基础上, 又多出了一些单频率的光子, 其频率数值大于激光原频率 $\omega_0 = 0.5$, 趋近于 $\omega = 1$, 且新增的光子频率数量是少于 $\omega_0 = 0.5$ 的光子数的,

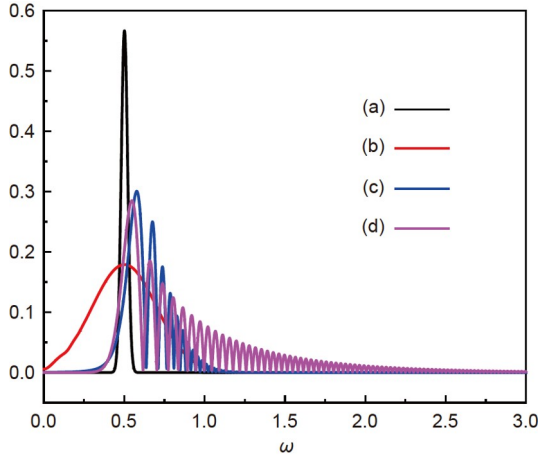


图 2 (网络版彩图) 频谱图由对图 1 电场作傅里叶变换所得, 与图 1 中的电场次序互相对应, 参数相同

Figure 2 (Color online) The frequency curves are obtained by Fourier transform of the electric field in Figure 1, which correspond to the order of the electric field in Figure 1 and have the same parameters.

这也是上一节中强调的对激光进行频率调制但是不改变原激光频率的证明; 图 2(d) 的频谱特征与图 2(c) 相似,

不过新增加的光子频率范围更宽, 已经有很少的一部分光子的频率大于正电子产生的场强临界值 $2c^2$, 这一部分光子会显著地增加真空中正电子的产生率, 这一点我们会在后文当中详细讨论.

4 理论分析

在本节中我们分析不同形式强激光场啁啾条件对真空中产生的正电子的影响以及用半经典方法来分析产生影响的原因, 还有在不同啁啾调制系数下产生的粒子对的动量谱的 2D 分布.

4.1 一维及二维粒子动量谱

图 3 为真空中产生的正电子的 1D 动量分布图, 所应用的电场为图 1 所示电场. 从图 3(a)–(d) 中可以观测到明显的动量峰值, 但是分布并不均匀. 相较于文献 [24] 中动力学辅助效应下的一维动量分布, 其峰值并未呈现出梯度均匀下降分布. 根据多光子吸收机制

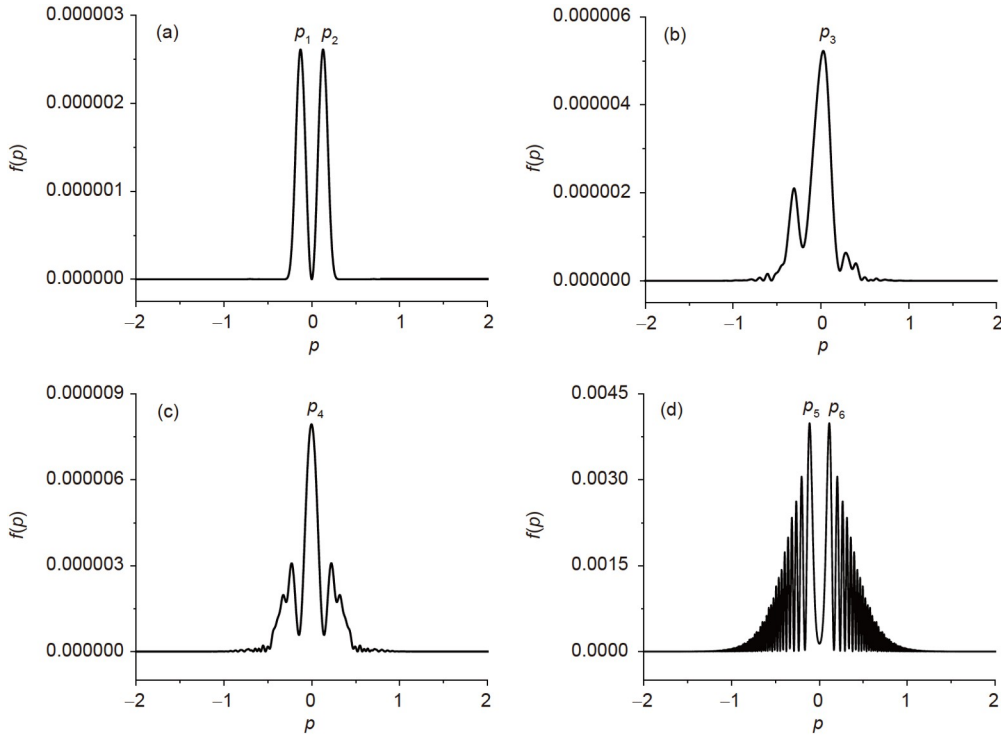


图 3 多光子吸收效应下产生的正负电子对的 1D 动量分布图, 与图 1 中的电场位置互相对应, (a) $b = 0$; (b) $b_1 = 0.002$; (c) $b_2 = 0.002$ 和 (d) $b_3 = 0.00004$. 其余共同参数为 $e_0 = 0.1$, $\omega_0 = 0.5$, $\varphi = 0$ 和 $\tau = 50$

Figure 3 The 1D momentum spectrum of the created electron and positron pairs correspond to the position of the electric field in Figure 1 under the multi-photon absorption mechanism, (a) $b = 0$; (b) $b_1 = 0.002$; (c) $b_2 = 0.002$ and (d) $b_3 = 0.00004$. The other parameters are $e_0 = 0.1$, $\omega_0 = 0.5$, $\varphi = 0$, and $\tau = 50$.

与能量守恒原理, 我们可以计算出图3(a)当中的两个峰值 $p_{1,2}$ 符合4光子吸收过程, $E(p) = 2\sqrt{m^2 + p^2}$, $p_{1,2} = \pm 0.13$, 所以 $E(p) = 2.01 = 4\omega_0$, 即4光子吸收. 同样的, 图3(b)峰值 $p_3 = 0.023$ 也符合4光子吸收过程, 而且从图2中的频谱可以看出, 电场 $E_1(t)$ 的激光频率由于啁啾调制作用, 在 $\omega_0 = 0.5$ 附近被展宽, 与此对应的粒子的动量分布也呈现出了不同的峰值, 这些峰值正是因为粒子吸收了不同能量的光子所形成的. 同样的, 根据多光子吸收效应, 可以得到 $p_{4,5,6}$ 同样符合4光子吸收效应, 其中 $p_4 = 0$, $p_{5,6} = \pm 0.115$. 图3(c)和(d)中的粒子动量分布呈对称形式, 是因为电场 $E_2(t)$ 和 $E_3(t)$ 为对称电场, 产生的粒子在空间 $\pm x$ 处所受的作用力相同, 方向相反, 所受到的加速度大小相同, 所以粒子向空间两端运动动量相同. 图3(d)相比于图3(c), 所产生的粒子数的动量分布与数量显著增加, 这是因为更高频率光子的增加所导致的, 同时对比于图3(a), 这里除了4光

子吸收的动量峰值外, 也出现了5光子吸收和6光子吸收等更加高能的动量峰值分布, 这一激光调制行为不仅可以使产生的正电子的数量显著增加, 还可以为我们提供具有不同动量的正负电子对, 这使产生的正负粒子对的能量更高.

同时当我们对 $p_\perp = 0$ 进行扩展, 关注图4的2D动量分布的整体, 明显地, 当激光没有被进行啁啾调制时, 正电子的动量分布局限于小动量范围内. 当激光的频率被啁啾调制之后, 无论是哪种调制形式, 产生的粒子的动量分布均有所展宽. 其中, 图4(b)的动量分布在 $p_\perp$ 和 $p_\parallel$ 两个方向均不对称, 图4(c)和(d)在 $p_\perp$ 和 $p_\parallel$ 两个方向却均呈对称形式分布, 其中在 $E_3(t)$ 形式电场下产生的粒子在全空间趋于均匀扩散, 并且形成干涉条纹. 从图1的电场分布图 $E_2(t)$ 和 $E_3(t)$ 可以看出来, 此两种电场都关于 x 轴对称, 同时我们可以看出, 当 $p_\perp = 0$, 此两种电场下产生的正电子动量分布均关于动量原点对称, 而且从动量的2D分布图上也可以看出来, 对于图4

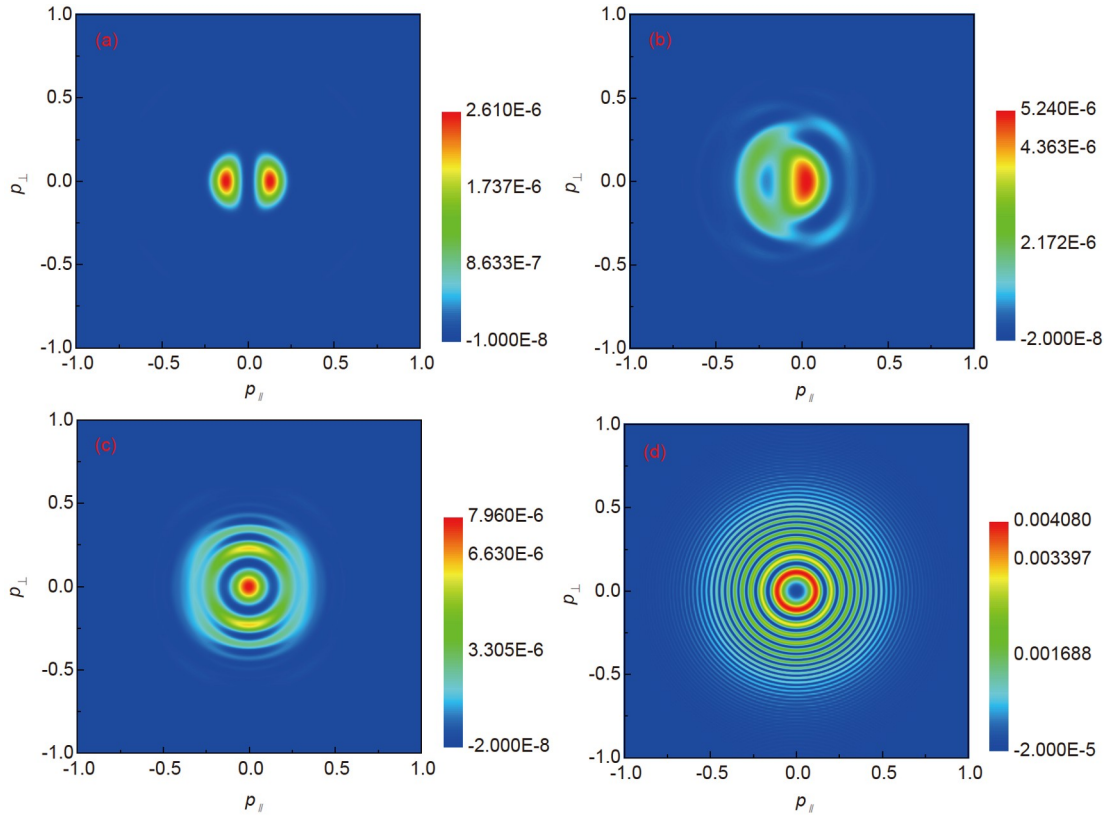


图4 (网络版彩图)产生的正负电子对的2D动量分布图, 与图1中的电场位置互相对应, (a) $b = 0$; (b) $b_1 = 0.002$; (c) $b_2 = 0.002$ 和(d) $b_3 = 0.00004$. 其余共同参数为 $e_0 = 0.1$, $\omega_0 = 0.5$, $\varphi = 0$ 和 $\tau = 50$

Figure 4 (Color online) The 2D momentum spectrum of the created electron and positron pairs correspond to the position of the electric field in Figure 1, (a) $b = 0$; (b) $b_1 = 0.002$; (c) $b_2 = 0.002$ and (d) $b_3 = 0.00004$. The other parameters are $e_0 = 0.1$, $\omega_0 = 0.5$, $\varphi = 0$, and $\tau = 50$.

(c)和(d)而言, 无论选择任何 $p_{\perp} = c$ 或 $p_{\parallel} = c$ 条件下的动量分布均为对称结构(其中 c 为-1到1内的任一常数), 但是图4(d)明显具有 $p_{\perp}^2 + p_{\parallel}^2 = \text{con.}$ 条件下的圆对称结构, 这一结构完美地证明了粒子具有波动性这一物理现象. 不过对于图4(c)来说, 在动量范围 $p_{\perp}^2 + p_{\parallel}^2 \leq 0.12^2$ 内也可见圆对称结构, 而图4(d)是在全动量空间内均为圆对称(范围为 $p_{\perp}^2 + p_{\parallel}^2 \leq 0.5^2$), 图4(c)的各向同性效应相对于图4(d)而言较弱, 这是因为对于电场 $E_3(t)$ 所包含的高频率光子比较多, 这导致了具有更大动量的正电子的产生, 粒子增加, 大动量处的干涉条纹便更加清晰, 所以正圆分布范围更大, 关于粒子数的增强效应, 请详见第4.3节. 同时图4(c)相比较于其他, 产生的零动能粒子的峰值更加集中, 即 $p_{\perp}^2 + p_{\parallel}^2 = 0$ 处, 这为收集粒子提供了便利.

4.2 基于转变点结构的理论分析

对于图4(d)中出现的各向同性干涉效应, 我们采用相积分方法^[25-27]进行了分析, 即在时间演化且空间均匀啁啾电场中所产生的正电子类似于量子力学中的一维超势垒散射问题, 产生的粒子的动量分布函数可以由反射系数得到.

$$f(\mathbf{p}) \approx \sum_{t_p} e^{-2K_p^p} + \sum_{t_p \neq t_{p'}} 2\cos(2\theta_p^{(p,p')}) \cdot (-1)^{p-p'} e^{-K_p^p - K_{p'}^p}, \quad (6)$$

$$\text{其中, } K_p^p = \left| \int_{t_p}^{t_p} \Omega(\mathbf{p}, t) dt \right|, \theta_p^{(p,p')} = \left| \int_{\text{Re}(t_p)}^{\text{Re}(t_{p'})} \Omega(\mathbf{p}, t) dt \right|.$$

这里的 t_p 和 $t_{p'}$ 代表了方程 $\Omega(\mathbf{p}, t)$ 的解中的不同转变点. 不难看出 K_p^p 和 $\theta_p^{(p,p')}$ 决定了正电子产生的数量和干涉的程度. 具体来说, 粒子数密度由最接近实轴的转变点决定, 而干涉的程度则由最接近实轴的转变点的数量决定. 因此, 拐点在复数时间轴上的分布可以用来定性分析动量谱的信息, 特别是一些特定的动量峰值.

图5所示为转变点分布图, 分别对应于图3中每个动量分布图中4光子吸收的动量峰值($p_{\perp}=0$). 可以看出图5(b)-(d)相对于图5(a)来说有明显的干涉效应, 且产生的正电子数也明显的有所增加, 具体粒子数密度请见第4.3节.

图5(b)相较于图5(a), (c)和(d)来看, 转变点分布具有明显的非对称结构, 这是由于其相对应的电场为非对称的电场所导致的; 图5(c)相较于图5(a), 转变点的位置距离实数轴更近, 所以产生的粒子更多, 转变点也有所增加, 所以我们可以看出图3动量谱中图3(c)相对于3(a), 有了明显的干涉效应, 图5(d)的分析与图5(c)一致, 其中转变点更加接近于实数轴, 而且相对于图5(c), 其收敛性更好, 从而导致更明显的各向同性干涉效应, 转变点对数也有所增加, 这导致正负电子对数密度的增加.

4.3 不同啁啾系数下的粒子数密度

由于高斯波包的存在, 电场的有效作用范围为 $-\tau$ 到 τ , 同时为了保证啁啾部分所增加的激光频率不超过激光原频率 ω_0 , 所以对于三种形式的啁啾电场的限制条件分别为 $\omega_0 \geq b_1\tau$, $\omega_0 \geq b_2\tau$ 和 $\omega_0 \geq b_3\tau^2$. 对于电场 $E_1(t)$, 激光的有效频率变化范围是 $0-2\omega_0$, 从图2(b)曲线可以看到这种频率的变化是连续的; 对于电场 $E_2(t)$, 也可以从图2(c)中得到证明, 激光的频率变化范围是 $\omega_0-2\omega_0$. 其中, 图2(c)与(b)的激光参数完全相同, 不同的是图2(c)曲线的激光频率与图2(b)的激光频率起点不一致, 图2(c)的激光频率变化范围包含了图2(b), 但是从图6可得, b_2 条件下的真空中正负电子对的产生率远远高于 b_1 , 这也就是说, 粒子对的产生不仅与激光的频率大小有关, 还与所处频率的光子的份额占比有关, 这一点从动量分布图上也可以看出来. 而对于图2(d), 激光的频率变化范围是 $\omega_0-2\omega_0$, 但是令我们惊讶的是, 当我们对电场 $E_3(t)$ 作傅里叶变换之后, 激光的频率的最大值则超过了 $2\omega_0$. 对于图1的电场来说, b_1 与 b_2 的最大值为 τ/ω_0 , b_3 的最大值为 τ^2/ω_0 . 对于图6(a), 当 $b_1 = 0$ 时, $N(b_1) = 2.125 \times 10^{-7}$, 而当 $b_1 = \tau/\omega_0$ 时, $N(b_1) = 1.3 \times 10^{-2}$, 可见正电子数的产量增加了 6.12×10^4 倍. 同时从图中的几个平台结构可以看出, 当激光频率线性增加时, 对于啁啾系数 b_1 来说, 并不是越大越好, 这可以为我们提供一种全新的节省激光能量的方式. 对于图6(b), 当 $b_2 = 0$ 时, $N(b_2) = 2.125 \times 10^{-7}$, 而当 $b_2 = \tau/\omega_0$ 时, $N(b_2) = 0.117$, 粒子数的产量提升了 5×10^5 倍, 这要比应用电场 E_1 时提高了整整一个数量级, 而所需要的激光能量又是相同的, 所以在获得粒子数密度的方向上, 采用电场 E_2 相比于 E_1 更有优势. 同样的, 对于图6(c), 当 $b_3 = \tau^2/\omega_0$ 时, $N(b_3) = 0.21$, 粒子数的产量增加了 10^6 倍. 可见, 对

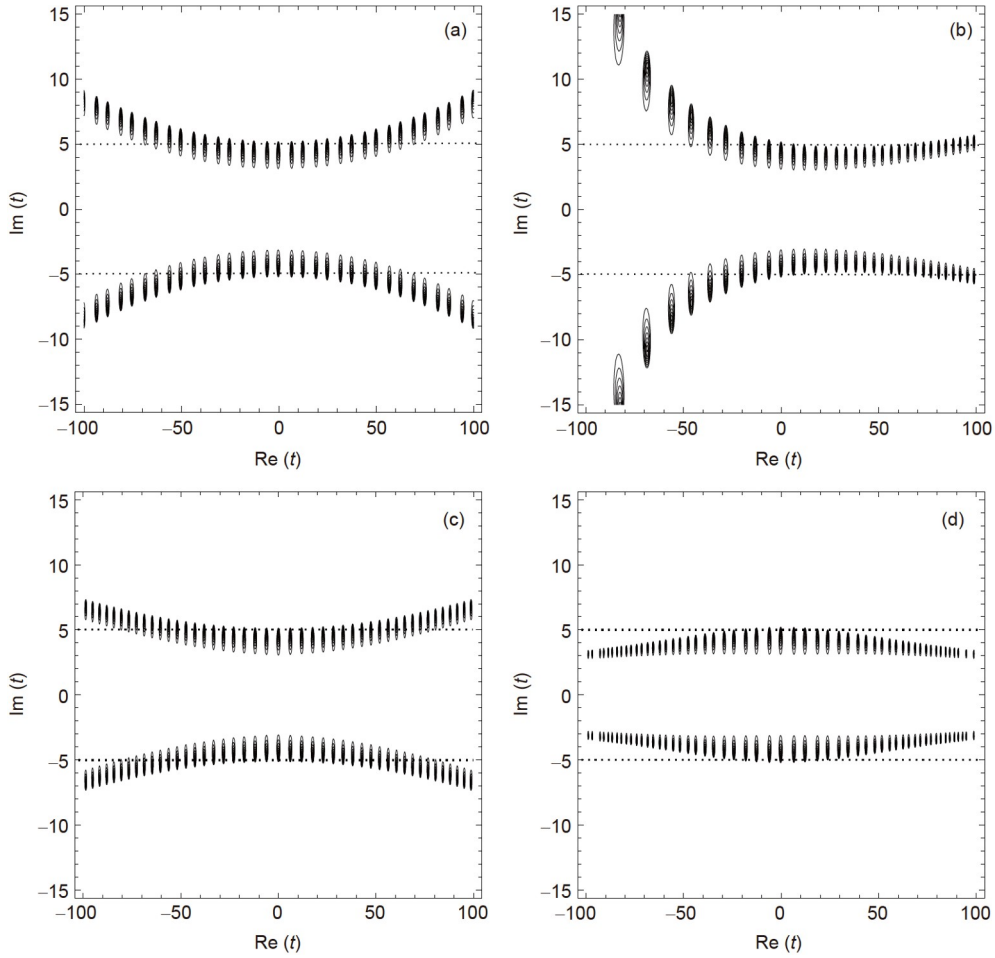


图 5 (a)–(d)分别为当产生的粒子的动量值符合4光子吸收时的转变点分布图, 与动量分布图和电场图的电场形式相对应. 其余共同参数为 $e_0 = 0.1$, $\omega_0 = 0.5$, $\varphi = 0$ 还有 $\tau = 50$

Figure 5 (a)–(d) shows the distribution of turning points when the momentum values of the created pairs conform to 4-photon absorption, the parameters as same as Figure 1. And the other parameters are $e_0 = 0.1$, $\omega_0 = 0.5$, $\varphi = 0$, and $\tau = 50$.

于三种不同的啁啾形式, 当 b_1 , b_2 和 b_3 分别达到最大值时, 电场呈对称啁啾形式时, 产生的正电子的数密度会更多.

5 结论与展望

综上所述, 我们探究了不同啁啾调制电场下产生的正电子的二维动量谱和粒子数密度, 发现产生正电子的动量谱表现出明显的干涉图样, 在相位积分法的框架下, 通过分析转变点结构可以定性理解这种干涉效应. 真空中产生的正电子通过吸收不同频率的光子而形成特有的干涉条纹, 这一发现进一步证明了粒子的波粒二象性. 此外, 我们发现啁啾调制场的参数

可以增强或减弱产生的正电子的数密度, 对于某些调制参数可以提高多个数量级. 这些结果可以为今后实验中增加正电子的产量提供一种高效的方法.

对于真空中产生的正电子的动量分布, 人们对于周期性的电场可以使产生的正电子1D动量谱成对称式分布已经认同, 事实证明也的确如此. 但是对于2D动量谱特征却知之不多, 本文通过对正电子的2D动量分布进行研究, 发现其展示出了不一样的物理现象, 其不只完全决定于周期性的电场结构, 电场 $E_2(t)$ 和 $E_3(t)$ 虽然都是轴对称电场, 但是由于成分的不同, 真空在电场 $E_3(t)$ 的作用下, 可以产生全空间的圆对称分布, 而电场 $E_2(t)$ 却不能实现这一现象, 这一发现无疑是令人振奋的, 同时我们对于如何产生的这一现象也产生

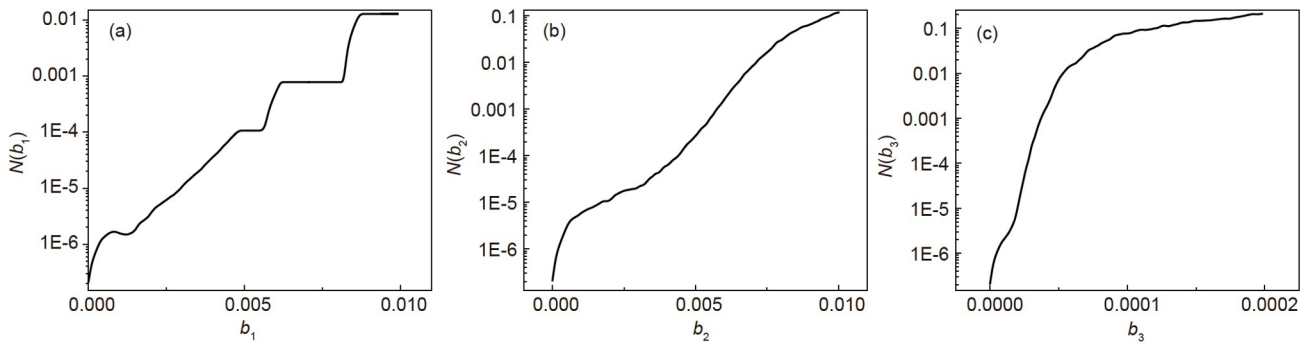


图 6 (a) 当电场为 $E_1(t)$ 时粒子数产生量 b_1 的变化; (b) 当电场为 $E_2(t)$ 时粒子数产生量 b_2 的变化; (c) 电场为 $E_3(t)$ 时粒子数产生量随 b_3 的变化. 其中 $e_0 = 0.1$, $\omega_0 = 0.5$, $\varphi = 0$ 和 $\tau = 50$

Figure 6 Panels (a), (b), and (c) are the number of the created pairs for $E_1(t)$, $E_2(t)$, and $E_3(t)$ with b_1 , b_2 , and b_3 . The other parameters are $e_0 = 0.1$, $\omega_0 = 0.5$, $\varphi = 0$, and $\tau = 50$.

了浓厚的兴趣, 并通过半经典近似方法对其进行了理论分析. 此外, 我们也可以看出, 在外部激光所提供的能量相同的条件下, 采用 b_3 形式的激光啁啾调制会获得最大的激光能量转化率, 粒子数密度会达到最大.

在对正负电子对产生的研究之中, 目前除了需要对其从一维扩展到高维之外, 同时也有很多问题是应用现有的理论或数值模拟程序无法进行研究的, 其中之一便是目前的研究当中, 无法对真实激光存在的紧聚焦问题进行计算. 但是随着新计算方法-机器学习的发展, 目前数值模拟无法实现的诸多问题都能够得到高效解决.

合理的使用机器学习算法, 可以帮助物理学家用新的视角研究科学问题, 例如在经典物理学领域内,

应用机器学习方法中的符号回归(Symbolic Regression)方法可以找到与目标函数的数据匹配的符号表达式, 即使数据量减少到仅仅100个数据点, 大部分经典费曼方程也都可以被获得^[32]; 在量子物理领域内, 机器学习中的神经网络方法(Neural Network)也可以用来完美求解薛定谔方程的基态波函数表达式^[33]等.

目前已有科学家通过直接编写机器学习程序用来对Dirac方程进行数值求解^[34]. 对于量子Vlasov方程方法, 可以通过在程序当中加入机器学习程序模块, 使两者可以相互调用, 选择数值模拟所得到的适合数据作为输入数据, 输入数据通过机器学习程序的监督性训练之后, 所输出的正电子状态将会被不断的优化, 直到获得最优分布.

致谢 感谢中国矿业大学(北京)李子良及李英骏老师、伊利诺伊州立大学苏其昌(Q. Charles Su)和Rainer Grobe老师对相关工作的指导和讨论, 感谢国家留学基金委(CSC)的支持.

参考文献

- 1 Einstein A. Strahlung-emission und-absorption nach der Quantentheorie. *Verh d Deutsche Physik Ges*, 1916, 18: 318–328
- 2 Maiman T H. Stimulated optical radiation in ruby. *Nature*, 1960, 187: 493–494
- 3 Strickland D, Mourou G. Compression of amplified chirped optical pulses. *Opt Commun*, 1985, 55: 447–449
- 4 Tanaka K A, Spohr K M, Balabanski D L, et al. Current status and highlights of the ELI-NP research program. *Matter Radiat at Extremes*, 2020, 5: 024402
- 5 Dirac P A M. The quantum theory of the electron. *Proc R Soc Lond A*, 1928, 117: 610–624
- 6 Schwinger J. On gauge invariance and vacuum polarization. *Phys Rev*, 1951, 82: 664–679
- 7 Furry W H. On bound states and scattering in positron theory. *Phys Rev*, 1951, 81: 115–124
- 8 Kim S P, Page D N. Schwinger pair production via instantons in strong electric fields. *Phys Rev D*, 2002, 65: 105002, arXiv: [hep-th/0005078](https://arxiv.org/abs/hep-th/0005078)

- 9 Dietrich D D, Dunne G V. Gutzwiller's trace formula and vacuum pair production. *J Phys A-Math Theor*, 2007, 40: F825–F830, arXiv: [0706.4006](#)
- 10 Dunne G V, Wang Q H, Gies H, et al. Worldline instantons and the fluctuation prefactor. *Phys Rev D*, 2006, 73: 065028, arXiv: [hep-th/0602176](#)
- 11 Aleksandrov I A, Plunien G, Shabaev V M. Locally-constant field approximation in studies of electron-positron pair production in strong external fields. *Phys Rev D*, 2019, 99: 016020, arXiv: [1811.01419](#)
- 12 Sevostyanov D G, Aleksandrov I A, Plunien G, et al. Total yield of electron-positron pairs produced from vacuum in strong electromagnetic fields: Validity of the locally constant field approximation. *Phys Rev D*, 2021, 104: 076014, arXiv: [2012.10751](#)
- 13 Diez M. Time-scales of Particle Formation in the Sauter-Schwinger Effect. Dissertation for Doctoral Degree. Graz: University of Graz, 2022
- 14 Hebenstreit F, Alkofer R, Gies H. Pair production beyond the Schwinger formula in time-dependent electric fields. *Phys Rev D*, 2008, 78: 061701, arXiv: [0807.2785](#)
- 15 Bergues B, Ni Y, Helm H, et al. Experimental study of photodetachment in a strong laser field of circular polarization. *Phys Rev Lett*, 2005, 95: 263002
- 16 Sauter F. Über das Verhalten eines Elektrons im homogenen elektrischen Feld nach der relativistischen Theorie Diracs. *Z Phys*, 1931, 69: 742–764
- 17 Lv Q Z, Su A C, Jiang M, et al. Pair creation for bosons in electric and magnetic fields. *Phys Rev A*, 2013, 87: 023416
- 18 Jiang M, Lv Q Z, Sheng Z M, et al. Enhancement of electron-positron pair creation due to transient excitation of field-induced bound states. *Phys Rev A*, 2013, 87: 042503
- 19 Gong C, Su Q, Grobe R. Birth process of electron-positron pairs inside supercritical fields. *Europhys Lett*, 2023, 141: 65001
- 20 Wang L, Wu B, Xie B S. Electron-positron pair production in an oscillating Sauter potential. *Phys Rev A*, 2019, 100: 022127, arXiv: [1905.04429](#)
- 21 Su Q, Su W, Lv Q Z, et al. Magnetic control of the pair creation in spatially localized supercritical fields. *Phys Rev Lett*, 2012, 109: 253202
- 22 Gong C, Li Z L, Li Y J, et al. Resolving rapidly chirped external fields with Dirac vacuum. *Phys Rev A*, 2020, 101: 063405
- 23 Xie B S, Li Z L, Tang S. Electron-positron pair production in ultrastrong laser fields. *Matter Radiat at Extremes*, 2017, 2: 225–242
- 24 Akkermans E, Dunne G V. Ramsey fringes and time-domain multiple-slit interference from vacuum. *Phys Rev Lett*, 2012, 108: 030401, arXiv: [1109.3489](#)
- 25 Alkofer R, Hecht M B, Roberts C D, et al. Pair creation and an X-ray free electron laser. *Phys Rev Lett*, 2001, 87: 193902, arXiv: [nucl-th/0108046](#)
- 26 Hebenstreit F, Alkofer R, Gies H. Schwinger pair production in space- and time-dependent electric fields: Relating the Wigner formalism to quantum kinetic theory. *Phys Rev D*, 2010, 82: 105026, arXiv: [1007.1099](#)
- 27 Li Z L, Lu D, Xie B S, et al. Enhanced pair production in strong fields by multiple-slit interference effect with dynamically assisted Schwinger mechanism. *Phys Rev D*, 2014, 89: 093011
- 28 Li L J, Mohamedsedik M, Xie B S. Enhanced dynamically assisted pair production in spatial inhomogeneous electric fields with the frequency chirping. *Phys Rev D*, 2021, 104: 036015, arXiv: [2104.08828](#)
- 29 Diez M, Alkofer R, Kohlfürst C. Identifying time scales in particle production from fields. *Phys Lett B*, 2023, 844: 138063, arXiv: [2211.07510](#)
- 30 Dumlu C K, Dunne G V. Stokes phenomenon and schwinger vacuum pair production in time-dependent laser pulses. *Phys Rev Lett*, 2010, 104: 250402, arXiv: [1004.2509](#)
- 31 Schneider C, Torgrimsson G, Schützhold R. Discrete worldline instantons. *Phys Rev D*, 2018, 98: 085009, arXiv: [1806.00943](#)
- 32 Udrescu S M, Tegmark M. AI Feynman: A physics-inspired method for symbolic regression. *Sci Adv*, 2020, 6: eaay2631, arXiv: [1905.11481](#)
- 33 Hermann J, Schätzle Z, Noé F. Deep-neural-network solution of the electronic Schrödinger equation. *Nat Chem*, 2020, 12: 891–897
- 34 Lorin E, Yang X. Time-dependent Dirac equation with physics-informed neural networks: Computation and properties. *Comput Phys Commun*, 2022, 280: 108474

Two-dimensional momentum distribution of positrons in super-chirped laser field in the vacuum

REN Zhi^{1,3}, SHANG DaKai^{1,3}, LI SongTao^{1,3}, YANG ShiFang² & GONG Chi^{1,3*}

¹ Department of Mathematics and Physics, North China Electric Power University, Baoding 071003, China;

² Department of Electrical Engineering, North China Electric Power University, Baoding 071003, China;

³ Hebei Key Laboratory of Physics and Energy Technology, North China Electric Power University, Baoding 071003, China

*Corresponding author (email: chigong@ncepu.edu.cn)

In this study, the two-dimensional momentum spectra of electron-positron pairs produced in vacuum under different forms of a strong chirped laser field and the particle number density under different chirped coefficients are investigated using the quantum dynamic equations. The two-dimensional momentum spectrum of positrons created in vacuum indicates an obvious interference distribution effect after the laser frequency is chirped in various forms. Moreover, the two-dimensional momentum spectrum gradually tends to be isotropic, i.e., exhibits a normal circular distribution, which is a remarkable characteristic of the chirped field reflected in this spectrum. In addition, the reason for the interference effect can be qualitatively understood by analyzing the structure of turning points. Investigation of the number density of particles shows that it is very sensitive to the chirp coefficient. Moreover, the number density shows an obvious periodic distribution and enhancement with a change in the chirp parameter. This observation provides a new method for increasing the production of electron-positron pairs in future experiments.

strong chirped field, electron-positron pairs, two-dimensional momentum distribution

PACS: 34.50.Rk, 03.65.-w, 12.20.-m

doi: [10.1360/SSPMA-2024-0001](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2024-0001)