



非线性数量场方程基态能量的整体性态

吴元泽^{1*}, 王志强²

1. 中国矿业大学数学学院, 徐州 221116;

2. Department of Mathematics and Statistics, Utah State University, Logan, UT 84322, USA

E-mail: wuyz850306@cumt.edu.cn, zhi-qiang.wang@usu.edu

收稿日期: 2022-03-03; 接受日期: 2022-05-27; 网络出版日期: 2022-08-18; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11701554, 11771319, 11971339 和 11831009) 资助项目

摘要 本文研究 p -Laplace 型的非线性数量场方程并给出其基态能量整体性态的完整刻画. 具体而言, 令 $\mathcal{E}_{\lambda,q}(u) = \frac{1}{p}(\|\nabla u\|_p^p + \lambda\|u\|_p^p) - \frac{1}{q}\|u\|_q^q$ 为 $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 中的能量泛函, 其中, $\lambda > 0$, $1 < p < N$, $p < q < p^* := \frac{pN}{N-p}$, p^* 是 Sobolev 临界指数. 众所周知, $\mathcal{E}_{\lambda,q}(u)$ 有唯一的径向对称的山路解 $U_{\lambda,q}$. $U_{\lambda,q}$ 也是 $\mathcal{E}_{\lambda,q}(u)$ 对应方程的基态解, 其能量 $m(\lambda, q)$ 被称为基态能量. 本文证明, 存在一个定义在 $[p, p^*]$ 上的严格单调递减函数 $\lambda_0(q)$ 满足 $\lambda_0(p) = 1$ 且 $\lambda_0(p^*) = 0$, 使得当 $\lambda \in (0, \lambda_0(q))$ 固定时, $m(\lambda, r)$ 作为 r 的函数在 (p, q) 内严格单调递增; 当 $\lambda \in (\lambda_0(q), 1)$ 固定时, $m(\lambda, r)$ 作为 r 的函数在 (q, p^*) 内严格单调递增; 当 $\lambda \in [1, +\infty)$ 固定时, $m(\lambda, r)$ 作为 r 的函数在 (p, p^*) 内严格单调递减. 通过进一步建立幂次型数量场方程与对数型数量场方程的联系, 本文给出 $\lambda_0(q)$ 在 $q \rightarrow p$ 和 $q \rightarrow p^*$ 时的精确渐近行为.

关键词 数量场方程 基态能量 整体性态**MSC (2020) 主题分类** 35J20, 35B25, 35B38, 35B40

1 引言

对于任意 $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, 令

$$\mathcal{E}_{\lambda,q}(u) = \frac{1}{p}(\|\nabla u\|_p^p + \lambda\|u\|_p^p) - \frac{1}{q}\|u\|_q^q,$$

其中, $\lambda > 0$, $1 < p < N$, $p < q < p^*$, $p^* = \frac{pN}{N-p}$ 是 Sobolev 临界指数, $\|\cdot\|_r$ 是 Lebesgue 空间 $L^r(\mathbb{R}^N)$ 中通常的范数. 众所周知 (参见文献 [1, 3, 12, 22]), 泛函 $\mathcal{E}_{\lambda,q}(u)$ 在 $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 中存在一个山路型的临界点 $U_{\lambda,q}$. 该临界点同时也是一个基态, 即

$$\mathcal{E}_{\lambda,q}(U_{\lambda,q}) = \inf\{\mathcal{E}_{\lambda,q}(v) \mid \mathcal{E}'_{\lambda,q}(v) = 0, v \neq 0\}.$$

英文引用格式: Wu Y Z, Wang Z-Q. Global behavior of the ground state energy of the nonlinear scalar field equation (in Chinese). Sci Sin Math, 2023, 53: 25–40, doi: 10.1360/SSM-2022-0034

同时, $U_{\lambda,q}$ 与从 $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 到 $L^q(\mathbb{R}^N)$ 中的 Sobolev 嵌入的达到函数之间只相差一个 Lagrange 乘子, 其中从 $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 到 $L^q(\mathbb{R}^N)$ 中的 Sobolev 嵌入可由如下极小化问题描述:

$$\inf_{u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}} \{ \|\nabla u\|_p^p + \lambda \|u\|_p^p \mid \|u\|_q^q = 1 \}.$$

根据文献 [8, 13, 21, 26] 可知, 在平移不变的意义下, $U_{\lambda,q}$ 是正的、径向对称的且关于 $r = |x|$ 是严格递减的. 特别地, 由 Kwong^[16]、Serrin 和 Tang^[21] 的结果可知, $U_{\lambda,q}$ 是如下 p -Laplace 型数量场方程 C^1 意义下的唯一的弱解:

$$-\Delta_p u + \lambda |u|^{p-2} u = |u|^{q-2} u, \quad u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \quad (1.1)$$

其中 $\Delta_p = \operatorname{div}(|\nabla \cdot|^{p-2} \nabla \cdot)$ 是 p -Laplace 算子.

定义基态能量如下:

$$\mathbf{m}(\lambda, q) = \mathcal{E}_{\lambda,q}(U_{\lambda,q}). \quad (1.2)$$

通过一个简单的变换

$$U_{\lambda,q}(x) = \lambda^{\frac{1}{q-p}} U_{1,q}(\lambda^{\frac{1}{p}} x), \quad (1.3)$$

可以得到

$$\mathbf{m}(\lambda, q) = \lambda^{\frac{q}{q-p} - \frac{N}{p}} \mathbf{m}(1, q). \quad (1.4)$$

因此, 对于固定的 $q \in (p, p^*)$, $\mathbf{m}(\lambda, q)$ 作为 λ 的函数在 $(0, +\infty)$ 上是递增的.

受到已有文献中许多工作的启发, 本文主要研究 $\mathbf{m}(\lambda, q)$ 作为非线性幂次 q 的函数的整体性态. 事实上, 由于 (1.1) 是许多重要的复杂物理和几何问题的最简表达形式, 因此在过去的 40 年中, (1.1) 基态解的存在性理论与数量性质受到了广泛关注. 尤其是诸如基态能量的行为、基态解的唯一性和基态解的非退化性等性质已经被广泛地应用于非线性 Schödinegr 方程多峰解和集中型半经典解的构造等其他问题的研究, 参见文献 [4, 10, 18, 20] 等. 而 $\mathbf{m}(\lambda, q)$ 作为非线性幂次 q 的函数的整体性态则在研究如下变指数方程半经典解的集中性时发挥了不可替代的作用:

$$-\epsilon^2 \Delta u + \lambda u = |u|^{q(x)-2} u, \quad u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N), \quad (1.5)$$

其中 $q(x)$ 是满足 $2 < q(x) < 2^*$ 的连续函数. 文献 [15] 利用 $\mathbf{m}(\lambda, q)$ 作为非线性幂次 q 的函数的部分性态证明了, 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, (1.5) 的基态解的集中点既可以是 $q(x)$ 的极小值点也可以是 $q(x)$ 的极大值点. 而集中点的具体位置全部由 $\mathbf{m}(\lambda, q)$ 在固定 λ 后作为非线性幂次 q 的函数复杂的性态决定. 因此, (1.5) 的半经典解的深入研究完全依赖于 $\mathbf{m}(\lambda, q)$ 全局行为的研究和完整刻画. 另一方面, 在 Brezis 和 Peletier^[2] 的经典工作以及 Gazzola 和 Serrin^[12]、Gazzola 等^[11]、Ferrero 和 Gazzola^[9] 等的系列工作中, (1.1) 的基态解在 $\lambda \rightarrow 0$ 和 $q \rightarrow p^*$ 时的数量性质得到了很深入的研究. 这些性质给出了基态能量在 λ 和 q 靠近其定义域边界时的准确描述与刻画. 因此, 通过本文的研究, 我们希望可以给出基态能量 $\mathbf{m}(\lambda, q)$ 在其自然定义域中的整体性态, 从而形成对上述文献十分有效的补充. 同时也会在本文中研究已知文献中还未曾涉及的一个内容, 即基态解在 $q \rightarrow p$ 时的精确渐近行为. 本文将证明在恰当的变换后, 基态解会收敛于对数 Sobolev 不等式的达到函数. 这部分内容则可以弥补上述文献中的研究空白.

据我们所知, 除了文献 [15] 以外, 很少有文献涉及基态能量 $m(\lambda, q)$ 作为 q 的函数的整体性态的研究. 而文献 [15] 在半线性的情形下, 即 $p = 2$ 的情形下, 得到了基态能量 $m(\lambda, q)$ 作为 q 的函数的部分整体性态. 具体而言, 文献 [15] 证明了如下结论: 令

$$\lambda_1(q) = (U_{1,q}(0))^{2-q}, \quad \lambda_2(q) = e^{\frac{q-2}{q}} \frac{2N - (N-2)q}{2q},$$

则当 $\lambda \in (0, \lambda_1(q))$ 固定时, $m(\lambda, r)$ 作为 r 的函数在 $(2, q)$ 上严格递增; 当 $\lambda \in (\lambda_2(q), 1)$ 固定时, $m(\lambda, r)$ 作为 r 的函数在 $(q, 2^*)$ 上严格递减; 当 $\lambda \in (1, +\infty)$ 固定时, $m(\lambda, r)$ 作为 r 的函数在 $(2, 2^*)$ 上严格递减. 但当 λ 位于 $\lambda_1(q)$ 和 $\lambda_2(q)$ 这两条曲线中间时, 基态能量 $m(\lambda, q)$ 的性质还一无所知.

本文的目的是给出基态能量 $m(\lambda, q)$ 作为 q 的函数在其自然定义域中整体性态的一个完整的刻画. 粗略地讲, 本文将证明, 存在一个定义在 $[p, p^*]$ 上函数 $\lambda_0(q)$, 使得当 $\lambda \in (0, \lambda_0(q))$ 固定时, $m(\lambda, r)$ 作为 r 的函数在 (p, q) 内严格单调递增; 当 $\lambda \in (\lambda_0(q), 1)$ 固定时, $m(\lambda, r)$ 作为 r 的函数在 (q, p^*) 内严格单调递减; 当 $\lambda \in [1, +\infty)$ 固定时, $m(\lambda, r)$ 作为 r 的函数在 (p, p^*) 内严格单调递减. 因此, 即使是在半线性的情形下, 本文得到的结果也比文献 [15] 中的结果要更好.

本文的主要结论具体如下.

定理 1.1 设 $m(\lambda, q)$ 由 (1.2) 给出. 令

$$\ln \lambda_0(q) = \frac{q-p}{q} - \frac{(q-p) \int_{\mathbb{R}^N} U_{1,q}^q \ln U_{1,q} dx}{\int_{\mathbb{R}^N} U_{1,q}^q dx}. \quad (1.6)$$

则

- (1) 当 $\lambda \in (0, \lambda_0(q))$ 固定时, $m(\lambda, r)$ 作为 r 的函数在 (p, q) 内严格单调递增;
- (2) 当 $\lambda \in (\lambda_0(q), 1)$ 固定时, $m(\lambda, r)$ 作为 r 的函数在 (q, p^*) 内严格单调递减;
- (3) 当 $\lambda \in [1, +\infty)$ 固定时, $m(\lambda, r)$ 作为 r 的函数在 (p, p^*) 内严格单调递减.

注 1.1 (1) 定理 1.1 给出了基态能量 $m(\lambda, q)$ 作为 q 的函数整体单调性的完整刻画. 即使是在半线性的情形下, 定理 1.1 也优于文献 [15] 中得到的部分单调性结果. 定理 1.1 也进一步揭示了基态能量 $m(\lambda, q)$ 作为 q 的函数时, 在曲线 $\lambda_1(q)$ 和 $\lambda_2(q)$ 两侧具有完全不同单调性的原因. 事实上, 由定理 1.1 可知, 存在唯一的一条曲线 $\lambda_0(q)$, 基态能量 $m(\lambda, q)$ 作为 q 的函数在这条曲线的两侧有着截然相反的单调性.

(2) 在证明定理 1.1 时, 特别是在讨论 $\lambda < 1$ 的情形时, 将采用一个全新的论证方法来优化原先在文献 [15] 中使用的论证方法. 这个新的论证方法依赖于基态解 $U_{1,q}$ 的 L^q 范数作为 q 的函数的完整单调性刻画. 此外, 众所周知, 山路能量等于 Nehari 流形上的极小能量. 这一能量性质被文献 [15] 用来证明基态能量 $m(\lambda, q)$ 作为 q 的函数时的部分单调性. 本文为了得到更优的估计, 将证明 Pohozaev 流形上的极小能量同样等于山路能量. 尽管这一性质对非线性分析领域的专家来说是熟知的, 但没有在文献中找到这个结论及其证明, 故将在本文中给出这一结论的证明.

由于 $\lambda_0(q)$ 有一个精确的表达式 (1.6), 因此一个自然的问题是研究其在 $q \rightarrow p$ 和 $q \rightarrow p^*$ 时的渐近行为. 而此项研究需要对基态解 $U_{1,q}$ 在 $q \rightarrow p$ 和 $q \rightarrow p^*$ 时的渐近行为有很好的认识. 在经典的文献 [9, 11, 12] 中, 基态解 $U_{1,q}$ 在 $q \rightarrow p^*$ 时的渐近行为已经有较为完整的刻画. 因此, $\lambda_0(q)$ 在 $q \rightarrow p^*$ 时的渐近行为可以通过直接在 (1.6) 中应用文献 [9, 11, 12] 中的结论得到. 然而, 当 $q \rightarrow p$ 时, 基态解 $U_{1,q}$ 的渐近行为只有在 $p = 2$ 时 (参见文献 [25]) 有所讨论和研究. 具体而言, 文献 [25] 证明了在 $p = 2$ 的情形下, 当 $q \rightarrow 2$ 时, 对于任意 $\alpha \in (0, 1)$, $U_{1,q}$ 在 $H^1(\mathbb{R}^N) \cap C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ 中强收敛于 $W = e^{\frac{N}{2}} e^{-\frac{1}{4}|x|^2}$,

其中 W 是如下对数 Schrödinger 方程的唯一正解:

$$\begin{cases} -\Delta u = u \ln u, & x \in \mathbb{R}^N, \\ u(x) \rightarrow 0, & |x| \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (1.7)$$

通过在 (1.6) 中应用上述结论, 不难在半线性情形 $p = 2$ 下获得 $\lambda_0(q)$ 在 $q \rightarrow 2$ 时的渐近行为. 因此, 想要得到一般情形 $1 < p < N$ 下 $\lambda_0(q)$ 在 $q \rightarrow p$ 时的渐近行为, 需要一个类似的结论. 然而, 文献 [25] 中的论证方法强烈依赖于在文献 [5, 24] 中证明的方程 (1.7) 的唯一性结果, 但据我们所知, 类似的唯一性结果对 p -Laplace 型对数 Schrödinger 方程来说是未知的. 因此, 为了得到在一般情形 $1 < p < N$ 下 $U_{1,q}$ 在 $q \rightarrow p$ 时的渐近行为, 考虑如下形式的对数 Sobolev 不等式:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \ln |u| dx \leq \frac{N}{p^2} \ln \left[\mathcal{L}_p \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx \right], \quad (1.8)$$

其中, $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 满足 $\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx = 1$, $\mathcal{L}_p > 0$ 为由文献 [7, 定理 1.1] 给定的常数. 由文献 [7, 定理 1.1] 可知, (1.8) 的全体达到函数为

$$\Psi_\sigma(x) = \mathcal{D}_p \sigma^{-\frac{N(p-1)}{p^2}} e^{-\frac{1}{\sigma}|x|^{\frac{p}{p-1}}}, \quad (1.9)$$

其中, $\mathcal{D}_p > 0$ 是一个常数, $\sigma > 0$ 是参数. 因此, 结合 $U_{1,q}$ 的能量极小性质以及不等式 (1.8), 可以得到在一般情形 $1 < p < N$ 下 $U_{1,q}$ 在 $q \rightarrow p$ 时的渐近行为. 我们认为, 在一般情形 $1 < p < N$ 下 $U_{1,q}$ 在 $q \rightarrow p$ 时的精确渐近行为本身也是一个十分有意义的结果. 具体结论如下.

定理 1.2 令 $1 < p < N$ 且 $V_{1,q}(x) = U_{1,q}(\frac{x}{(q-p)^{\frac{1}{p}}})$. 则当 $q \rightarrow p$ 时, $V_{1,q}$ 在 $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 中强收敛于 $V_p(x)$, 其中 V_p 是如下 p -Laplace 型对数 Schrödinger 方程的一个正解:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = |u|^{p-2} u \ln u, & x \in \mathbb{R}^N, \\ u(x) \rightarrow 0, & |x| \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (1.10)$$

进一步地, $\|V_p\|_p^p = (e \mathcal{L}_p^{-1} \frac{N}{p^2})^{\frac{N}{p}}$ 且存在 $\sigma > 0$ 使得 $\frac{V_p}{\|V_p\|_p} = \Psi_\sigma(x)$.

注 1.2 定理 1.2 将文献 [25] 中的结论从半线性情形 $p = 2$ 推广至一般情形 $1 < p < N$. 但在证明定理 1.2 时, 将使用与文献 [25] 不同的方法. 本文的方法不再依赖于方程 (1.10) 的唯一性结果. 此外, 由于 Ψ_σ 是对数 Sobolev 不等式 (1.8) 全部的达到函数, 因此很容易验证 V_p 是 $\{\Psi_\sigma\}_{\sigma>0}$ 中唯一一个满足 p -Laplace 型对数 Schrödinger 方程 (1.10) 的函数.

本文关于 $\lambda_0(p)$ 性质的结论如下.

定理 1.3 设 $\lambda_0(q)$ 由 (1.6) 给出. 则 $\lambda_0(q)$ 在 (p, p^*) 内严格单调递减. 进一步地, 有如下结论:

(1) 我们有

$$\lim_{q \rightarrow p} \frac{\ln \lambda_0(q)}{q - p} = \frac{1}{p} - \frac{\int_{\mathbb{R}^N} V_p^p \ln V_p dx}{\int_{\mathbb{R}^N} V_p^p dx},$$

其中 V_p 是 p -Laplace 型对数 Schrödinger 方程 (1.10) 的满足 $\|V_p\|_p^p = (e \mathcal{L}_p^{-1} \frac{N}{p^2})^{\frac{N}{p}}$ 的一个正解.

(2) 设 $a_{N,p}$ 是由文献 [11, 定理 3] 给出的常数且 $\mathcal{W}$ 是满足 $\max_{x \in \mathbb{R}^N} \mathcal{W}(x) = \mathcal{W}(0)$ 的 p -Laplace 型 Aubin-Talanti 泡泡解, 则

(a) 当 $N > p^2$ 时,

$$\lim_{q \rightarrow p^*} \ln \left(\frac{\lambda_0(q)}{a_{N,p}(p^* - q)} \right) = \frac{p}{N} - \frac{p^2 \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{W}^{p^*} \ln \mathcal{W} dx}{(N-p) \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{W}^{p^*} dx};$$

(b) 当 $N = p^2$ 时,

$$\lim_{q \rightarrow p^*} \ln \left(\frac{\lambda_0(q) |\ln(p^* - q)|}{a_{N,p}(p^* - q)} \right) = \frac{p}{N} - \frac{p^2 \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{W}^{p^*} \ln \mathcal{W} dx}{(N-p) \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{W}^{p^*} dx};$$

(c) 当 $N < p^2$ 时,

$$\lim_{q \rightarrow p^*} \ln \left(\frac{\lambda_0(q)}{a_{N,p}(p^* - q)^{\frac{p^2-p}{N-p}}} \right) = \frac{p}{N} - \frac{p^2 \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{W}^{p^*} \ln \mathcal{W} dx}{(N-p) \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{W}^{p^*} dx}.$$

记号 C 和 C' 表示绝对常数. $a \sim b$ 表示 $C'b \leq a \leq Cb$, $a \lesssim b$ 表示 $a \leq Cb$.

2 $\mathbf{m}(\lambda, q)$ 作为 q 函数的整体性态

令

$$\mathcal{N}_{\lambda,q} = \{u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} \mid \mathcal{E}'_{\lambda,q}(u)u = 0\}, \quad (2.1)$$

则 $\mathcal{N}_{\lambda,q}$ 是泛函 $\mathcal{E}_{\lambda,q}(u)$ 的 Nehari 流形. 众所周知, 基态解 $U_{\lambda,q}$ 是泛函 $\mathcal{E}_{\lambda,q}(u)$ 在 Nehari 流形 $\mathcal{N}_{\lambda,q}$ 上的极小元, 即 $\mathcal{E}_{\lambda,q}(U_{\lambda,q}) = \inf_{\mathcal{N}_{\lambda,q}} \mathcal{E}_{\lambda,q}(u)$. 基态能量 $\mathbf{m}(\lambda, q)$ 还有如下的变分表达式:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(\lambda, q) &= \inf_{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}} \frac{(q-2)(\|\nabla u\|_2^2 + \lambda \|u\|_2^2)^{\frac{q}{q-2}}}{2q \|u\|_q^{\frac{2q}{q-2}}} \\ &= \frac{(q-2)(\|\nabla U_{\lambda,q}\|_2^2 + \lambda \|U_{\lambda,q}\|_2^2)^{\frac{q}{q-2}}}{2q \|U_{\lambda,q}\|_q^{\frac{2q}{q-2}}}. \end{aligned}$$

令

$$\mathcal{P}_{\lambda,q} = \left\{ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} \mid \|\nabla u\|_p^p = \frac{pN}{q(N-p)} \|u\|_q^q - \frac{pN}{p(N-p)} \lambda \|u\|_p^p \right\}.$$

则 $\mathcal{P}_{\lambda,q}$ 是泛函 $\mathcal{E}_{\lambda,q}(u)$ 的 Pohozaev 流形且有如下的结论.

命题 2.1 设 $1 < p < N$, $\lambda > 0$ 且 $p < q < p^*$. 则 $U_{\lambda,q}$ 是泛函 $\mathcal{E}_{\lambda,q}(u)$ 在 Pohozaev 流形 $\mathcal{P}_{\lambda,q}$ 上的极小元, 即

$$\mathbf{m}(\lambda, q) = \inf_{u \in \mathcal{P}_{\lambda,q}} \mathcal{E}_{\lambda,q}(u). \quad (2.2)$$

正如在引言中指出的那样, 我们认为这个结论是已知的, 但遗憾的是, 我们没有在文献中找到这个结论及其证明. 因此, 为了方便读者, 附录中将给出这个结论的证明. 根据命题 2.1 可知, $U_{\lambda,q}$ 是泛函 $\mathcal{E}_{\lambda,q}(u)$ 在 Pohozaev 流形 $\mathcal{P}_{\lambda,q}$ 上的极小元. 因此, 一个自然的想法是, 通过 Pohozaev 流形 $\mathcal{P}_{\lambda,q}$ 来比较基态能量 $\mathbf{m}(\lambda, q)$ 作为 q 函数的值的大小. 为此, 需要如下的结论.

引理 2.1 设 $1 < p < N$, $\lambda > 0$ 且 $p < q < p^*$. 则 $U_{\lambda,q}$ 作为 q 的函数是从 (p, p^*) 到 $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 上的连续函数.

证明 因为 $U_{\lambda,q}$ 是径向的和正的, 故由 Serrin 和 Tang^[21] 证明的唯一性结果可知, $U_{\lambda,q}$ 同时也是 p -Laplace 方程 (1.1) 唯一的正的径向对称解. 于是, 利用标准的论证方法可得, 当 $r \rightarrow q$ 时, 在子列的意义下, $U_{\lambda,r}$ 在 $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap L^q_{\text{rad}}(\mathbb{R}^N)$ 中强收敛到 $U_{\lambda,q}$. 故由 $U_{\lambda,q}$ 的唯一性和归结原则可知, $U_{\lambda,q}$ 作为 q 的函数是从 (p, p^*) 到 $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 上的连续函数. $\square$

有了上述两个结论, 下面证明定理 1.1. 但在此之前, 我们强调在证明 $\lambda \geq 1$ 的结论时将直接采用文献 [15] 中用来研究半线性情形 $p = 2$ 时所采用的论证方法. 而在证明 $0 < \lambda < 1$ 时, 由于 $\mathbf{m}(\lambda, q)$ 的性态较为复杂, 因此将应用一个全新的论证方法. 这个新的论证方法基于对 $\frac{1}{r}\|U_{\lambda,q}\|_r^r$ 作为 r 的函数的整体性态的完整刻画, 其中 q 是固定的.

定理 1.1 的证明 首先证明结论 (1) 和 (2). 任取 $q \in (p, p^*)$ 并考虑如下的函数:

$$f(r) = \frac{1}{r} \|U_{\lambda,q}\|_r^r.$$

显然 $f(q) = \frac{1}{q} \|U_{\lambda,q}\|_q^q$. 为了证明结论 (1) 和 (2), 将分析函数 $f(r)$ 的整体性态. 设 $\lambda_0(q)$ 由 (1.6) 给出, 则有如下的断言:

- (i) 假若 $0 < \lambda < \lambda_0(q)$, 则对于任意 $r \in (p, q)$, 恒有 $f(q) < f(r)$;
- (ii) 假若 $\lambda_0(q) < \lambda$, 则对于任意 $r \in (q, p^*)$, 恒有 $f(q) < f(r)$.

事实上, 因为 $U_{\lambda,q}$ 径向对称, 故由经典的 p -Laplace 方程的椭圆正则性理论^[8] 知, $U_{\lambda,q} \in C^1(\mathbb{R}^N)$. 因此, 由 Taylor 公式可得

$$\frac{U_{1,q}^\tau - 1}{\tau} = \ln U_{1,q} + U_{1,q}^{\theta\tau} (\ln U_{1,q})^2 \frac{\tau}{2},$$

其中 $\theta \in (0, 1)$. 因此, 由 (A.1) 和 $r > p$ 可知, $U_{1,q}^r \frac{U_{1,q}^\tau - 1}{\tau} \lesssim U_{1,q}^p$. 故由 Lebesgue 控制收敛定理可知, 对于任意 $r \in (p, p^*)$, $f'(r)$ 都存在. 于是, 通过直接计算可得

$$f'(r) = -\frac{1}{r^2} \|U_{\lambda,q}\|_r^r + \frac{1}{r} \int_{\mathbb{R}^N} U_{\lambda,q}^r \ln U_{\lambda,q} dx. \quad (2.3)$$

类似地, 由 (2.3) 和 Lebesgue 控制收敛定理可知, 对于任意 $r \in (p, p^*)$, $f''(r)$ 也都存在. 于是, 直接计算可得

$$\begin{aligned} f''(r) &= \frac{2}{r^3} \|U_{\lambda,q}\|_r^r - \frac{2}{r^2} \int_{\mathbb{R}^N} U_{\lambda,q}^r \ln U_{\lambda,q} dx + \frac{1}{r} \int_{\mathbb{R}^N} U_{\lambda,q}^r (\ln U_{\lambda,q})^2 dx \\ &= -\frac{2}{r} f'(r) + \frac{1}{r} \int_{\mathbb{R}^N} U_{\lambda,q}^r (\ln U_{\lambda,q})^2 dx. \end{aligned}$$

故在集合 $\{r \in (p, p^*) \mid f'(r) \leq 0\}$ 上, $f'(r)$ 是严格单调递增的. 因此, 由变换 (1.3) 可知,

$$\begin{aligned} f'(q) &= -\frac{\lambda^{\frac{q}{q-p}-\frac{N}{p}}}{q^2} \int_{\mathbb{R}^N} U_{1,q}^q dx + \frac{\lambda^{\frac{q}{q-p}-\frac{N}{p}} \ln \lambda}{q(q-p)} \int_{\mathbb{R}^N} U_{1,q}^q dx + \frac{\lambda^{\frac{q}{q-p}-\frac{N}{p}}}{q} \int_{\mathbb{R}^N} U_{1,q}^q \ln U_{1,q} dx \\ &= \lambda^{\frac{q}{q-p}-\frac{N}{p}} \left(-\frac{1}{q^2} \int_{\mathbb{R}^N} U_{1,q}^q dx + \frac{\ln \lambda}{q(q-p)} \int_{\mathbb{R}^N} U_{1,q}^q dx + \frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} U_{1,q}^q \ln U_{1,q} dx \right). \end{aligned}$$

于是, 当 $0 < \lambda < \lambda_0(q)$ 时, $f'(q) < 0$, 其中 $\lambda_0(q)$ 由 (1.6) 给出. 故当 $0 < \lambda < \lambda_0(p)$ 时, 对于任意 $r \in (p, q)$, 恒有 $f'(r) \leq 0$. 事实上, 假设存在 $r' \in (p, q)$, 使得 $f'(r') > 0$. 则由引理 2.1 可知,

$r_* = \inf\{r < q \mid f'(r) \leq 0\} \in (p, q)$ 是良定义的. 由引理 2.1 可知, $f'(r)$ 在 (p, p^*) 内是连续的. 因此, 由 r_* 的定义和 $f'(r)$ 的连续性可知, $f'(r_*) = 0$. 故 $f''(r_*) > 0$. 而这与 r_* 的定义矛盾. 因此, 当 $0 < \lambda < \lambda_0(p)$ 时, 对于任意 $r \in (p, q)$, 恒有 $f'(r) \leq 0$. 结合在集合 $\{r \in (p, p^*) \mid f'(r) \leq 0\}$ 上 $f'(r)$ 是严格单调递增可知, 断言 (i) 是成立的.

接着来证明断言 (ii). 与上面断言 (i) 的证明类似, 由 (2.3) 和 $\lambda_0(q)$ 的定义 (参见 (1.6)) 可知, 当 $\lambda > \lambda_0(q)$ 时, $f'(q) > 0$. 因此, 当 $r > q$ 并且非常接近 q 时, 恒有 $f(r) > f(q)$. 这蕴涵了 $r_0 = \sup\{r > q \mid f(r) \geq f(q)\}$ 是良定义的. 显然, 假若 $r_0 = p^*$, 则断言 (ii) 成立. 假设 $r_0 < p^*$, 则由 $f'(r)$ 的连续性可知, 必有 $f(r_0) = f(q)$. 这蕴涵了 $f'(r_0) \leq 0$. 故 $f''(r_0) > 0$. 假若 $f'(r_0) = 0$, 则由 Taylor 公式可知, 当 $r > r_0$ 且充分靠近 r_0 时, 存在 $\eta \in (r_0, r)$ 使得 $f(r) = f(r_0) + f''(\eta)(r - r_0)^2 > f(r_0)$. 而这与 r_0 的定义矛盾. 因此, $f'(r_0) < 0$. 由 $f'(r)$ 的连续性可知, $r_1 = \min\{r < r_0 \mid f'(r) \leq 0\}$ 是良定义的且 $r_1 \in (q, r_0)$. 由于 $f'(q) > 0$, 故由 $f'(r)$ 的连续性可知, $f'(r_1) = 0$. 但在 $[r_1, r_0]$ 上恒有 $f''(r) > 0$. 因此, 由 Taylor 公式可知, 当 $r < r_1$ 且充分靠近 r_1 时,

$$f'(r) = f'(r_1) + f''(r_1)(r - r_1) + o(r - r_1) < f'(r_1).$$

而这与 r_1 的定义矛盾. 故断言 (ii) 也是成立的.

由断言可知, 在以下两种情形下, $U_{\lambda, q} \in \mathcal{M}_{\lambda, r}$:

- (a) $r \in (p, q)$ 且 $0 < \lambda < \lambda_0(q)$;
- (b) $r \in (q, p^*)$ 且 $\lambda > \lambda_0(q)$,

其中

$$\mathcal{M}_{\lambda, q} = \left\{ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \mid \frac{1}{q} \|u\|_q^q - \frac{\lambda}{p} \|u\|_p^p > 0 \right\}.$$

令

$$t_r = \left(\frac{\|\nabla U_{\lambda, q}\|_p^p}{\frac{pN}{r(N-p)} \|U_{\lambda, q}\|_r^r - \frac{pN\lambda}{p(N-p)} \|U_{\lambda, q}\|_p^p} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

则应用类似于命题 2.1 证明中的方法 (参见附录 A), 可得 $U_{\lambda, q}|_{t=t_r} \in \mathcal{P}_{\lambda, r}$. 显然, $U_{\lambda, q}$ 满足如下的 Pohozaev 恒等式:

$$\frac{N-p}{pN} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U_{\lambda, q}|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{q} U_{\lambda, q}^q - \frac{\lambda}{p} U_{\lambda, q}^p \right) dx, \quad (2.4)$$

因此,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\lambda, r}(U_{\lambda, q}|_{t=t_r}) &= \frac{(\|\nabla U_{\lambda, q}\|_p^p)^{\frac{N}{p}}}{N \left(\frac{pN}{r(N-p)} \|U_{\lambda, q}\|_r^r - \frac{pN\lambda}{p(N-p)} \|U_{\lambda, q}\|_p^p \right)^{\frac{N}{p}-1}} \\ &= \frac{1}{N} \|\nabla U_{\lambda, q}\|_p^p \left(\frac{\frac{1}{q} \|U_{\lambda, q}\|_q^q - \frac{\lambda}{p} \|U_{\lambda, q}\|_p^p}{\frac{1}{r} \|U_{\lambda, q}\|_r^r - \frac{\lambda}{p} \|U_{\lambda, q}\|_p^p} \right)^{\frac{N}{p}-1} \\ &= \mathbf{m}(\lambda, q) \left(\frac{\frac{1}{q} \|U_{\lambda, q}\|_q^q - \frac{\lambda}{p} \|U_{\lambda, q}\|_p^p}{\frac{1}{r} \|U_{\lambda, q}\|_r^r - \frac{\lambda}{p} \|U_{\lambda, q}\|_p^p} \right)^{\frac{N}{p}-1}. \end{aligned}$$

于是, 由 (2.2) 可知,

$$\mathbf{m}(\lambda, q) \left(\frac{\frac{1}{q} \|U_{\lambda, q}\|_q^q - \frac{\lambda}{p} \|U_{\lambda, q}\|_p^p}{\frac{1}{r} \|U_{\lambda, q}\|_r^r - \frac{\lambda}{p} \|U_{\lambda, q}\|_p^p} \right)^{\frac{N}{p}-1} \geq \mathbf{m}(\lambda, r).$$

故由断言可知, 在 (a) 或者 (b) 的情形下, 恒有 $\mathbf{m}(\lambda, q) > \mathbf{m}(\lambda, r)$. 因此, 定理 1.1(1) 和 1.1(2) 成立.

最后来证明结论 (3). 由于结论 (3) 证明的核心思想与证明文献 [15, 定理 1.1(2)] 时类似, 因此, 这里简要给出证明的主要步骤, 以便于读者查看. 众所周知,

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(\lambda, q) &= \inf_{u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}} \frac{(q-p)(\|\nabla u\|_p^p + \lambda\|u\|_p^p)^{\frac{q}{q-p}}}{qp\|u\|_q^{\frac{qp}{q-p}}} \\ &= \frac{(q-p)(\|\nabla U_{\lambda,q}\|_p^p + \lambda\|U_{\lambda,q}\|_p^p)^{\frac{q}{q-p}}}{qp\|U_{\lambda,q}\|_q^{\frac{qp}{q-p}}}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

令 $p < \nu < \mu < p^*$. 则由 Hölder 不等式可知, $\|U_{\nu,\lambda}\|_\nu^\nu \leq \|U_{\nu,\lambda}\|_p^{\frac{p(\mu-\nu)}{\mu-p}} \|U_{\nu,\lambda}\|_\mu^{\frac{\mu(\nu-p)}{\mu-p}}$. 故由极小化问题 (2.5) 可得

$$m(\lambda, \nu) = \frac{(\nu-p)(\|\nabla U_{\nu,\lambda}\|_p^p + \lambda\|U_{\nu,\lambda}\|_p^p)^{\frac{\nu}{\nu-p}}}{p\nu\|U_{\nu,\lambda}\|_\nu^{\frac{p\nu}{\nu-p}}} \geq \lambda^{\frac{p(\mu-\nu)}{(\mu-p)(\nu-p)}} \frac{\mu(\nu-p)}{\nu(\mu-p)} m(\lambda, \mu). \quad (2.6)$$

令 $\hat{f}(\mu) = \lambda^{\frac{p(\mu-\nu)}{(\mu-p)(\nu-p)}} \frac{\mu(\nu-p)}{\nu(\mu-p)}$. 显然, $\hat{f}(\nu) = 1$. 因此, 结论 (3) 等价于对于任意 $\mu > \nu$, 恒有 $\hat{f}(\mu) > 1$. 由 $p < \mu < p^*$ 可知, $\hat{f}'(\mu) = -\frac{p\hat{f}(\mu)}{(\mu-p)^2} (\frac{\mu-p}{\mu} - \ln \lambda)$. 故当 $\lambda > e^{\frac{p}{N}}$ 时, 对于任意 μ , 恒有 $\hat{f}'(\mu) > 0$. 于是当 $\lambda > e^{\frac{p}{N}}$ 时, 对于任意 μ , 恒有 $\hat{f}(\mu) > 1$. 因此, 当 $\lambda > e^{\frac{p}{N}}$ 固定时, $\mathbf{m}(\lambda, q)$ 作为 q 的函数是严格递减的. 在 (2.6) 中使用 Pohozaev 恒等式 (2.4) 可得, 对于任意 $p < \nu < \mu < p^*$, 有

$$\mathbf{m}(\lambda, \nu) \geq \left(\frac{p\nu}{pN - (N-p)\nu} \lambda \right)^{\frac{p(\mu-\nu)}{(\mu-p)(\nu-p)}} \frac{\mu(\nu-p)}{\nu(\mu-p)} \mathbf{m}(\lambda, \mu). \quad (2.7)$$

为了方便起见, 将 (2.7) 的右边部分记作 $\tilde{f}(\mu)$. 显然, $\tilde{f}(\nu) = 1$. 任取 $\lambda^* > e^{\frac{p}{N}}$. 因为 $m(\lambda_*, q)$ 作为 q 的函数是严格单调递减的, 所以对几乎处处的 $q \in (p, p^*)$, $\frac{dm(\lambda_*, q)}{dq}$ 存在. 记 $\frac{dm(\lambda_*, q)}{dq}$ 为 $m_q(\lambda_*, q)$. 由 (2.7) 知, 对几乎处处的 $q \in (p, p^*)$, 有如下的对 $m_q(\lambda_*, q)$ 的估计:

$$\begin{aligned} m_q(\lambda_*, q) &= \lim_{r \rightarrow q^+} \frac{m(\lambda_*, r) - m(\lambda_*, q)}{r - q} \\ &\leq \lim_{r \rightarrow q^+} \frac{1 - \tilde{f}(r)}{r - q} m(\lambda_*, r) \\ &= -\tilde{f}'(q) m(\lambda_*, q) \\ &= \frac{p}{(q-p)^2} \left(\frac{q-p}{q} - \ln \left(\frac{pq}{pN - (N-p)q} \right) - \ln \lambda^* \right) m(\lambda_*, q). \end{aligned} \quad (2.8)$$

由 (1.4) 可知, $m(\lambda, q) = (\frac{\lambda}{\lambda_*})^{\frac{q}{q-p} - \frac{N}{p}} m(\lambda_*, q)$. 故

$$m_q(\lambda, q) = \left(\frac{\lambda}{\lambda_*} \right)^{\frac{q}{q-p} - \frac{N}{p}} \left(\ln \left(\frac{\lambda}{\lambda_*} \right) \frac{-p}{(q-p)^2} m(\lambda_*, q) + m_q(\lambda_*, q) \right).$$

令 $g(q) = \ln(\frac{\lambda}{\lambda_*})^{\frac{-p}{(q-p)^2}} m(\lambda_*, q) + m_q(\lambda_*, q)$, 则由 (2.8) 可知, 对几乎处处的 $q \in (p, p^*)$, 有

$$g(q) \leq \frac{p}{(q-p)^2} m(\lambda_*, q) \left(\frac{q-p}{q} - \ln \left(\frac{pq}{pN - (N-p)q} \right) - \ln \lambda \right).$$

令 $\lambda_1(q) = e^{\frac{q-p}{q} \frac{pN - (N-p)q}{pq}}$. 则由直接计算可得 $\lambda_1'(q) = e^{\frac{q-p}{q} \frac{N(p-q) - (N-p)q}{q^3}}$. 由于 $p < \min\{N, q\}$, 因此对于任意 $q \in (p, p^*)$, 恒有 $\lambda_1'(q) < 0$. 于是, 当 $\lambda > \lambda_1(q)$ 时, 对几乎处处的 $r \in (q, p^*)$, 恒有

$g(r) < 0$. 这蕴涵了对几乎处处的 $r \in (q, p^*)$, 恒有 $m_r(\lambda, r) < 0$. 因此, 对于任意 $q < \nu < \mu < p^*$, 恒有 $m(\mu, \lambda) \leq m(\nu, \lambda) + \int_\nu^\mu m_r(\lambda, r) dr < m(\nu, \lambda)$. 由于 $\lim_{q \rightarrow p} \lambda_1(q) = 1$, 故当 $\lambda \geq 1$ 固定时, $m(\lambda, q)$ 作为 q 的函数在 (p, p^*) 内是严格单调递减的. 因此, 结论 (3) 也是成立的. 显然, 由结论 (1)–(3) 可知, $\lambda_0(q) < 1$. $\square$

3 $\lambda_0(q)$ 的渐近性态

本节研究当 $q \rightarrow p$ 和 $q \rightarrow p^*$ 时 $\lambda_0(q)$ 的渐近性态. 正如在引言中指出的那样, 这项研究需要对 $U_{1,q}$ 在 $q \rightarrow p$ 和 $q \rightarrow p^*$ 时的渐近性态有一个很好的认识. 因此, 首先来证明定理 1.2.

定理 1.2 的证明 为清楚起见, 将整个证明分成如下几步.

第 1 步 证明 $\limsup_{q \rightarrow p^+} [p^2(q-p)^{\frac{N}{p}-1} \mathbf{m}(1, q)]^{\frac{p}{N}} \leq e^{\frac{p^2}{N}(\mathcal{L}_p)^{-1}}$, 其中 $\mathcal{L}_p > 0$ 是由文献 [7, 定理 1.1] 给定的常数.

定义 $\psi_{\sigma,q}(x) := \Psi_\sigma((q-p)^{\frac{1}{p}}x)$, 其中 Ψ_σ 是由 (1.9) 给出的对数 Sobolev 不等式 (1.8) 的达到函数. 将 $\psi_{\sigma,q}$ 当作极小化问题 (2.5) 的实验函数, 则

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(1, q) &\leq \frac{q-p}{pq} \left[\frac{\|\nabla \psi_{\sigma,q}\|_p^p + \|\psi_{\sigma,q}\|_p^p}{\|\psi_{\sigma,q}\|_q^q} \right]^{\frac{p}{q-p}} (\|\nabla \psi_{\sigma,q}\|_p^p + \|\psi_{\sigma,q}\|_p^p) \\ &= \frac{(q-p)^{1-\frac{N}{p}} ((q-p)\|\nabla \Psi_\sigma\|_p^p + 1)^{\frac{q}{q-p}}}{pq (\|\Psi_\sigma\|_q^q)^{\frac{p}{q-p}}}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

类似于定理 1.1 的证明, 由 (1.9) 可知, $\|\Psi_\sigma\|_q^q$ 作为 q 的函数是 C^2 的. 因此, 由 Taylor 公式可知,

$$\begin{aligned} \|\Psi_\sigma\|_q^q &= \|\Psi_\sigma\|_p^p + (q-p) \int_{\mathbb{R}^N} \Psi_\sigma^p \ln \Psi_\sigma dx + O((q-p)^2) \\ &= 1 + (q-p) \int_{\mathbb{R}^N} \Psi_\sigma^p \ln \Psi_\sigma dx + O((q-p)^2). \end{aligned}$$

这蕴涵了 $(\|\Psi_\sigma\|_q^q)^{\frac{p}{q-p}} = (1 + o(1))e^{p \int_{\mathbb{R}^N} \Psi_\sigma^p \ln \Psi_\sigma dx}$. 类似地,

$$((q-p)\|\nabla \Psi_\sigma\|_p^p + 1)^{\frac{q}{q-p}} = (1 + o(1))e^{p\|\nabla \Psi_\sigma\|_p^p}.$$

故由 (3.1) 可知,

$$\limsup_{q \rightarrow p^+} p^2(q-p)^{\frac{N}{p}-1} \mathbf{m}(1, q) \leq e^{p\|\nabla \Psi_\sigma\|_p^p - p \int_{\mathbb{R}^N} \Psi_\sigma^p \ln \Psi_\sigma dx}.$$

于是, 选取 $\sigma^{\frac{p-1}{p}} = [\frac{N}{p^2\|\nabla \Psi_1\|_p^p}]^{\frac{1}{p}}$, 则由 Ψ_1 是 (1.8) 的达到函数可知,

$$\begin{aligned} \limsup_{q \rightarrow p^+} [p^2(q-p)^{\frac{N}{p}-1} \mathbf{m}(1, q)]^{\frac{p}{N}} &\leq e^{\frac{p^2}{N}(\|\nabla \Psi_\sigma\|_p^p - \int_{\mathbb{R}^N} \Psi_\sigma^p \ln \Psi_\sigma dx)} \\ &= e^{\frac{e^{\frac{p^2}{N}\sigma^{p-1}\|\nabla \Psi_1\|_p^p - 1}}{\sigma^{p-1}e^{\frac{p^2}{N}\int_{\mathbb{R}^N} \Psi_1^p \ln \Psi_1 dx}}} \\ &= e^{\frac{p^2}{N}(\mathcal{L}_p)^{-1}}. \end{aligned}$$

第 2 步 证明当 $q \rightarrow p$ 时, 在子列的意义下, $V_{1,q}(x) = U_{1,q}(\frac{x}{(q-p)^{\frac{1}{p}}})$ 在 $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 中弱收敛于 $V_p(x) \neq 0$, 其中 V_p 是全空间 $\mathbb{R}^N$ 中的 p -Laplace 型对数 Schrödinger 方程 $-\Delta_p u = |u|^{p-2}u \ln u$ 的弱解.

事实上, 因为 $U_{1,q}$ 是 p -Laplace 方程 (1.1) 的正的、径向对称的基态解, 所以由 Pohozaev 恒等式 (A.3) 可知, 当 $q \rightarrow p$ 时,

$$\mathbf{m}(1, q) = \frac{1}{N} \|\nabla U_{1,q}\|_p^p \quad \text{且} \quad \|\nabla U_{1,q}\|_p^p = \frac{N(q-p)(1+o(1))}{pq} \|U_{1,q}\|_p^p. \quad (3.2)$$

于是, 由第 1 步的结论可知,

$$\limsup_{q \rightarrow p^+} (\|V_{1,q}\|_p^p)^{\frac{p}{N}} = \limsup_{q \rightarrow p^+} \left(\frac{p^2}{N} \|\nabla V_{1,q}\|_p^p \right)^{\frac{p}{N}} \leq e^{\frac{p^2}{N}} (\mathcal{L}_p)^{-1}.$$

因此, $\{V_{1,q}\}$ 在 $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 中是有界的. 不失一般性, 假设当 $q \rightarrow p$ 时, $V_{1,q}(x)$ 在 $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 中弱收敛于 $V_p(x)$ 并且 $V_{1,q}(x)$ 在 $\mathbb{R}^N$ 中几乎处处收敛于 $V_p(x)$. 我们断言 $V_p \not\equiv 0$. 假设断言不真, 则 $V_p \equiv 0$. 因为 $V_{1,q}$ 是径向对称的, 故由对称引理 [22, 23] 可知, 对于任意 $r \in (p, p^*)$, 当 $q \rightarrow p$ 时, $V_{1,q}(x)$ 在 $L^r(\mathbb{R}^N)$ 中强收敛于 0. 令 $V_{1,q,+} = V_{1,q} \chi_{\{V_{1,q} \geq 1\}}$ 且 $V_{1,q,-} = V_{1,q} - V_{1,q,+}$, 其中 $\chi_{\{V_{1,q} \geq 1\}}$ 是集合 $\{x \in \mathbb{R}^N \mid V_{1,q} \geq 1\}$ 上的特征函数. 则由 $U_{1,q}$ 是 p -Laplace 方程 (1.1) 的解可知, $V_{1,q}$ 在弱意义下满足如下方程:

$$-\Delta_p V_{1,q} = \frac{V_{1,q,+}^{q-p} - 1}{q-p} V_{1,q,+}^{p-1} + \frac{V_{1,q,-}^{q-p} - 1}{q-p} V_{1,q,-}^{p-1}, \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (3.3)$$

类似于文献 [25, 引理 2.1] 的证明方法, 可以证明, 存在 $r > 0$ 使得当 q 充分靠近 p 时, $\frac{V_{1,q,+}^{q-p} - 1}{q-p} \leq C_r V_{1,q,+}^r$, 其中 $C_r > 0$ 是只与 r 有关的常数. 因为 $V_{1,q}$ 是 C^1 的且 $\frac{V_{1,q,-}^{q-p} - 1}{q-p} V_{1,q,-}^{p-1} \leq 0$, 故利用经典的 Moser 迭代可得, 对于任意 $r \geq p$, 当 $q \rightarrow p$ 时, $V_{1,q}(x)$ 在 $L^r(\mathbb{R}^N)$ 中强收敛于 0. 于是, 当 $q \rightarrow p$ 时, $V_{1,q}(x)$ 在 $L^p(\mathbb{R}^N)$ 中强收敛于 0. 因此, 当 q 充分靠近 p 时, $V_{1,q,+} = 0$. 故在方程 (3.3) 两边同乘以 $V_{1,q}$ 并分部积分后, 可在 q 充分靠近 p 时得到一个矛盾. 因此, $V_p \not\equiv 0$. 用类似于证明文献 [25, 定理 3.1] 的方法, 可以验证 V_p 满足如下的 p -Laplace 型对数 Schrödinger 方程:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = |u|^{p-2} u \ln u, & x \in \mathbb{R}^N, \\ u(x) \rightarrow 0, & |x| \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (3.4)$$

第 3 步 证明当 $q \rightarrow p$ 时, $V_{1,q}$ 在 $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 中强收敛于 V_p 且存在 $\sigma > 0$ 使得 $W_p(x) = \frac{V_p}{\|V_p\|_p} = \Psi_\sigma(x)$.

事实上, 因为 $V_p \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 满足 (3.4), 故 $\|\nabla V_p\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^N} V_p^p \ln V_p dx$. 令 $W_{p,q}(x) = W_p((q-p)^{\frac{1}{p}} x)$. 则将 $W_{p,q}$ 当作极小化问题 (2.5) 的实验函数并类似第 1 步那样计算可得

$$\limsup_{q \rightarrow p^+} p^2 (q-p)^{\frac{N}{p}-1} \mathbf{m}(1, q) \leq e^{p \|\nabla W_p\|_p^p - p \int_{\mathbb{R}^N} W_p^p \ln W_p dx} = \|V_p\|_p^p.$$

由 (3.2) 可知, 当 $q \rightarrow p$ 时,

$$\|V_{1,q}\|_p^p = p^2 (q-p)^{\frac{N}{p}-1} \mathbf{m}(1, q) \quad \text{和} \quad \|\nabla V_{1,q}\|_p^p = \left(\frac{N}{p^2} + o(1) \right) \|V_{1,q}\|_p^p. \quad (3.5)$$

因此, 当 $q \rightarrow p$ 时, $V_{1,q}$ 在 $L^p(\mathbb{R}^N)$ 中强收敛于 V_p . 由 (3.2)、Fatou 引理和 Lebesgue 控制收敛定理可知, 当 $q \rightarrow p$ 时, $V_{1,q}$ 在 $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 中强收敛于 V_p . 于是, 由对数 Sobolev 不等式 (1.8) 可知, $\mathcal{L}_p \|\nabla W_p\|_p^p \geq e^{\frac{p^2}{N} \int_{\mathbb{R}^N} W_p^p \ln W_p dx}$. 故由 (3.5) 可知, $\|V_p\|_p^p \geq \left(\frac{ep^2}{N \mathcal{L}_p} \right)^{\frac{N}{p}}$. 因此, 由第 1 步的结论可知, W_p 是对数 Sobolev 不等式 (1.8) 的达到函数且 $\|V_p\|_p^p = \left(\frac{ep^2}{N \mathcal{L}_p} \right)^{\frac{N}{p}}$. $\square$

定理 1.3 的证明 先来证明 $\lambda_0(q)$ 的单调性. 假设 $\lambda_0(q)$ 不单调, 则存在 $q_1 < q_2$ 使得 $\lambda_0(q_1) = \lambda_0(q_2)$. 记 $\lambda_* = \lambda_0(q_1) = \lambda_0(q_2)$, 则由定理 1.1 可知, $\mathbf{m}(\lambda_*, q)$ 在 $q_1 < q < p^*$ 时是严格单调递减的, 在 $p < q < q_2$ 时是严格单调递增的. 但这与 $q_1 < q_2$ 矛盾. 因此, $\lambda_0(q)$ 在 (p, p^*) 内是严格单调递减的. 再来证明结论 (1). 与定理 1.2 的证明类似, 对 (3.3) 使用经典的 Moser 迭代和 Sobolev 嵌入可知, 对于任意 $\alpha \in (0, 1)$, $\{V_{1,q}\}$ 在 $C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ 中有界. 因此, 由定理 1.2 和 Arzelà-Ascoli 定理可知, 当 $q \rightarrow p$ 时, $V_{1,q}$ 在 $C_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N)$ 中强收敛于 V_p . 因为 $V_{1,q}$ 是径向对称的, 所以由文献 [12, 命题 1] 可知, $V'_{1,q}(r) < 0$. 故当 q 充分靠近 p 时, 由定理 1.2 可知 $V_{1,q}$ 一致地很小. 设 $R_0 > 0$ 是充分大的常数使得当 $|x| \geq R_0$ 时, $V_{1,q} \leq \frac{1}{2}$. 再取 $\sigma > 1$ 使得 $\sigma^{\frac{1}{2}} \leq \frac{2}{3}$. 则 $V_{1,q}$ 满足

$$-\Delta_p V_{1,q} = \frac{V_{1,q}^{q-p} - 1}{q-p} V_{1,q}^{p-1}, \quad |x| > R_0.$$

故 $\tilde{V}_{1,q}(x) = \sigma^p V_{1,q}(x)$ 满足

$$-\Delta_p \tilde{V}_{1,q} = \sigma^{-p(q-p)} \frac{\tilde{V}_{1,q}^{q-p} - 1}{q-p} \tilde{V}_{1,q}^{p-1} + \frac{(\sigma^{-p})^{q-p} - 1}{q-p} \tilde{V}_{1,q}^{p-1}, \quad |x| > R_0.$$

因为 $\sigma^{\frac{1}{2}} \leq \frac{2}{3}$, 故当 $|x| > \frac{R_0}{\sigma}$ 时, $\sigma^{-p(q-p)} \frac{\tilde{V}_{1,q}^{q-p} - 1}{q-p} \tilde{V}_{1,q}^{p-1} \leq 0$. 于是, 当 q 充分靠近 p 时, $\tilde{V}_{1,q}$ 是如下方程的下解:

$$-\Delta_p U + \frac{p}{2} \ln \sigma U^p = 0, \quad |x| > R_0. \quad (3.6)$$

另一方面, 因为 $\sigma > 1$, 故直接计算可知, $e^{-[\frac{p \ln \sigma}{4(p-1)}]^{\frac{1}{p}} |x|}$ 是方程 (3.6) 在 $R_0 > 0$ 充分大时的上解. 因此, 由文献 [6, 定理 1.2] (即 p -Laplace 方程的弱比较原理) 可知,

$$V_{1,q} \leq \sigma^p V_p(0) e^{-[\frac{p \ln \sigma}{4(p-1)}]^{\frac{1}{p}} |x|}, \quad |x| \geq R_0. \quad (3.7)$$

显然存在一个很小的 $\tau > 0$ 使得 $\max\{V_{1,q}^q \ln V_{1,q}, V_{1,q}^q\} \lesssim V_{1,q}^{p-\tau}$, 且由 (3.7) 和定理 1.2 可知, 当 $q \rightarrow p$ 时, $V_{1,q}^{p-\tau}$ 在 $L^1(\mathbb{R}^N)$ 中强收敛于 $V_p^{p-\tau}$. 故由 Lebesgue 控制收敛定理^[19] 可知, 当 $q \rightarrow p$ 时, $V_{1,q}^q \ln V_{1,q}$ 在 $L^1(\mathbb{R}^N)$ 中强收敛于 $V_p^p \ln V_p$ 且 $V_{1,q}^q$ 在 $L^1(\mathbb{R}^N)$ 中强收敛于 V_p^p . 故结论 (1) 成立. 最后来证明结论 (2). 令

$$\tilde{\lambda}(q) = \begin{cases} a_{N,p}(p^* - q), & N > p^2, \\ a_{N,p} \frac{p^* - q}{|\ln(p^* - q)|}, & N = p^2, \\ a_{N,p}(p^* - q)^{\frac{p^2-p}{N-p}}, & N < p^2. \end{cases}$$

则由文献 [11, 定理 3] 可知, 当 $q \rightarrow p^*$ 时, $U_{\tilde{\lambda}(q),q}$ 在 $\mathbb{R}^N$ 上一致收敛于 $\mathcal{W}$, 其中 $\mathcal{W}$ 是满足 $\max_{x \in \mathbb{R}^N} \mathcal{W}(x) = \mathcal{W}(0)$ 的 p -Laplace 型 Aubin-Talanti 泡泡解. 于是, 在 (1.6) 中应用 (1.3) 可知,

$$\begin{aligned} \ln \lambda_0(q) &= \frac{q-p}{q} - \frac{(q-p) \int_{\mathbb{R}^N} U_{1,q}^q \ln U_{1,q} dx}{\int_{\mathbb{R}^N} U_{1,q}^q dx} \\ &= \frac{q-p}{q} - \frac{(q-p) \int_{\mathbb{R}^N} U_{\tilde{\lambda}(q),q}^q \ln U_{\tilde{\lambda}(q),q} dx}{\int_{\mathbb{R}^N} U_{\tilde{\lambda}(q),q}^q dx} + \ln \tilde{\lambda}(q). \end{aligned}$$

与证明结论 (1) 时类似, 可以利用 Lebesgue 控制收敛定理证明, 当 $q \rightarrow p^*$ 时, $\int_{\mathbb{R}^N} U_{\tilde{\lambda}(q),q}^q \ln U_{\tilde{\lambda}(q),q} dx$ 收敛于 $\int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{W}^{p^*} \ln \mathcal{W} dx$ 且 $\int_{\mathbb{R}^N} U_{\tilde{\lambda}(q),q}^q dx$ 收敛于 $\int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{W}^{p^*} dx$. 因此,

$$\lim_{q \rightarrow p^*} \frac{\lambda_0(q)}{\tilde{\lambda}(q)} = e^{\frac{p}{N} - \frac{p^2 \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{W}^{p^*} \ln \mathcal{W} dx}{(N-p) \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{W}^{p^*} dx}}.$$

于是, 由 $\tilde{\lambda}(q)$ 的表达式可得结论 (2) 成立. $\square$

致谢 感谢审稿人对本文提出的宝贵修改意见, 这些修改意见极大地提升了本文的质量.

参考文献

- 1 Berestycki H, Lions P-L. Nonlinear scalar field equations, I existence of a ground state. *Arch Ration Mech Anal*, 1983, 82: 313–345
- 2 Brezis H, Peletier L. Asymptotics for elliptic equations involving critical growth. In: *Partial Differential Equations and the Calculus of Variations*, Vol. I. Boston: Birkhäuser, 1989, 149–192
- 3 Citti G. Positive solutions for a quasilinear degenerate elliptic equation in $\mathbf{R}^n$. *Rend Circ Mat Palermo (2)*, 1986, 35: 364–375
- 4 Coti Zelati V, Rabinowitz P H. Homoclinic type solutions for a semilinear elliptic PDE on $\mathbb{R}^n$. *Comm Pure Appl Math*, 1992, 45: 1217–1269
- 5 d'Avenia P, Montefusco E, Squassina M. On the logarithmic Schrödinger equation. *Commun Contemp Math*, 2014, 16: 1350032
- 6 Damascelli L. Comparison theorems for some quasilinear degenerate elliptic operators and applications to symmetry and monotonicity results. *Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire*, 1998, 15: 493–516
- 7 del Pino M, Dolbeault J. The optimal Euclidean L^p -Sobolev logarithmic inequality. *J Funct Anal*, 2003, 197: 151–161
- 8 DiBenedetto E. $C^{1,\alpha}$ local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations. *Nonlinear Anal*, 1983, 7: 827–850
- 9 Ferrero A, Gazzola F. Asymptotic behavior of ground states of quasilinear elliptic problems with two vanishing parameters, Part III. *J Differential Equations*, 2004, 198: 53–90
- 10 Floer A, Weinstein A. Nonspreading wave packets for the cubic Schrödinger equation with a bounded potential. *J Funct Anal*, 1986, 69: 397–408
- 11 Gazzola F, Peletier B, Pucci P, et al. Asymptotic behavior of ground states of quasilinear elliptic problems with two vanishing parameters, Part II. *Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire*, 2003, 20: 947–974
- 12 Gazzola F, Serrin J. Asymptotic behavior of ground states of quasilinear elliptic problems with two vanishing parameters. *Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire*, 2002, 19: 477–504
- 13 Gidas B, Ni W M, Nirenberg L. Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in $\mathbf{R}^n$. In: *Mathematical Analysis and Applications, Advances in Mathematics. Supplementary Studies*, vol. 7A. New York: Academic Press, 1981, 369–402
- 14 Guedda M, Veron L. Quasilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents. *Nonlinear Anal*, 1989, 13: 879–902
- 15 Ji C, Wang Z Q, Wu Y. A monotone property of the ground state energy to the scalar field equation and applications. *J Lond Math Soc (2)*, 2019, 100: 804–824
- 16 Kwong M K. Uniqueness of positive solutions of $\Delta u - u + u^p = 0$ in $\mathbf{R}^n$. *Arch Ration Mech Anal*, 1989, 105: 243–266
- 17 Li Y, Zhao C. A note on exponential decay properties of ground states for quasilinear elliptic equations. *Proc Amer Math Soc*, 2005, 133: 2005–2012
- 18 Ni W M, Wei J. On the location and profile of spike-layer solutions to singularly perturbed semilinear Dirichlet problems. *Comm Pure Appl Math*, 1995, 48: 731–768
- 19 Panda B B, Kapoor O P. On equidistant sets in normed linear spaces. *Bull Aust Math Soc*, 1974, 11: 443–454
- 20 Rabinowitz P H. On a class of nonlinear Schrödinger equations. *Z Angew Math Phys*, 1992, 43: 270–291
- 21 Serrin J, Tang M. Uniqueness of ground states for quasilinear elliptic equations. *Indiana Univ Math J*, 2000, 49: 897–923
- 22 Strauss W A. Existence of solitary waves in higher dimensions. *Comm Math Phys*, 1977, 55: 149–162

- 23 Su J, Wang Z Q, Willem M. Weighted Sobolev embedding with unbounded and decaying radial potentials. J Differential Equations, 2007, 238: 201–219
- 24 Troy W C. Uniqueness of positive ground state solutions of the logarithmic Schrödinger equation. Arch Ration Mech Anal, 2016, 222: 1581–1600
- 25 Wang Z Q, Zhang C. Convergence from power-law to logarithm-law in nonlinear scalar field equations. Arch Ration Mech Anal, 2019, 231: 45–61
- 26 Weth T. Symmetry of solutions to variational problems for nonlinear elliptic equations via reflection methods. Jahresber Dtsch Math-Ver, 2010, 112: 119–158

附录 A 命题 2.1 的证明

为了清楚起见, 将整个证明分成 4 个断言.

断言 1 $m(\lambda, q) \geq \inf_{u \in \mathcal{P}_{\lambda, q}} \mathcal{E}_{\lambda, q}(u)$.

事实上, 正如在引言中所指出的那样, $m(\lambda, q) = \mathcal{E}_{\lambda, q}(U_{\lambda, q})$, 其中 $U_{\lambda, q}$ 是 p -Laplace 方程 (1.1) 的正的径向对称解. 由文献 [17, 定理 1.1] 可知, 存在充分小的 $\delta > 0$ 使得

$$\max\{U_{\lambda, q}(x), |\nabla U_{\lambda, q}(x)|\} \leq C_{\lambda, q} e^{-(1-\delta)(\frac{\lambda}{p-1})^{\frac{1}{p}}|x|}, \quad |x| \geq R_\delta, \quad (\text{A.1})$$

其中, $R_\delta > 0$ 是满足 $\lim_{\delta \rightarrow 0} R_\delta = +\infty$ 的常数, $C_{\lambda, q} > 0$ 是常数. 选取 $R_0 > R_\delta$ 并考虑 $V_{\lambda, q} = U_{\lambda, q} - U_{\lambda, q}(R_0)$. 则 $V_{\lambda, q}$ 满足如下的方程:

$$\begin{cases} -\Delta_p V_{\lambda, q} + \lambda(V_{\lambda, q} + U_{\lambda, q}(R_0))^{p-1} = (V_{\lambda, q} + U_{\lambda, q}(R_0))^{q-1}, & |x| < R_0, \\ V_{\lambda, q}(x) = 0, & |x| = R_0. \end{cases}$$

由经典的正则性理论 [8] 可知, $U_{\lambda, q}$ 是 $C^{1, \alpha}$ 的. 故 $V_{\lambda, q}$ 也是 $C^{1, \alpha}$ 的. 于是由文献 [14, 定理 1.1] (即 p -Laplace 方程的 Pohozaev 恒等式) 可知,

$$\begin{aligned} & \frac{N-p}{pN} \int_{|x| \leq R_0} |\nabla V_{\lambda, q}|^p dx + \left(\frac{p-1}{pN} \right) \int_{|x|=R_0} R_0^2 |\nabla V_{\lambda, q}|^p dx \\ &= \int_{|x| \leq R_0} \left(\frac{1}{q} (V_{\lambda, q} + U_{\lambda, q}(R_0))^q - \frac{\lambda}{p} (V_{\lambda, q} + U_{\lambda, q}(R_0))^p \right) dx. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

在 (A.2) 中令 $R_0 \rightarrow +\infty$, 由 (A.1) 可得

$$\frac{N-p}{pN} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U_{\lambda, q}|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{q} U_{\lambda, q}^q - \frac{\lambda}{p} U_{\lambda, q}^p \right) dx, \quad (\text{A.3})$$

这蕴涵了 $U_{\lambda, q} \in \mathcal{P}_{\lambda, q}$. 因此 $m(\lambda, q) \geq \inf_{u \in \mathcal{P}_{\lambda, q}} \mathcal{E}_{\lambda, q}(u)$.

断言 2 $\mathcal{P}_{\lambda, q}$ 是 $W^{1, p}(\mathbb{R}^N)$ 中余维数为 1 的 C^1 流形.

事实上, 令

$$\Psi_{\lambda, q}(u) = \|\nabla u\|_p^p - \left(\frac{pN}{q(N-p)} \|u\|_q^q - \frac{pN}{p(N-p)} \lambda \|u\|_p^p \right). \quad (\text{A.4})$$

显然 $\Psi_{\lambda, q}(u)$ 在 $W^{1, p}(\mathbb{R}^N)$ 中是 C^1 的且

$$\mathcal{P}_{\lambda, q} = \{u \in W^{1, p}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} \mid \Psi_{\lambda, q}(u) = 0\}.$$

直接计算可得

$$\mathcal{T}_u(\mathcal{P}_{\lambda,q}) = \{v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \mid \Psi'_{\lambda,q}(u)[v] = 0\},$$

其中 $\mathcal{T}_u(\mathcal{P}_{\lambda,q})$ 是 $\mathcal{P}_{\lambda,q}$ 在任意 $u \in \mathcal{P}_{\lambda,q}$ 处的切空间. 由于对于任意 $u \in \mathcal{P}_{\lambda,q}$, 恒有

$$\Psi'_{\lambda,q}(u)[u] = p\|\nabla u\|_p^p - \frac{pN}{N-p}(\|u\|_q^q - \lambda\|u\|_p^p) = \frac{pN(p-q)}{(N-p)q}\|u\|_q^q < 0,$$

故对于任意 $w \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, 可以改写 $w = a_w u + \psi_w$, 其中 $a_w = \Psi'_{\lambda,q}(u)[w]$. 显然 $\psi_w \in \mathcal{T}_u(\mathcal{P}_{\lambda,q})$. 因此, 对于任意 $u \in \mathcal{P}_{\lambda,q}$, 在线性空间的意义上, $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}u \oplus \mathcal{T}_u(\mathcal{P}_{\lambda,q})$. 故 $\mathcal{P}_{\lambda,q}$ 是 $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 中余维数为 1 的 C^1 流形.

断言 3 $\inf_{u \in \mathcal{P}_{\lambda,q}} \mathcal{E}_{\lambda,q}(u) = \inf_{u \in \mathcal{M}_{\lambda,q}} \mathcal{J}_{\lambda,q}(u)$, 其中

$$\mathcal{J}_{\lambda,q}(u) = \frac{p}{N-p} \left(\frac{1}{q}\|u\|_q^q - \frac{1}{p}\lambda\|u\|_p^p \right) \left(\frac{\|\nabla u\|_p^p}{\frac{pN}{q(N-p)}\|u\|_q^q - \frac{pN}{p(N-p)}\lambda\|u\|_p^p} \right)^{\frac{N}{p}}$$

且

$$\mathcal{M}_{\lambda,q} = \left\{ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \mid \frac{1}{q}\|u\|_q^q - \frac{\lambda}{p}\|u\|_p^p > 0 \right\}. \quad (\text{A.5})$$

事实上, 令 $u|_t(x) = u(\frac{x}{t})$ 并考虑如下的纤维丛映射:

$$F_u(t) = \mathcal{E}_{\lambda,q}(u_t) = \frac{t^{N-p}}{p} \|\nabla u\|_p^p - t^N \left(\frac{1}{q}\|u\|_q^q - \frac{1}{p}\lambda\|u\|_p^p \right).$$

则直接计算可得

$$F'_u(t) = \frac{(N-p)t^{N-1}}{p} \left(t^{-p} \|\nabla u\|_p^p - \left(\frac{pN}{q(N-p)}\|u\|_q^q - \frac{pN}{p(N-p)}\lambda\|u\|_p^p \right) \right).$$

因此, 对于任意 $u \in \mathcal{M}_{\lambda,q}$, 存在唯一的 $t_u > 0$ 满足

$$t_u = \left(\frac{\|\nabla u\|_p^p}{\frac{pN}{q(N-p)}\|u\|_q^q - \frac{pN}{p(N-p)}\lambda\|u\|_p^p} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (\text{A.6})$$

使得 $F'_u(t_u) = 0$ 且 $F_u(t_u) = \max_{t>0} F_u(t)$. 于是, 对于任意 $u \in \mathcal{M}_{\lambda,q}$, 有 $u|_{t=t_u} \in \mathcal{P}_{\lambda,q}$. 另一方面, 显然有 $\mathcal{P}_{\lambda,q} \subset \mathcal{M}_{\lambda,q}$. 故直接计算可得断言的结论成立.

断言 4 $m(\lambda, q) \leq \inf_{u \in \mathcal{P}_{\lambda,q}} \mathcal{E}_{\lambda,q}(u)$.

假设 $\{u_n\}$ 是泛函 $\mathcal{J}_{\lambda,q}(u)$ 在 $\mathcal{M}_{\lambda,q}$ 上的一个极小化序列. 则由 Schwartz 对称化可知, $\{u_n\}$ 可以被选取为径向对称的且非负的. 令 $v_n = u_n|_{t=t_{u_n}}$, 其中 t_{u_n} 由 (A.6) 给出. 由断言 3 可知, $\{v_n\}$ 是 $\mathcal{E}_{\lambda,q}(u)$ 在 $\mathcal{P}_{\lambda,q}$ 上的极小化序列且满足

$$\inf_{u \in \mathcal{P}_{\lambda,q}} \mathcal{E}_{\lambda,q}(u) = \frac{1}{N} \|\nabla v_n\|_p^p + o_n(1).$$

显然, $\{v_n\}$ 在 $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 中有界. 由 Hölder 不等式可知, $\|v_n\|_q^q \leq \|v_n\|_p^{tq} \|v_n\|_{p^*}^{(1-t)q}$, 其中 $t = \frac{N(p^*-q)}{qp^*}$. 因为 $\min\{N, q\} > p$, 故 $tq < p$. 于是, 由 $\{v_n\} \subset \mathcal{M}_{\lambda,q}$ 可知,

$$\frac{\lambda q}{p} \|v_n\|_p^{p-tq} \leq \mathcal{S}^{-\frac{(1-t)q}{p}} \|\nabla v_n\|_p^{(1-t)q},$$

其中 $\mathcal{S}$ 是从 $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 到 $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ 的 Sobolev 嵌入的最佳常数. 因此, $\|v_n\|_q^q \lesssim \|\nabla v_n\|_p^{\frac{q-tq}{p-tq}p}$. 假如 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\nabla v_n\|_p = 0$, 则由 $q > p$ 可知, 当 n 充分大时,

$$\begin{aligned} 0 &= \|\nabla v_n\|_p^p + \frac{pN}{p(N-p)} \lambda \|v_n\|_p^p - \frac{pN}{q(N-p)} \|v_n\|_q^q \\ &\gtrsim \|\nabla v_n\|_p^p - \|\nabla v_n\|_p^{\frac{q-tq}{p-tq}p} \\ &\geq \frac{1}{2} \|\nabla v_n\|_p^p \\ &> 0. \end{aligned}$$

但这是不可能的. 因此,

$$\|\nabla v_n\|_p^p = \left(\frac{pN}{q(N-p)} \|v_n\|_q^q - \frac{pN}{p(N-p)} \lambda \|v_n\|_p^p \right) \gtrsim 1. \quad (\text{A.7})$$

由于从 $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 到 $L_{\text{rad}}^q(\mathbb{R}^N)$ 的嵌入是紧的, 其中

$$L_{\text{rad}}^q(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^q(\mathbb{R}^N) \mid u \text{ 是径向对称的}\},$$

故在 $L_{\text{rad}}^q(\mathbb{R}^N)$ 中, 在子列意义下有 $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v_0$. 由 (A.7) 可知, $v_0 \neq 0$. 因此 $t_{v_0} \leq 1$, 其中 t_{v_0} 由 (A.6) 给出. 故由

$$o_n(1) + \inf_{u \in \mathcal{P}} \mathcal{E}_{\lambda,q}(u) = \frac{1}{N} \|\nabla v_n\|_p^p \geq \frac{1}{N} \|\nabla (v_0)_{t_{v_0}}\|_p^p + o_n(1) \geq \inf_{u \in \mathcal{P}} \mathcal{E}_{\lambda,q}(u)$$

可知, $(v_0)_{t_{v_0}}$ 是 $\mathcal{E}_{p,\lambda}(u)$ 在 $\mathcal{P}_{p,\lambda}$ 上的极小元. 为简便起见, 记 $(v_0)_{t_{v_0}}$ 为 $\bar{v}_0$. 因为

$$\Psi'_{\lambda,q}(\bar{v}_0)[\bar{v}_0] = p \|\nabla \bar{v}_0\|_p^p - \frac{pN}{N-p} (\|\bar{v}_0\|_q^q - \lambda \|\bar{v}_0\|_p^p) = \frac{pN(p-q)}{(N-p)q} \|\bar{v}_0\|_q^q < 0,$$

其中 $\Psi_{\lambda,q}(u)$ 由 (A.4) 给出, 故由断言 2 和 Lagrange 乘子法可知, 存在 $\mu \in \mathbb{R}$ 使得在 $W^{-1,p}(\mathbb{R}^N)$ 中有如下方程:

$$\mathcal{E}'_{\lambda,q}(\bar{v}_0) - \mu \Psi'_{\lambda,q}(\bar{v}_0) = 0, \quad (\text{A.8})$$

其中 $W^{-1,p}(\mathbb{R}^N)$ 是 $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 的对偶空间. 因为 v_n 是径向对称的和非负的, 故 $\bar{v}_0$ 也是径向对称的和非负的. 因此, $\bar{v}_0$ 在弱意义下满足如下的方程:

$$-(1-p\mu)\Delta_p \bar{v}_0 + \left(1 - \frac{\mu p N}{N-p}\right) \lambda (\bar{v}_0)^{p-1} = \left(1 - \frac{\mu p N}{N-p}\right) (\bar{v}_0)^{q-1}, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

由于 $\bar{v}_0$ 是径向的, 类似于断言 1, 可以证明 $\bar{v}_0$ 满足如下的 Pohozaev 恒等式:

$$(1-p\mu) \frac{N-p}{pN} \|\nabla \bar{v}_0\|_p^p = \left(1 - \frac{\mu p N}{N-p}\right) \left(\frac{1}{q} \|\bar{v}_0\|_q^q - \frac{\lambda}{p} \|\bar{v}_0\|_p^p\right). \quad (\text{A.9})$$

因为 $\bar{v}_0 \in \mathcal{P}_{\lambda,q}$, 所以由 (A.9) 可知,

$$\mu(p^* - p) \left(\frac{1}{q} \|\bar{v}_0\|_q^q - \frac{\lambda}{p} \|\bar{v}_0\|_p^p\right) = 0.$$

因此, $\mu = 0$. 于是, 由 (A.8) 可知, $\bar{v}_0$ 是 p -Laplace 方程 (1.1) 的一个非平凡的弱解. 故 $\bar{v}_0 \in \mathcal{N}_{\lambda,q}$, 其中 $\mathcal{N}_{\lambda,q}$ 是由 (2.1) 给出的 Nehari 流形. 因此, $\mathbf{m}(\lambda, q) \leq \inf_{u \in \mathcal{P}_{\lambda,q}} \mathcal{E}_{\lambda,q}(u)$.

结合断言 1 至 4 可得命题 2.1 成立.

Global behavior of the ground state energy of the nonlinear scalar field equation

Yuanze Wu & Zhi-Qiang Wang

Abstract We study the global behavior of the ground state energy for the nonlinear scalar field equation (including the p -Laplacian version), and give a complete description of this energy in terms of nonlinearity power. More precisely, let $\mathcal{E}_{\lambda,q}(u) = \frac{1}{p}(\|\nabla u\|_p^p + \lambda\|u\|_p^p) - \frac{1}{q}\|u\|_q^q$ be the energy functional in $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, where $\lambda > 0$, $1 < p < N$, $p < q < p^* := \frac{pN}{N-p}$, and p^* is the critical Sobolev exponent. It is known that $\mathcal{E}_{\lambda,q}(u)$ has a unique radially symmetric mountain-pass critical point $U_{\lambda,q}$, which is called the ground state solution to the corresponding nonlinear scalar field equation and whose energy $\mathcal{E}_{\lambda,q}(U_{\lambda,q})$ is called the ground state energy $\mathfrak{m}(\lambda, q)$. We show that there is a decreasing function $\lambda_0(q)$ defined in $q \in [p, p^*]$ with $\lambda_0(p) = 1$ and $\lambda_0(p^*) = 0$ such that $\mathfrak{m}(\lambda, r)$ is strictly increasing for $r \in (p, q)$ with $\lambda \in (0, \lambda_0(q))$ being fixed, $\mathfrak{m}(\lambda, r)$ is strictly decreasing for $r \in (q, p^*)$ with $\lambda \in (\lambda_0(q), 1)$ being fixed, and $\mathfrak{m}(\lambda, r)$ is strictly decreasing for all $r \in (p, p^*)$ with $\lambda \in [1, +\infty)$ being fixed. We also deduce the precise asymptotic behavior of $\lambda_0(q)$ as $q \rightarrow p$ and $q \rightarrow p^*$. This is done by establishing a relation between power-law scalar field equations and logarithmic-law scalar field equations, which is of the independent interest.

Keywords scalar field equations, ground state energy, global behavior

MSC(2020) 35J20, 35B25, 35B38, 35B40

doi: 10.1360/SSM-2022-0034