



论文

交叉型裂纹扩展模拟的一种有效方法

章青^{①②*}, 杨静^③, 夏晓舟^{①②}

① 河海大学水文水资源与水利工程科学国家重点实验室, 南京 210098;

② 河海大学力学与材料学院, 南京 210098;

③ 福建省建筑科学研究院, 福州 350025

*联系人, E-mail: lxzhangqing@hhu.edu.cn

收稿日期: 2013-02-01; 接受日期: 2013-09-17

国家自然科学基金资助项目(批准号: 51179064, 11132003, 11372099)

摘要 结合广义有限元法(GFEM)和扩展有限元法(XFEM)的特点, 提出了一种新的数值方法——广义扩展有限元法(GXFEM). 阐述了广义扩展有限元法的基本原理, 对相关公式进行推导, 探讨数值实现中需注意的重要问题, 给出利用广义扩展有限元法进行断裂分析时应力强度因子的计算方法, 编写了广义扩展有限元法程序. 通过算例进行了应力强度因子的计算, 模拟了结构裂纹的扩展过程. 算例结果表明, 利用广义扩展有限元法计算交叉裂纹扩展问题, 不需要进行过密的网格划分, 且网格在裂纹扩展后无需重新剖分, 具有相当高的计算精度.

关键词 广义扩展有限元法, 应力强度因子, 裂纹扩展, 数值模拟, 断裂力学

PACS: 02.70.Dh, 45.10.-b, 46.50.+a

doi: 10.1360/132013-64

1 引言

裂纹扩展模拟具有广泛的工程背景, 长期以来吸引了学术界和工程界的高度关注^[1]. 目前, 对于裂纹追踪分析的研究主要集中在单裂纹的扩展方面, 而结构中一般存在多条原生或次生微裂纹, 在外载和环境因素作用下, 随着裂纹的扩展, 各裂纹间会出现分支或相互交叉, 给问题的研究带来了很大的困难^[2].

交叉裂纹的扩展模拟主要有有限单元法、边界元法和近年来兴起的扩展有限元法. 文献[3]对不同位置裂纹间的互相作用及其影响规律采用有限元进行

了计算分析. 通过定义基础裂纹、干扰裂纹和干扰参数, 利用 J 积分计算在不同位置加入干扰裂纹时基础裂纹的应力强度因子, 并给出干扰裂纹对基础裂纹应力强度因子影响, 但并未涉及交叉裂纹的扩展分析. 文献[4]选取裂纹体中一代表裂纹, 应用边界元法模拟其扩展过程, 并将其他裂纹的影响通过改变材料弹性常数(等效材料常数)引入计算过程, 最终得到对裂纹体整体响应的分析, 但这种等效处理的方法并未真正实现对多裂纹的扩展模拟.

扩展有限元法的问世为多裂纹的扩展模拟提供了一种新的途径^[5,6], 该方法以单位分解法为基础, 将非连续结构直接嵌入单元内部, 通过增加描述非

引用格式: 章青, 杨静, 夏晓舟. 交叉型裂纹扩展模拟的一种有效方法. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2014, 44: 539–546

Zhang Q, Yang J, Xia X Z. An efficient method for cross crack growth analysis (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2014, 44: 539–546, doi: 10.1360/132013-64

连续性的附加函数, 去模拟裂纹的不连续性及裂纹尖端的奇异性, 避免了传统有限元法分析不连续问题时需要重新剖分网格的缺点. 文献[7]采用扩展有限元法, 通过定义主裂纹与次裂纹, 并考虑主裂纹和次裂纹相交的情况, 将交叉点产生的附加位移项添加到扩展有限元的位移模式, 并推导出新的弱解形式及相关列式, 实现了扩展有限元法对交叉裂纹的数值模拟.

但需指出的是, 在裂纹扩展分析中, 一般是依据断裂力学的相关准则判断裂纹是否稳定, 解的精度往往成为数值模拟的关键, 与传统有限元法相比, 扩展有限元法本身对解的精度并没有提高. 而广义有限元法将传统有限元结点自由度广义化, 通过增加插值函数的阶次, 有效提高了计算结果的精度, 且在非线性分析方面较传统有限元法更为可靠^[8-10].

为此, 本文结合上述两种方法各自的特点, 在作者所提出的广义扩展有限元法^[11]中引入一类交叉函数——指数型间断函数模拟多裂纹的效应, 并以平面四节点广义扩展等参单元为例, 详细推导新位移模式下的相关列式与支配方程, 探讨数值实现与程序设计所需注意的关键问题, 给出了运用改进的广义扩展有限元法计算裂尖应力强度因子的方法, 开发了计算程序, 应用所提出的广义扩展有限元法对多裂纹扩展过程进行了计算模拟. 结果表明, 采用广义扩展有限元法模拟多裂纹的扩展过程, 不需要进行过密的网格划分, 裂纹扩展后网格亦无需重新剖分, 且计算结果具有相当高的精度, 是进行多裂纹扩展分析的一种有效方法.

2 计算方法

2.1 扩展有限元法及其位移模式的改进

扩展有限元位移模式的一般形式为

$$u(x) = \sum_i \varphi_i(x)(u_i + a_i \phi_i(x)). \quad (1)$$

式中, u_i 为节点 i 的位移, φ_i 为传统有限元单元中节点 i 的形函数, a_i 是节点 i 的附加自由度, $\phi_i(x)$ 为附加非连续函数, 是考虑非连续性结构的影响而给节点 i 的丰富函数.

在处理裂纹扩展问题时, 附加非连续函数的构造是其中的一个重要环节. 裂纹在有限元网格中有

两种情况, 一种是把单元截成两块, 另一种则是裂纹尖端终止于单元内部(图 1).

对于横跨单元的裂纹, 构造的附加非连续函数必须体现位移在裂纹处的不连续性, 此外, 单元中的点距离裂纹越远, 裂纹对该点的影响就越弱. Belytschko 教授在提出扩展有限元法时, 采用的是单位阶跃函数, 难以反映裂纹影响的衰减效应. 为此, 本文对传统扩展有限元的位移函数进行改进, 将指数间断函数作为附加非连续函数, 构造如下的附加非连续函数 $\phi_i(x)$

$$\phi_i(x) = h(d(x)) = \begin{cases} e^{-d(x)}, & d(x) \geq 0, \\ -e^{d(x)}, & d(x) < 0. \end{cases} \quad (2)$$

其中, $d(x)$ 为考察点至裂纹的最短距离

$$d(x) = \min_{\bar{x} \in f(x)=0} \|x - \bar{x}\| \text{sign}(f(x) \cdot f(x_i)). \quad (3)$$

式中, $f(x)=0$ 为裂纹的曲线方程.

对于尖端终止于单元内部的裂纹, 构造的附加非连续函数除了要求能体现出裂纹处的位移不连续性外, 还必须能体现出裂纹尖端渐近位移场的奇异性. 但不管是哪一种裂纹形式(I, II, III), 裂纹尖端位移场均可由下面几个基函数组成的函数形式来表达, 即

$$\{F^I(x)\} = \left\{ \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos \theta, \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos \theta \right\}. \quad (4)$$

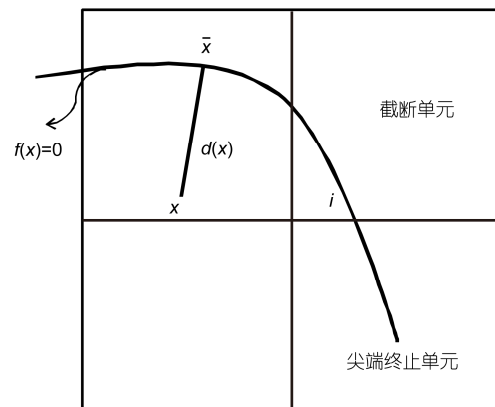


图 1 单元中的裂纹

Figure 1 crack in element.

此时式(1)中的附加项为

$$a_i \phi_i(x) = \sum_{l=1}^4 a_i^l F^l(x). \quad (5)$$

根据上述位移模式, 便可进行单元分析和整体分析, 建立扩展有限元的支配方程, 求出主变量 u 和附加变量 a .

2.2 广义扩展有限元法

广义扩展有限元认为各结点位移具有任意多个广义位移的展开式, 其位移模式可表示为

$$u(x) = \sum_i (N_i^u(x) d_i + N_i^a(x) b_i \phi_i(x)). \quad (6)$$

与扩展有限元相比, 此处的形函数作了变动, N_i^u 和 N_i^a 分别为主变量的广义形函数及附加不连续变量的广义形函数.

$$N_i^u = F_{(i)}^u \phi_i, \quad N_i^a = F_{(i)}^a \phi_i. \quad (7)$$

式中, $F_{(i)}^u$ 和 $F_{(i)}^a$ 分别为主变量和附加不连续变量的结点位移插值函数. ϕ_i 是传统有限元中位移插值基函数, 而 d_i 和 b_i 为节点 i 的广义自由度和广义附加自由度, 与(1)式中节点 i 的位移 u_i 和附加自由度 a_i 存在如下关系

$$u_i = F_{(i)}^u d_i, \quad a_i = F_{(i)}^a b_i. \quad (8)$$

由于不同结点位移的插值函数之间的协调性没有强制要求, 理论上 $F_{(i)}^u$ 和 $F_{(i)}^a$ 的可以随意选取. 若结点位移插值函数均取为零阶, 有

$$F_{(i)}^u = F_{(i)}^a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

则退化为传统的扩展有限元法.

为了兼顾计算精度和效率, 本文中 $F_{(i)}^u$ 和 $F_{(i)}^a$ 均取为一阶多项式插值函数, 即

$$F_{(i)}^u = F_{(i)}^a = F_{(i)}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x & 0 & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x & 0 & y \end{bmatrix}.$$

则位移模式可表示为

$$u(x) = \sum_i F_{(i)}^1 \phi_i (d_i + b_i \phi_i(x)). \quad (9)$$

与(1)式相比, 只需用 $F_{(i)}^1 \phi_i$ 去替换 ϕ_i , 就可以得到广义扩展有限元法的相关公式.

将物理方程 $\sigma = C : \varepsilon$ 和几何方程 $\varepsilon = \nabla_s u$ 代入虚功方程, 进行区域离散化后得到

$$\sum_e \left[\int_{\Omega^e} (\delta \nabla_s u^T : C : \nabla_s u - \delta u \cdot b) d\Omega - \int_{\Gamma_{fe}^e} \delta u \cdot \bar{t} d\Gamma \right] = 0. \quad (10)$$

引入位移模式, 并将单元结点自由度用整体结点自由度表示, 即可得到支配方程

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{ua} \\ K_{au} & K_{aa} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d \\ b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ q \end{Bmatrix}. \quad (11)$$

式中, $K_{uu} = \sum_e g_u^T k_{uu}^e g_u$, $K_{ua} = \sum_e g_u^T k_{ua}^e g_a$, $K_{aa} = \sum_e g_a^T k_{aa}^e g_a$, 其中的 g_u, g_a 为选择矩阵. 而 $k_{uu}^e = \int_{\Omega^e} B^{uT} C B^u d\Omega$, $k_{ua}^e = \int_{\Omega^e} B^{uT} C B^a d\Omega$, $k_{aa}^e = \int_{\Omega^e} B^{aT} C B^a d\Omega$, B^u 和 B^a 分别为主变量的单元应变矩阵和附加非连续变量的单元应变矩阵.

$$f = \sum_e \left[\int_{\Omega^e} (F \phi)^T b d\Omega + \int_{\Gamma_{fe}^e} (F \phi)^T \bar{t} d\Gamma \right],$$

$$q = \sum_e \left[\int_{\Omega^e} (F \phi \phi)^T b d\Omega + \int_{\Gamma_{fe}^e} (F \phi \phi)^T \bar{t} d\Gamma \right].$$

f 和 q 分别代表主变量对应的荷载列阵和附加非连续变量对应的荷载列阵.

3 多裂纹扩展问题的模拟技术

3.1 交叉型裂纹的描述

考虑图 2 中一代表性的交叉型裂纹, 定义裂纹 I 为主裂纹, 裂纹 II 为次裂纹. 该交叉型裂纹在传统有限元中的布设如图 3 所示.

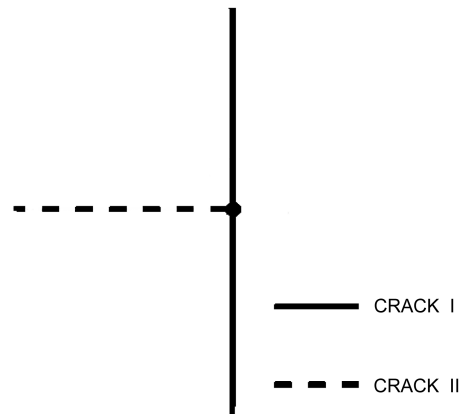


图 2 交叉型裂纹
Figure 2 Cross type crack.

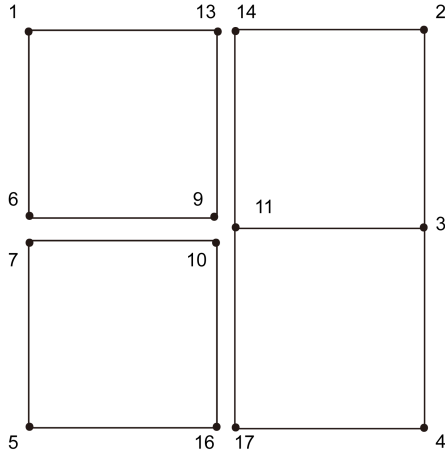


图3 交叉裂纹在 FEM 单元中的布置

Figure 3 The layout of cross crack in element of FEM.

对上述问题, 单元的位移模式可表示为

$$u^h(x) = \sum_{i \in I} u_i \phi_i(x), \quad (12)$$

$$I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 16, 17\}.$$

若设

$$\begin{aligned} \alpha_8 &= \frac{u_6 + u_7}{2}, \quad \beta_8 = \frac{u_6 - u_7}{2}, \\ \alpha_{15} &= \frac{u_{13} + u_{14}}{2}, \quad \beta_{15} = \frac{u_{14} - u_{13}}{2}, \\ \alpha_{18} &= \frac{u_{16} + u_{17}}{2}, \quad \beta_{18} = \frac{u_{17} - u_{16}}{2}, \\ \alpha_{12} &= \frac{u_{11} + (u_9 + u_{10})/2}{2}, \quad \gamma_{12} = \frac{u_9 - u_{10}}{2}, \\ \beta_{12} &= \frac{u_{11} - (u_9 + u_{10})/2}{2}. \end{aligned} \quad (13)$$

则有

$$\begin{aligned} u_6 &= \alpha_8 + \beta_8, \quad u_7 = \alpha_8 - \beta_8, \\ u_9 &= \alpha_{12} - \beta_{12} + \gamma_{12}, \quad u_{10} = \alpha_{12} - \beta_{12} - \gamma_{12}, \\ u_{11} &= \alpha_{12} + \beta_{12}, \quad u_{13} = \alpha_{15} - \beta_{15}, \\ u_{14} &= \alpha_{15} + \beta_{15}, \quad u_{16} = \alpha_{18} - \beta_{18}, \\ u_{17} &= \alpha_{18} + \beta_{18}. \end{aligned} \quad (14)$$

将(14)式代入(12)式, 得

$$\begin{aligned} u^h &= \sum_{i=1}^5 u_i \phi_i + \alpha_8 (\phi_6 + \phi_7) + \beta_8 H_{II}(x) (\phi_6 + \phi_7) \\ &+ \alpha_{12} (\phi_9 + \phi_{10} + \phi_{11}) + \beta_{12} H_I(x) (\phi_9 + \phi_{10} + \phi_{11}) \\ &+ \gamma_{12} J(x) (\phi_9 + \phi_{10}) + \alpha_{15} (\phi_{13} + \phi_{14}) + \beta_{15} H_I(x) (\phi_{13} \\ &+ \phi_{14}) + \alpha_{18} (\phi_{16} + \phi_{17}) + \beta_{18} H_I(x) (\phi_{16} + \phi_{17}). \end{aligned} \quad (15)$$

其中, $H_I(x)$, $H_{II}(x)$ 和 $J(x)$ 如图 4 定义.

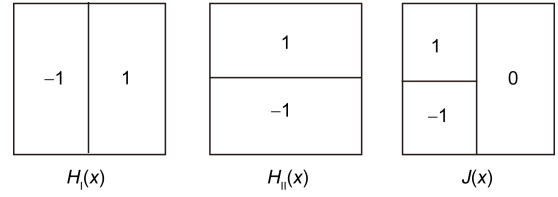

 图4 $H_I(x)$, $H_{II}(x)$ 和 $J(x)$ 的定义

 Figure 4 Definition of the discontinuous enrichment function $H_I(x)$, $H_{II}(x)$ and $J(x)$.

改用图 5 所示布置该交叉型裂纹, 且令

$$\begin{aligned} \phi_8 &= \phi_6 + \phi_7, \quad \phi_{12} = \phi_9 + \phi_{10} + \phi_{11}, \\ \phi_{15} &= \phi_{13} + \phi_{14}, \quad \phi_{18} = \phi_{16} + \phi_{17}, \\ u_8 &= \alpha_8, \quad u_{12} = \alpha_{12}, \quad u_{15} = \alpha_{15}, \quad u_{18} = \alpha_{18}, \end{aligned}$$

代入上式可得到该单元的位移模式为

$$\begin{aligned} u^h &= \sum_{i \in I'} u_i \phi_i + \beta_{12} \phi_{12} H_I(x) + \beta_{15} \phi_{15} H_I(x) \\ &+ \beta_{18} \phi_{18} H_I(x) + \beta_8 \phi_8 H_{II}(x) + \gamma_{12} \phi_{12} J(x). \end{aligned} \quad (16)$$

$$I' = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 12, 15, 18\}.$$

式中, $\sum_{i \in I'} u_i \phi_i$ 为传统有限元节点位移; $\beta_{12} \phi_{12} H_I(x) + \beta_{15} \phi_{15} H_I(x) + \beta_{18} \phi_{18} H_I(x)$ 为裂纹 I (主裂纹) 产生的附加节点位移, $\beta_8 \phi_8 H_{II}(x)$ 为裂纹 II (次裂纹) 产生的附加节点位移, $\gamma_{12} \phi_{12} J(x)$ 为交叉点产生的附加节点位移. 定义 $H_I(x)$ 和 $H_{II}(x)$ 为附加非连续函数, $J(x)$ 为交叉函数, 且有

$$J(x) = \begin{cases} H_{II}(x), & H_I(x) < 0, \\ 0, & H_I(x) > 0. \end{cases} \quad (17)$$

考虑到裂纹对考察点位移的影响与该点到裂纹的距离有关, 本文选取指数型间断函数 $\phi_I(x)$ 和 $\phi_{II}(x)$ 代替 $H_I(x)$ 和 $H_{II}(x)$ 作为附加非连续函数, 以更好地反

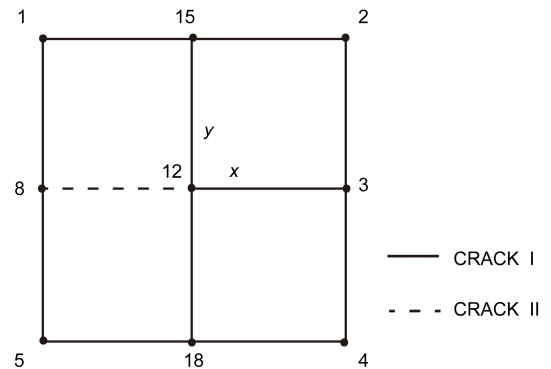


图5 交叉裂纹在 GXFEM 单元中的布置

Figure 5 The layout of cross crack in element of GXFEM.

映裂纹对考察点位移的影响, 并构造新的交叉函数 $\psi(x)$ 为

$$\psi(x) = \begin{cases} \phi_{II}(x), & \phi_I(x) < 0, \\ 0, & \phi_I(x) > 0. \end{cases} \quad (18)$$

由此得到

$$\begin{aligned} u^h = & \sum_{i \in I'} u_i \phi_i + \beta_{12} \phi_{12} \phi_I(x) + \beta_{15} \phi_{15} \phi_I(x) \\ & + \beta_{18} \phi_{18} \phi_I(x) + \beta_8 \phi_8 \phi_{II}(x) + \gamma_{12} \phi_{12} \psi(x), \quad (19) \\ I' = & \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 12, 15, 18\}. \end{aligned}$$

式中, $\beta_{12} \phi_{12} \phi_I(x) + \beta_{15} \phi_{15} \phi_I(x) + \beta_{18} \phi_{18} \phi_I(x)$ 为裂纹 I (主裂纹) 产生的附加节点位移; $\beta_8 \phi_8 \phi_{II}(x)$ 为裂纹 II (次裂纹) 产生的附加节点位移; $\gamma_{12} \phi_{12} \psi(x)$ 为交叉点产生的附加节点位移.

3.2 交叉型裂纹扩展问题的位移模式与求解方程

将交叉函数引入原广义扩展有限元位移模式, 便可构造其平面多裂纹问题的位移模式

$$u(x) = \sum_i (N_i^u(x) d_i + N_i^a(x) b_i \phi_i(x) + N_i^c(x) c_i \psi_i(x)). \quad (20)$$

比较(20)式与(6)式, 此处仅增加了表示交叉点产生的附加位移项 $N_i^c(x) c_i \psi_i(x)$, 其中 N_i^c 表示交叉点引起的附加变量的广义形函数, c_i 表示节点 i 由于交叉点引起的附加自由度, $\psi_i(x)$ 表示交叉函数, 是描述交叉点的影响而给节点 i 的丰富函数.

与前类似, $N_i^u = F_{(i)}^u \phi_i$, $N_i^a = F_{(i)}^a \phi_i$, $N_i^c = F_{(i)}^c \phi_i$, 并统一取 $F_{(i)}^u$, $F_{(i)}^a$ 和 $F_{(i)}^c$ 均为一阶的多项式插值函数, 得到

$$u(x) = \sum_i F_{(i)}^1 \phi_i (d_i + b_i \phi_i(x) + c_i \psi_i(x)). \quad (21)$$

同样, 将位移模式、物理方程和几何方程代入虚功方程, 并进行区域离散化, 经推导后可以得到求解交叉裂纹扩展模拟的支配方程

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{ua} & K_{uc} \\ K_{ua} & K_{aa} & K_{ac} \\ K_{uc} & K_{ac} & K_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ q \\ p \end{bmatrix}. \quad (22)$$

式中, $K_{uc} = \sum_e g_u^T K_{uc}^e g_c$, $K_{ac} = \sum_e g_a^T K_{ac}^e g_c$, $K_{cc} = \sum_e g_c^T K_{cc}^e g_c$, c 为交叉变量; p 代表交叉变量对应的荷载列阵,

$$p = \sum_e \left[\int_{\Omega_e} (F \phi \psi)^T b d\Omega + \int_{\Gamma_e^{re}} (F \phi \psi)^T \bar{t} d\Gamma \right],$$

其余符号意义同前.

3.3 裂尖应力强度因子的计算和裂纹扩展分析

采用 J 积分法计算裂尖应力强度因子. 对于线弹性材料, 在准静态裂纹扩展条件下, J 积分即为裂纹扩展能量释放率, 且与积分路径无关.

$$\begin{aligned} J &= \int_{\Gamma} (W \delta_{1j} - \sigma_{ij} u_{i,1}) n_j ds \\ &= \int_{\Gamma} \left(W dy - \frac{\partial u_i}{\partial x} T_i ds \right). \end{aligned} \quad (23)$$

式中, W 为应变能密度函数, $T_i = \sigma_{ij} n_j$ 为应力矢量的分量, Γ 为环绕缝尖由裂纹下表面走向上表面的任意开的路径.

弹性材料的 J 积分与混合模型裂纹扩展能量释放率及应力强度因子的关系为

$$J = G_I + G_{II} = \alpha (K_I^2 + K_{II}^2). \quad (24)$$

对平面应变问题 $\alpha = (1 - \nu^2)/E$, 对平面应力问题 $\alpha = 1/E$.

纯 I 型裂纹或纯 II 型裂纹可由 J 积分直接求得相应的应力强度因子. 对混合模式裂纹, 由上式只能得到 K_I 和 K_{II} 组合值, 可通过引入辅助平衡状态, 计算相互作用能量积分得到分离的 K_I 和 K_{II} 值.

在裂纹扩展分析中, 扩展方向按最大周向应力方向进行扩展, 即

$$\theta = \arccos \frac{3K_{II}^2 + \sqrt{K_I^4 + 8K_I^2 K_{II}^2}}{K_I^2 + 9K_{II}^2}. \quad (25)$$

开裂准则以等效应力强度因子 K_{eq} 是否大于 I 型断裂韧度 K_{IC} 来进行判断, 即

$$K_C = \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} [K_I (1 + \cos \theta) - 3K_{II} \sin \theta] \geq K_{IC}. \quad (26)$$

裂纹的演化计算过程如下:

(1) 求出裂纹尖端的应力强度因子, 由断裂判据判断裂纹是否失稳, 若裂纹失稳, 则裂纹按扩展的方向伸长一个距离 ΔL , 扩展方向取为裂纹尖端最大周向应力的方向;

(2) 进行应力释放, 法向以抗拉强度的大小释放应力, 切向以抗剪强度的折减程度释放应力, 释放的应力作为裂纹表面荷载等效到扩展单元的节点上, 重新进行计算;

(3) 根据新求出的裂尖应力强度因子判断是否扩展, 若扩展, 则增大裂纹的扩展距离, 若不扩展, 则减小裂纹的扩展距离;

(4) 对于每一荷载增量步如此往复进行, 直到裂纹稳定为止, 输出该荷载步的裂纹扩展方向和扩展

距离, 然后继续下一增量步的计算, 这样便可完成各增量步下的裂纹扩展方向和扩展距离, 达到裂纹追踪的目的.

4 算例分析

考虑一矩形薄板上的一条水平裂纹和两条关于水平线对称的斜裂纹相交于薄板的中心点, 如图6所示. 其中, $w=20\text{ m}$, $H=16\text{ m}$, 水平裂纹长为 a , 斜裂纹长为 b , 斜裂纹与水平的夹角为 θ , 在板的上下两侧施加均布拉力 $\sigma=1000\text{ N/m}^2$, 板的弹性模量 $E=24\text{ GPa}$, 泊松比 $\nu=0.2$, 材料的断裂韧度为 $2.4\text{ kPa}\sqrt{\text{m}}$.

采用模拟多裂纹的广义扩展有限元法对该问题进行数值分析, 分别计算 $a=1\text{ m}$, $b/a=0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$, $\theta=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ 时对应的应力强度因子, 并与无限大板的分析解^[12]及扩展有限元法数值解^[7]进行比较, 见表1. 图7给出了 $b/a=1.0$, $\theta=45^\circ$, $a/w=0.5$ 时裂纹扩展路径图.

由计算结果可以看出, 用广义扩展有限元法求得的裂尖应力强度因子与分析解相比误差很小, 且较文献[7]采用扩展有限元法的给出的数值解更接近分析解. 水平裂纹裂尖的应力强度因子高于斜裂纹对应的值, 裂纹扩展过程是水平裂纹先行扩展, 基本呈水平方向, 斜裂纹后续扩展, 与水平线约呈 15° 角向

两端发展, 并具有良好的对称性.

5 结语

广义有限元法将传统有限元结点自由度广义化, 通过提高插值函数的阶次, 有效的增加计算结果的

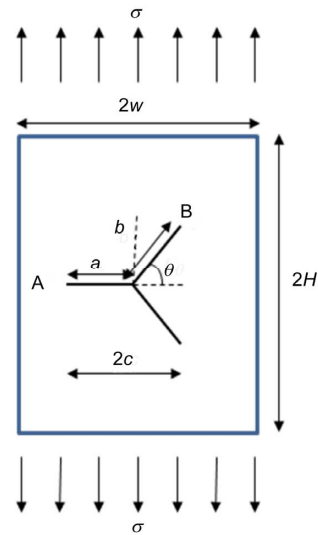


图6 (网络版彩图)矩形薄板上的交叉型裂纹及所受荷载
Figure 6 (Color online) Rectangular thin plate containing branched crack and the load subjected on it.

表1 不同方法得到的裂尖处应力强度因子

Table 1 The stress intensity factor of crack tip gained for different methods

θ		30°			45°			60°		
		文献[12]	文献[7]	本文解	文献[12]	文献[7]	本文解	文献[12]	文献[7]	本文解
$b/a=0.2$	$K_I^A/\sigma\sqrt{\pi c}$	1.012	1.014	1.013	1.015	1.019	1.017	1.018	1.018	1.018
	$K_{II}^A/\sigma\sqrt{\pi c}$	0.667	0.674	0.670	0.528	0.532	0.531	0.335	0.339	0.337
	$K_{III}^A/\sigma\sqrt{\pi c}$	0.247	0.254	0.249	0.405	0.412	0.409	0.492	0.493	0.493
$b/a=0.4$	$K_I^A/\sigma\sqrt{\pi c}$	1.018	1.020	1.019	1.023	1.022	1.024	1.028	1.028	1.028
	$K_{II}^A/\sigma\sqrt{\pi c}$	0.659	0.659	0.659	0.504	0.502	0.505	0.295	0.295	0.295
	$K_{III}^A/\sigma\sqrt{\pi c}$	0.295	0.299	0.298	0.460	0.459	0.461	0.546	0.546	0.547
$b/a=0.6$	$K_I^A/\sigma\sqrt{\pi c}$	1.023	1.022	1.023	1.029	1.030	1.030	1.039	1.038	1.039
	$K_{II}^A/\sigma\sqrt{\pi c}$	0.657	0.659	0.658	0.497	0.498	0.498	0.284	0.284	0.285
	$K_{III}^A/\sigma\sqrt{\pi c}$	0.319	0.322	0.321	0.485	0.486	0.485	0.568	0.567	0.568
$b/a=0.8$	$K_I^A/\sigma\sqrt{\pi c}$	1.026	1.028	1.028	1.036	1.036	1.036	1.053	1.053	1.053
	$K_{II}^A/\sigma\sqrt{\pi c}$	0.658	0.660	0.659	0.495	0.494	0.495	0.281	0.281	0.281
	$K_{III}^A/\sigma\sqrt{\pi c}$	0.333	0.336	0.335	0.498	0.497	0.498	0.567	0.573	0.569
$b/a=1.0$	$K_I^A/\sigma\sqrt{\pi c}$	1.030	1.027	1.031	1.044	1.045	1.044	1.069	1.066	1.070
	$K_{II}^A/\sigma\sqrt{\pi c}$	0.658	0.659	0.659	0.495	0.493	0.495	0.281	0.281	0.281
	$K_{III}^A/\sigma\sqrt{\pi c}$	0.343	0.344	0.343	0.506	0.504	0.507	0.577	0.576	0.578

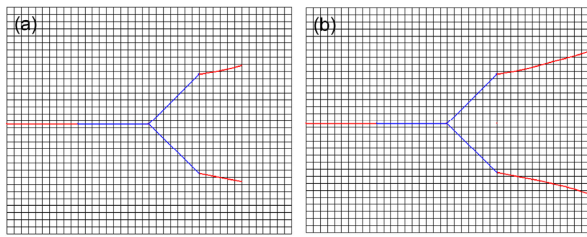


图 7 (网络版彩图)薄板中心交叉型裂纹扩展路径图

(a) 左端裂纹贯穿时的扩展路径图, (b) 裂纹最终贯穿时的扩展路径图

Figure 7 (Color online) The extension path of branched crack in rectangular thin plate. (a) Crack extension path when left crack section runs through the plate edge, (b) Crack extension path when right crack section runs through the plate edge.

精度, 且在非线性分析方面较传统有限元更为可靠; 而扩展有限元法通过在裂纹面单元加进不连续改进函数来构造位移函数, 克服了常规有限元法分析不连续问题, 特别是断裂问题时的诸多缺点. 本文结合广义有限元法和扩展有限元法各自的优势, 提出一种新的方法——广义扩展有限元法(GXFEM), 并利用该方法进行了交叉裂纹分析和数值模拟. 研究结果表明, 利用广义扩展有限元法计算交叉裂纹的扩展问题, 不需要进行过密的网格划分, 且网格在裂纹扩展后无需重新剖分, 具有相当高的计算精度, 是进行结构破坏演化分析的一种有效方法.

参考文献

- 1 解德, 钱勤, 李长安. 断裂力学中的数值计算方法及工程应用. 北京: 科学出版社, 2009
- 2 Chen Y Z. Integral equation methods for multiple crack problems and related topics (in Chinese). *Adv Mech*, 2008, 38(3): 358–387 [陈宜周. 多裂纹问题积分方程方法及相关问题. *力学进展*, 2008, 38(3): 358–387]
- 3 Wang Q F, Huang X P, Cui W C. Interaction between cracks in different positions through finite element analysis (in Chinese). *J Jiangsu Univ Sci Technol: Nat Sc Ed*, 2006, 20(1): 16–19 [王庆丰, 黄小平, 崔维成. 不同位置裂纹间的相互作用及其影响规律的有限元分析. *江苏科技大学学报(自然科学版)*, 2006, 20(1): 16–19]
- 4 Qin F, Cen Z Z, Du Q H. Boundary element analysis of cracked bodies (in Chinese). *Acta Mech Solida Sin*, 2002, 23(4): 431–438 [秦飞, 岑章志, 杜庆华. 多裂纹扩展分析的边界元方法. *固体力学学报*, 2002, 23(4): 431–438]
- 5 Belytschko T, Black T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *Int J Num Meth Eng*, 1999, 45: 601–620
- 6 Belytschko T, Moes N, Usui S, et al. Arbitrary discontinuities in finite elements. *Int J Num Meth Eng*, 2001, 50: 993–1013
- 7 Daux C, Moes N, Dolbow J, et al. Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method. *Int J Num Meth Eng*, 2000, 48: 1741–1760
- 8 Strouboulis T, Copps K, Babushka I. The generalized finite element method: an example of its implementation and illustration of its performance. *Int J Num Meth Eng*, 2000, 47: 1401–1417
- 9 Babuska I, Banerjee U, Osborn J E. On the principles for the selection of shape functions for the Generalized Finite Element Method. *Comput Meth Appl Mech Eng*, 2002, 191(49-50): 5595–5629
- 10 Strouboulis T, Zhang L, Babushka I. Generalized finite element method using mesh-based handbooks: Application to problems in domains with many voids. *Comput Meth Appl Mech Eng*, 2006, 195: 852–879
- 11 Zhang Q, Liu K, Xia X Z, et al. Generalized extended finite element method and its application in crack growth analysis (in Chinese). *Chin J Comput Mech*, 2012, 29(3): 427–432 [章青, 刘宽, 夏晓舟, 等. 广义扩展有限元法及其在裂纹扩展分析中的应用. *计算力学学报*, 2012, 29(3): 427–432]
- 12 Ouchterlong F. Stress intensity factors for the expansion loaded star crack. *Eng Fracture Mech*, 1976, 8: 447–448

An efficient method for cross crack growth analysis

ZHANG Qing^{1,2*}, YANG Jing³ & XIA XiaoZhou^{1,2}

¹ State Key Laboratory of Hydrology-Water Resources and Hydraulic Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China;

² College of Mechanics and materials, Hohai University, Nanjing 210098, China;

³ Construction science institution of Fujian province, Fuzhou 350025, China

A new numerical method-generalized extended finite element method (GXFEM) is proposed in this paper by combining the generalized finite element method (GFEM) and the extended finite element method (XFEM). The basic principles of GXFEM are presented in detail and relevant formula is derived. Some important problems in numerical realization are discussed. Then, a method of calculating stress intensity factors (SIF) in the analysis of fracture problems is given by using GXFEM. The GXFEM program to analyze fracture process is compiled. The numerical examples are applied to calculate the SIF and to simulate the crack propagation. The results show that it is not necessary to set frequent grids, or to re-mesh when cracks propagate. In addition, the results are provided with very high accuracy.

generalized extended finite element method, stress intensity factors, crack propagation, numerical simulation, fracture mechanics

PACS: 02.70.Dh, 45.10.-b, 46.50.+a

doi: 10.1360/132013-64