



双圆盘 Hardy 空间上的子模 $[q(\theta, \varphi)]$ 的 Hilbert-Schmidt 性

献给刘培德教授 80 华诞

卢玉峰, 祖超, 杨义新*

大连理工大学数学科学学院, 大连 116024

E-mail: lyfdlut@dlut.edu.cn, zuchao@mail.dlut.edu.cn, yangyixin@dlut.edu.cn

收稿日期: 2022-11-29; 接受日期: 2023-03-01; 网络出版日期: 2023-04-27; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11671065 和 11971086) 和大连理工大学科研创新团队 (批准号: DUT2021TB07) 资助项目

摘要 设 M 是双圆盘 Hardy 空间 $H^2(\mathbb{D}^2)$ 上的一个闭子空间, 如果 M 在坐标函数 z 和 w 的作用下不变, 则称 M 为子模. “是否每个有限生成的子模都是 Hilbert-Schmidt 的” 是一个尚未解决的公开问题. 本文证明由 $q(\theta(z), \varphi(w))$ 生成的子模都是 Hilbert-Schmidt 的, 其中, q 是任意齐次多项式, θ 和 φ 是两个内函数.

关键词 双圆盘 Hardy 空间 Hilbert-Schmidt 子模 核函数

MSC (2020) 主题分类 47A13, 46E20

1 引言

设 $\mathbb{C}[z, w]$ 表示双变量复多项式环, 则双圆盘 Hardy 空间 $H^2(\mathbb{D}^2)$ 可以看作一个 $\mathbb{C}[z, w]$ -模, 其模作用由函数的逐点乘法所定义. 自 20 世纪 60 年代以来, 已有大量关于 $H^2(\mathbb{D}^2)$ 中的子模的研究工作 (参见文献 [12]). $H^2(\mathbb{D}^2)$ 子模的研究动机主要有以下 3 点: 第一, 经典的 Beurling 定理给出了单变量 Hardy 空间 $H^2(\mathbb{D})$ 中子模的一个简洁漂亮的刻画, 这对函数空间上算子理论的发展影响深远; 第二, $H^2(\mathbb{D}^2)$ 子模的结构与单个算子的函数模型论 (Nagy-Foias 算子模型论^[1]) 之间存在紧密联系 (参见文献 [11]); 第三, $H^2(\mathbb{D}^2)$ 中的子模提供了大量有趣的双变量例子, 从中可以检验多变量算子理论的一些新思想和技术, 以促进多变量算子理论的发展. 然而, 正如文献 [6] 所示, $H^2(\mathbb{D}^2)$ 子模的结构远比单变量情形下的子模结构要复杂得多, 很多用于 $H^2(\mathbb{D})$ 的研究工具几乎都无法有效地运用于双变量情形.

对 $H^2(\mathbb{D}^2)$ 的研究还在发展与探索中. 解决这个问题的一种方法是研究一些相对简单的子模, 并希望能从这些有趣的例子中发展出新的概念和技术. 文献 [2] 通过建立 Bergman 空间与商模 $[z - w]^\perp$

英文引用格式: Lu Y F, Zu C, Yang Y X. Hilbert-Schmidtness of submodule $[q(\theta, \varphi)]$ in the Hardy space over the bidisk (in Chinese). Sci Sin Math, 2023, 53: 1743–1750, doi: 10.1360/SSM-2022-0229

之间的同构, 发展出一种新的技术来研究 Bergman 空间上的乘法算子. 通过这个技巧, Sun 和 Zheng^[8] 给出了 Bergman 空间上 Beurling 定理的一个新证明. 到目前为止, 这个技巧在处理某些 Bergman 空间的相关问题时依然十分有效. Izuchi 和 Yang^[3,4] 研究了 N_φ 型商模 $[z - \varphi(w)]^\perp$, 并进一步考察了 φ 是内函数的情形. 最近, Zou 等^[14] 研究了当 θ 和 φ 是内函数时子模 $M_{\theta, \varphi} = [\theta(z) - \varphi(w)]$ 的 Hilbert-Schmidt 性.

本文首先将 N_φ 型商模推广为 $N_{\theta, \varphi}$ 型商模, 其中 θ 为内函数. 然后考虑 φ 也为内函数的情形, 在此情形下计算 $N_{\theta, \varphi}$ 的再生核, 并发现子模 $[\theta - \varphi]$ 的核函数 $G^{[\theta - \varphi]}$ 与子模 $[z - w]$ 的核函数 $G^{[z - w]}$ 仅相差一个复合映射, 即

$$G_{\lambda, \mu}^{[\theta - \varphi]}(z, w) = G_{\theta(\lambda), \varphi(\mu)}^{[z - w]}(\theta(z), \varphi(w)).$$

因此由 Littlewood 从属原理推导出子模 $[\theta - \varphi]$ 是 Hilbert-Schmidt 的. 最后, 通过进一步的细心观察, 发现上述等式对于一般的齐次多项式生成的子模也成立. 由于多项式子模都是 Hilbert-Schmidt 的 (参见文献 [9]), 所以得到本文的主要结果:

定理 1.1 设 $\theta(z)$ 和 $\varphi(w)$ 是两个非常值内函数, $q(z, w)$ 是任意的齐次多项式, 则子模 $[q(\theta, \varphi)]$ 是 Hilbert-Schmidt 的, 且满足

$$\|C_{[q(\theta, \varphi)]}\|_{H.S.}^2 \leq \left(\frac{1 + |\theta(0)|}{1 - |\theta(0)|}\right)^2 \left(\frac{1 + |\varphi(0)|}{1 - |\varphi(0)|}\right)^2 \|C_{[q]}\|_{H.S.}^2.$$

特别地, 如果 $\theta(0) = \varphi(0) = 0$, 则 $\|C_{[q(\theta, \varphi)]}\|_{H.S.}^2 = \|C_{[q]}\|_{H.S.}^2$.

2 预备知识

令 $\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ 表示复平面 $\mathbb{C}$ 上的开单位圆盘, $\mathbb{T}$ 表示单位圆周. 令 $\mathbb{C}[z, w]$ 表示关于变量 z 和 w 的复多项式环, $L^2 = L^2(\mathbb{T}^2)$ 表示关于 $\mathbb{T}^2$ 上的正规化 Lebesgue 测度 $d|z|d|w|$ 平方可积的函数全体构成的 Hilbert 空间. $H^2(\mathbb{D}^2)$ 表示双圆盘 Hardy 空间, 它由 $\mathbb{D}^2$ 上满足

$$\|f\|^2 := \sup_{0 \leq r < 1} \int_{\mathbb{T}^2} |f(rz, rw)|^2 d|z|d|w| < \infty$$

的全体解析函数构成, 其中 z 和 w 是坐标函数. 令 H_z^2 和 H_w^2 分别表示关于变量 z 和 w 的单变量 Hardy 空间, 则 $H^2(\mathbb{D}^2)$ 可以看成 $H_z^2 \otimes H_w^2$.

令 $H^\infty(\mathbb{D}^2)$ 表示 D^2 上有界解析函数全体, 设 $\phi \in H^\infty(\mathbb{D}^2)$, 则以 ϕ 为符号的 Toeplitz 算子 T_ϕ 定义为乘法算子 M_ϕ 在 $H^2(\mathbb{D}^2)$ 上的限制. 设 M 是 $H^2(\mathbb{D}^2)$ 的一个闭子空间, 如果 M 关于 T_z 和 T_w 是不变的, 则称 M 为 $H^2(\mathbb{D}^2)$ 的一个子模. 类似地, 如果闭子空间 N 关于 T_z^* 和 T_w^* 是不变的, 则称 N 为 $H^2(\mathbb{D}^2)$ 的一个商模. 容易看出, 子模与商模在正交补意义下是一一对应的. 对于 $f \in H^2(\mathbb{D}^2)$, 用 $[f]$ 表示由 f 生成的子模, 即 $[f] = \overline{\mathbb{C}[z, w]f}^{\|\cdot\|}$, 用 $[f]^\perp := H^2(\mathbb{D}^2) \ominus [f]$ 表示对应的商模.

定义 2.1 设 M 为 $H^2(\mathbb{D}^2)$ 的一个子模, 令 $K_{\lambda, \mu}(z, w) = \frac{1}{1 - \bar{\lambda}z} \frac{1}{1 - \bar{\mu}w}$ 表示 $H^2(\mathbb{D}^2)$ 的再生核, K^M 表示 M 的再生核, 定义 M 的核函数 G^M 为

$$G_{\lambda, \mu}^M(z, w) = \frac{K_{\lambda, \mu}^M(z, w)}{K_{\lambda, \mu}(z, w)} = (1 - \bar{\lambda}z)(1 - \bar{\mu}w)K_{\lambda, \mu}^M(z, w).$$

与之对应的核算子 C_M 定义为

$$C_M(f)(z, w) = \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} G_{\lambda, \mu}^M(z, w) f(\lambda, \mu) d|\lambda|d|\mu|,$$

其中 $f \in H^2(\mathbb{D}^2)$.

事实上, 核算子 C_M 是 $H^2(\mathbb{D}^2)$ 上的有界线性算子 (参见文献 [13]), 且限制在 M 上满足

$$C_M = I - R_z R_z^* - R_w R_w^* + R_z R_w R_z^* R_w^*,$$

其中 R_z 和 R_w 分别为 T_z 和 T_w 在子模 M 上的限制.

定义 2.2 设 M 为 $H^2(\mathbb{D}^2)$ 的一个子模, 如果其对应的核算子 C_M 是 Hilbert-Schmidt 的, 则称 M 为 Hilbert-Schmidt 子模, 或者称子模 M 是 Hilbert-Schmidt 的.

由经典的积分算子理论易知, C_M 是 Hilbert-Schmidt 的等价于核函数 G^M 属于 $L^2(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2)$, 且满足

$$\|C_M\|_{H.S.}^2 = \int_{\mathbb{T}^2} \int_{\mathbb{T}^2} |G_{\lambda, \mu}^M(z, w)|^2 d\lambda |d\mu| d|z| d|w| = \|G^M\|_{L^2(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2)}^2.$$

本文的证明将用到下述 Littlewood 从属原理 (参见文献 [7]):

引理 2.1 (Littlewood 从属原理) 设 $\omega \in H^\infty(\mathbb{D})$, $\|\omega\|_\infty \leq 1$, ω 非常值, ω 对应的复合算子 C_ω 定义为 $C_\omega f = f \circ \omega$, $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. 那么 C_ω 是 $H^2(\mathbb{D})$ 上的有界线性算子, 且

$$\|C_\omega\| \leq \sqrt{\frac{1 + |\omega(0)|}{1 - |\omega(0)|}},$$

等号成立当且仅当 ω 是内函数. 特别地, 如果 ω 是一个内函数且 $\omega(0) = 0$, 则 C_ω 是一个等距.

3 $N_{\theta, \varphi}$ 型商模

设 $\varphi(w) \in H_w^2$, 对于任意 $g(w) \in H_w^2$, 形式地定义

$$(T_\varphi^* g)(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n,$$

其中

$$a_n = \langle g, \varphi w^n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{\varphi(e^{it})} g(e^{it}) e^{-int} dt.$$

一般而言, $T_\varphi^* g$ 并不属于 H_w^2 , 但当 $T_\varphi^* g \in H_w^2$ 时, 可以定义 $T_\varphi^{*2} g = T_\varphi^*(T_\varphi^* g)$, 如此下去, 当 $T_\varphi^{*n} g \in H_w^2$ 时, 可以定义 $T_\varphi^{*(n+1)} g = T_\varphi^*(T_\varphi^{*n} g)$.

设 $\theta(z) \in H_z^2$ 为任意内函数, 记 $K_\theta := H_z^2 \ominus \theta H_z^2$ 为模型空间, 定义

$$N_{\theta, \varphi} := \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (T_\varphi^{*n} g)(w) \cdot \theta^n f(z) \mid T_\varphi^{*n} g \in H_w^2, f \in K_\theta, \sum_{n=0}^{\infty} \|T_\varphi^{*n} g\|^2 < \infty \right\}.$$

当 $\theta = z$ 时, 这正是 Izuchi 和 Yang^[3] 所定义的 N_φ 型商模. 但仅从定义来看, 并不能看出 $N_{\theta, \varphi}$ 关于 T_z^* 和 T_w^* 是不变的.

定理 3.1 设 $\theta(z)$ 是一个内函数, $\varphi(w) \in H_w^2$, 则有 $N_{\theta, \varphi} = H^2(\mathbb{D}^2) \ominus [\theta - \varphi]$.

证明 由于 $H_z^2 = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \theta^n K_\theta$, 故对于任意 $F \in H^2(\mathbb{D}^2) \ominus [\theta - \varphi]$, 有

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(w) \cdot \theta^n f_n(z), \quad f_n(z) \in K_\theta.$$

注意到 $F \perp w^j \theta^i(z) h(z) (\theta(z) - \varphi(w))$ 对于任意 $h \in K_\theta$ 及 $i, j \geq 0$ 成立, 则有

$$0 = \langle F, w^j \theta^i(z) h(z) (\theta(z) - \varphi(w)) \rangle = \langle g_{i+1} f_{i+1}, w^j h \rangle - \langle g_i f_i, \varphi w^j h \rangle.$$

由于 $g_i f_i \in K_\theta \otimes H_w^2$, 且 $\text{span}\{w^j h \mid j \geq 0, h \in K_\theta\}$ 在 $K_\theta \otimes H_w^2$ 中是稠密的, 所以上式表明

$$f_{i+1} \otimes g_{i+1} = (I \otimes T_\varphi^*)(f_i \otimes g_i), \quad i \geq 0.$$

由此可得 $f_n \otimes g_n = (I \otimes T_\varphi^{*n})(f_0 \otimes g_0)$, 故

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(w) \cdot \theta^n f_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (T_\varphi^{*n} g_0) \cdot \theta^n f_0(z).$$

再由直接计算可得

$$\|F\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|T_\varphi^{*n} g_0\|^2 \cdot \|f_0\|^2 < \infty,$$

因此由定义知 $F \in N_{\theta, \varphi}$. 从而证明了 $H^2(\mathbb{D}^2) \ominus [\theta - \varphi] \subset N_{\theta, \varphi}$.

另外, 设

$$F(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} (T_\varphi^{*n} g)(w) \cdot \theta^n f(z) \in N_{\theta, \varphi},$$

其中, $g \in H_w^2$, $f(z) \in K_\theta$ 且满足 $\sum_{n=0}^{\infty} \|T_\varphi^{*n} g\|^2 < \infty$.

对于任意 $i, j \geq 0$ 及 $h(z) \in K_\theta$, 有

$$\langle F, w^j \theta^i(z) h(z) (\theta(z) - \varphi(w)) \rangle = \langle f, h \rangle (\langle T_\varphi^{*(i+1)} g, w^j \rangle - \langle T_\varphi^{*i} g, \varphi w^j \rangle) = 0.$$

由于 $\text{span}\{w^j \theta^i(z) h(z) (\theta(z) - \varphi(w)) \mid i, j \geq 0, h \in K_\theta\}$ 在 $[\theta - \varphi]$ 中是稠密的, 故 $F \in H^2(\mathbb{D}^2) \ominus [\theta - \varphi]$, 这表明 $N_{\theta, \varphi} \subset H^2(\mathbb{D}^2) \ominus [\theta - \varphi]$. $\square$

一个有趣的情形是, 假设 φ 也为内函数, 在此情形下, $N_{\theta, \varphi}$ 与经典的 Bergman 空间及模型空间有密切的联系. 特别地, 在此情形下 $N_{\theta, \varphi}$ 有一组漂亮的正规正交基 (参见文献 [14]):

引理 3.1 设 $\theta(z)$ 和 $\varphi(w)$ 为两个内函数, $\{a_m(z)\}$ 是 K_θ 的一组正规正交基, $\{b_n(w)\}$ 是 K_φ ($:= H_w^2 \ominus \varphi H_w^2$) 的一组正规正交基, 则

$$\{a_m(z) b_n(w) e_j(\theta(z), \varphi(w)) \mid m, n, j \geq 0\}$$

是 $N_{\theta, \varphi} = [\theta - \varphi]^\perp$ 的一组正规正交基, 其中

$$e_j(z, w) = \frac{1}{\sqrt{j+1}} \cdot \frac{z^{j+1} - w^{j+1}}{z - w} = \frac{\sum_{i=0}^j z^i w^{j-i}}{\sqrt{j+1}}.$$

为了计算 $N_{\theta, \varphi}$ 的再生核, 下面先给出一个简单的引理 (参见文献 [5, 定理 2.4]):

引理 3.2 设 $\mathcal{H}$ 是 X 上的一个再生核 Hilbert 空间, $K_{\mathcal{H}}$ 为其再生核, 如果 $\{e_s : s \in S\}$ 是 $\mathcal{H}$ 的一组正规正交基, 则

$$K_{\mathcal{H}}(x, y) = \sum_{s \in S} \overline{e_s(y)} e_s(x).$$

推论 3.1 $[\theta(z) - \varphi(w)]^\perp$ 的再生核为

$$\frac{1 - \overline{\theta(\lambda)}\theta(z)}{1 - \bar{\lambda}z} \cdot \frac{1 - \overline{\varphi(\mu)}\varphi(w)}{1 - \bar{\mu}w} \cdot R_{\theta(\lambda), \varphi(\mu)}(\theta(z), \varphi(w)),$$

其中

$$R_{\lambda, \mu}(z, w) = \frac{\log \frac{(1 - \bar{\lambda}w)(1 - \bar{\mu}z)}{(1 - \bar{\lambda}z)(1 - \bar{\mu}w)}}{(\bar{\lambda} - \bar{\mu})(z - w)}.$$

证明 注意到

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq 0} \overline{e_j(\lambda, \mu)} e_j(z, w) &= \sum_{j \geq 0} \frac{1}{(\bar{\lambda} - \bar{\mu})(z - w)} \frac{1}{j+1} ((\bar{\lambda}z)^{j+1} + (\bar{\mu}w)^{j+1} - (\bar{\lambda}w)^{j+1} - (\bar{\mu}z)^{j+1}) \\ &= \frac{1}{(\bar{\lambda} - \bar{\mu})(z - w)} \left(\log \frac{1 - \bar{\lambda}w}{1 - \bar{\lambda}z} - \log \frac{1 - \bar{\mu}w}{1 - \bar{\mu}z} \right), \end{aligned}$$

以及模型空间 K_θ 和 K_φ 的再生核分别为 $\frac{1 - \overline{\theta(\lambda)}\theta(z)}{1 - \bar{\lambda}z}$ 和 $\frac{1 - \overline{\varphi(\mu)}\varphi(w)}{1 - \bar{\mu}w}$, 由引理 3.1 和 3.2 直接计算可得结论成立. $\square$

考虑 $\theta = z$ 和 $\varphi = w$ 的情形, 可得 $[z - w]^\perp$ 的再生核 $K_{\lambda, \mu}^{[z-w]^\perp}(z, w)$ 即为 $R_{\lambda, \mu}(z, w)$, 故子模 $[z - w]$ 的再生核为 $K_{\lambda, \mu}(z, w) - R_{\lambda, \mu}(z, w)$, 因此其核函数为

$$G_{\lambda, \mu}^{[z-w]}(z, w) = 1 - (1 - \bar{\lambda}z)(1 - \bar{\mu}w)R_{\lambda, \mu}(z, w).$$

对于一般的内函数 θ 和 φ , 由推论 3.1 可得子模 $[\theta - \varphi]$ 的核函数

$$G_{\lambda, \mu}^{[\theta - \varphi]}(z, w) = 1 - (1 - \overline{\theta(\lambda)}\theta(z))(1 - \overline{\varphi(\mu)}\varphi(w))R_{\theta(\lambda), \varphi(\mu)}(\theta(z), \varphi(w)),$$

即

$$G_{\lambda, \mu}^{[\theta - \varphi]}(z, w) = G_{\theta(\lambda), \varphi(\mu)}^{[z-w]}(\theta(z), \varphi(w)).$$

因此, 由 Littlewood 从属原理可得

$$\|G^{[\theta - \varphi]}\|_{L^2(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2)}^2 \leq \left(\frac{1 + |\theta(0)|}{1 - |\theta(0)|} \right)^2 \left(\frac{1 + |\varphi(0)|}{1 - |\varphi(0)|} \right)^2 \|G^{[z-w]}\|_{L^2(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2)}^2.$$

由文献 [10] 中的一个计算结果可知, 子模 $[z - w]$ 是 Hilbert-Schmidt 的且

$$\|C_{[z-w]}\|_{H.S.}^2 = \frac{\pi^2}{3} - 1,$$

因此有如下定理:

定理 3.2 设 $\theta(z)$ 和 $\varphi(w)$ 为两个非常值内函数, 则子模 $[\theta - \varphi]$ 是 Hilbert-Schmidt 的, 且满足

$$\|C_{[\theta - \varphi]}\|_{H.S.}^2 \leq \left(\frac{1 + |\theta(0)|}{1 - |\theta(0)|} \right)^2 \left(\frac{1 + |\varphi(0)|}{1 - |\varphi(0)|} \right)^2 \left(\frac{\pi^2}{3} - 1 \right).$$

特别地, 如果 $\theta(0) = \varphi(0) = 0$, 则 $\|C_{[\theta - \varphi]}\|_{H.S.}^2 = \frac{\pi^2}{3} - 1$.

4 定理 1.1 的证明

给定一个齐次多项式 $q(z, w)$, 用 $M_q = [q]$ 表示由 q 生成的子模. 令 $\mathcal{P}_k$ 表示 $H^2(\mathbb{D}^2)$ 中所有 k 阶齐次多项式构成的闭子空间, 它由 $\{z^i w^{k-i}\}_{i=0}^k$ 线性张成. 注意到 $H^2(\mathbb{D}^2) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}_k$, 且 q 是齐次的, 不难看出

$$M_q = \bigoplus_{k=0}^{\infty} (\mathcal{P}_k \cap M_q).$$

这表明 M_q 有一组由齐次多项式构成的正规正交基, 不妨设为 $\{q_l\}_{l=0}^{\infty}$.

设 $\theta(z)$ 和 $\varphi(w)$ 为两个内函数, $\{\alpha_m(z)\}$ 是 K_θ 的一组正规正交基, $\{\beta_n(w)\}$ 是 K_φ 的一组正规正交基. 有如下引理:

引理 4.1 $\{\alpha_m(z)\beta_n(w)q_l(\theta(z), \varphi(w)) \mid m, n, l \geq 0\}$ 是 $[q(\theta, \varphi)]$ 的一组正规正交基.

证明 由 $H_z^2 = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \theta^i K_\theta$ 和 $H_w^2 = \bigoplus_{j=0}^{\infty} \varphi^j K_\varphi$ 易得

$$H^2(\mathbb{D}^2) = \bigoplus_{i,j=0}^{\infty} \theta^i \varphi^j (K_\theta \otimes K_\varphi).$$

对于任意多项式 $r(z, w)$ 和 $s(z, w)$, 由上述分解容易得到

$$\langle \alpha_m(z)\beta_n(w)r(\theta, \varphi), \alpha_{m'}(z)\beta_{n'}(w)s(\theta, \varphi) \rangle = \delta_{m,n}^{m',n'} \langle r(z, w), s(z, w) \rangle,$$

其中 $\delta_{m,n}^{m',n'} \neq 0$ 当且仅当 $m = m', n = n', \delta_{m,n}^{m,n} = 1$.

进一步地, 设 $g, h \in K_\theta \otimes K_\varphi$, 不难验证

$$\langle g(z, w)r(\theta, \varphi), h(z, w)s(\theta, \varphi) \rangle = \langle g, h \rangle \langle r(z, w), s(z, w) \rangle.$$

这表明 $\{\alpha_m(z)\beta_n(w)q_l(\theta(z), \varphi(w)) \mid m, n, l \geq 0\}$ 是包含于 M_q 的一个正规正交集, 且其线性闭包为

$$\bigoplus_{l=0}^{\infty} q_l(\theta, \varphi)(K_\theta \otimes K_\varphi).$$

设 $f \in H^2(\mathbb{D}^2)$, 且 f 正交于 $\{\alpha_m(z)\beta_n(w)q_l(\theta(z), \varphi(w)) \mid m, n, l \geq 0\}$, 记

$$f = \sum_{m,n,i,j \geq 0} a_{m,n}^{i,j} \theta^i \varphi^j \alpha_m(z) \beta_n(w) = \sum_{m,n \geq 0} \sum_{k \geq 0} p_k^{m,n}(\theta, \varphi) \alpha_m(z) \beta_n(w),$$

其中 $p_k^{m,n}(z, w) = \sum_{i=0}^k a_{m,n}^{i,k-i} z^i w^{k-i} \in \mathcal{P}_k$, 则

$$0 = \langle f, \alpha_m(z)\beta_n(w)q_l(\theta(z), \varphi(w)) \rangle = \sum_{k \geq 0} \langle p_k^{m,n}, q_l \rangle$$

对于任意 m, n 和 q_l 成立. 由于 q_l 是齐次多项式, 上式右边的求和事实上最多只有一项非零. 特别地, 对于任意给定的 k , 令 q_l 取遍 $M_q \cap \mathcal{P}_k$ 的一组基, 可以推导出 $p_k^{m,n}$ 正交于 $M_q \cap \mathcal{P}_k$, 又由于 $p_k^{m,n} \in \mathcal{P}_k$, 故 $p_k^{m,n} \perp M_q$.

因此, 对于任意 $m, n, i, j \geq 0$, 有

$$\langle f, q(\theta, \varphi) \theta^i \varphi^j \alpha_m(z) \beta_n(w) \rangle = \sum_{k \geq 0} \langle p_k^{m,n}, q z^i w^j \rangle = 0.$$

因为 $\{\theta^i \varphi^j \alpha_m(z) \beta_n(w), m, n, i, j \geq 0\}$ 是 $H^2(\mathbb{D}^2)$ 的一组正规正交基, 故 $f \perp [q(\theta, \varphi)]$.

上述讨论表明 $[q(\theta, \varphi)]$ 包含于 $\{\alpha_m(z) \beta_n(w) q_l(\theta(z), \varphi(w)) m, n, l \geq 0\}$ 的线性闭包中, 即

$$[q(\theta, \varphi)] = \bigoplus_{l=0}^{\infty} q_l(\theta, \varphi)(K_\theta \otimes K_\varphi),$$

其中 q_l 是 M_q 的一组由齐次多项式构成的正规正交基. □

由引理 4.1 和 3.2, 直接计算可得

$$K_{\lambda, \mu}^{[q(\theta, \varphi)]}(z, w) = \frac{1 - \overline{\theta(\lambda)}\theta(z)}{1 - \overline{\lambda}z} \cdot \frac{1 - \overline{\varphi(\mu)}\varphi(w)}{1 - \overline{\mu}w} \cdot K_{\theta(\lambda), \varphi(\mu)}^{[q]}(\theta(z), \varphi(w)),$$

故有如下推论:

推论 4.1 对于任意齐次多项式 q , $[q(\theta, \varphi)]$ 和 $[q]$ 的核函数满足

$$G_{\lambda, \mu}^{[q(\theta, \varphi)]}(z, w) = G_{\theta(\lambda), \varphi(\mu)}^{[q]}(\theta(z), \varphi(w)).$$

又由于核函数 $G_{\lambda, \mu}^M(z, w)$ 是共轭对称的, 且关于变量 z 和 w 是解析的, 所以有

$$\begin{aligned} \|G_{\lambda, \mu}^{[q(\theta, \varphi)]}(z, w)\|_{L^2(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2)}^2 &= \|G_{\theta(\lambda), \varphi(\mu)}^{[q]}(\theta(z), \varphi(w))\|_{L^2(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2)}^2 \\ &\leq \|C_\theta\|^2 \|C_\varphi\|^2 \|G_{\theta(\lambda), \varphi(\mu)}^{[q]}(z, w)\|_{L^2(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2)}^2 \\ &= \|C_\theta\|^2 \|C_\varphi\|^2 \|G_{z, w}^{[q]}(\theta(\lambda), \varphi(\mu))\|_{L^2(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2)}^2 \\ &\leq \|C_\theta\|^4 \|C_\varphi\|^4 \|G_{\lambda, \mu}^{[q]}(z, w)\|_{L^2(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2)}^2, \end{aligned}$$

其中 C_θ 和 C_φ 分别为以 θ 和 φ 为符号的复合算子.

最后, 结合 Littlewood 从属原理以及多项式生成的子模总是 Hilbert-Schmidt 的这一事实, 本文的主要定理得证.

参考文献

- 1 Bercovici H, Foias C, Kérchy L, et al. Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space (revised and enlarged edition). Universitext. New York: Springer, 2010
- 2 Guo K, Sun S, Zheng D, et al. Multiplication operators on the Bergman space via the Hardy space of the bidisk. J Reine Angew Math, 2009, 628: 129–168
- 3 Izuchi K, Yang R. Strictly contractive compression on backward shift invariant subspaces over the torus. Acta Sci Math (Szeged), 2004, 70: 147–165
- 4 Izuchi K, Yang Y. N_ϕ -type quotient modules on the torus. New York J Math, 2008, 14: 431–457
- 5 Paulsen V I, Raghupathi M. An Introduction to the Theory of Reproducing Kernel Hilbert Spaces. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 152. Cambridge: Cambridge University Press, 2016
- 6 Rudin W. Function Theory in Polydiscs. New York: Benjamin, 1969
- 7 Shapiro J H. What do composition operators know about inner functions? Monatsh Math, 2000, 130: 57–70
- 8 Sun S H, Zheng D C. Beurling type theorem on the Bergman space via the Hardy space of the bidisk. Sci China Ser A, 2009, 52: 2517–2529
- 9 Yang R. Hardy modules. PhD Thesis. Stony Brook: State University of New York at Stony Brook, 1998
- 10 Yang R. Operator theory in the Hardy space over the bidisk, III. J Funct Anal, 2001, 186: 521–545
- 11 Yang R. Operator theory in the Hardy space over the bidisk (II). Integral Equations Operator Theory, 2002, 42: 99–124
- 12 Yang R. A brief survey of operator theory in $H^2(\mathbb{D}^2)$. In: Handbook of Analytic Operator Theory. CRC Press/Chapman and Hall Handbooks in Mathematics Series. Boca Raton: CRC Press, 2019, 223–258
- 13 Yang R, Guo K. The core function of submodules over the bidisk. Indiana Univ Math J, 2004, 53: 205–222

- 14 Zou H, Yu T, Yang Y. The core operator and the compressed multipliers on $M_{\phi, \varphi}$ -type submodules. Banach J Math Anal, 2022, 16: 26

Hilbert-Schmidtness of submodule $[q(\theta, \varphi)]$ in the Hardy space over the bidisk

Yufeng Lu, Chao Zu & Yixin Yang

Abstract A closed subspace M of the Hardy space $H^2(\mathbb{D}^2)$ over the bidisk is called a submodule if it is invariant under multiplication by coordinate functions z and w . Whether every finitely generated submodule is Hilbert-Schmidt is an unsolved open problem. In this paper, we prove that the submodule generated by $q(\theta(z), \varphi(w))$ is Hilbert-Schmidt, where q is a homogeneous polynomial and θ and φ are two inner functions.

Keywords Hardy space over the bidisk, Hilbert-Schmidt submodule, core function

MSC(2020) 47A13, 46E20

doi: 10.1360/SSM-2022-0229