中国科学: 数学　2010 年　第 40 卷　第 6 期: 593～602
www.springerlink.com　math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

# 二维 Vilenkin 型系统的 Dirichlet 核的加权平均

张传洲*, 张学英

武汉科技大学理学院, 武汉 430065
E-mail: beautyfox110@sohu.com, zhxying315@sohu.com

收稿日期: 2008-07-24; 接受日期: 2010-03-25; * 通信作者
冶金工业过程系统科学湖北省重点实验室 (批准号: C201016), 湖北省教育厅 B 类项目 (批准号: B20081102) 资助项目

**摘要**　对二维 Vilenkin 型系统, 我们定义加权平均极大算子 $T$ (i.e. $Tf := \sup_{n=(n_1,n_2)\in\mathbb{P}^2,\beta^{-1}\leqslant n_1/n_2\leqslant\beta}|H_nf|$), 并证明此算子是弱 $(1,1)$ 型、强 $(p,p)$ 型 $(1<p\leqslant\infty)$ 以及 $(H,L)$ 型, 其中 $H_nf$ 表示部分和的加权平均, $H$ 表示 Hardy 空间. 借用此结果得到序列 $H_nf$ 是几乎处处收敛于可积函数 $f$.

**关键词**　Vilenkin 型系统　加权平均　几乎处处收敛

**MSC (2000) 主题分类**　42C10

## 1　引言

对二维三角 Fourier 级数 Marcinkiewicz 和 Zygmund[1] 证明当 $\beta^{-1}\leqslant m/n\leqslant\beta\,(\beta\geqslant1)$ 时序列 $\sigma_{(m,n)}f$ 是几乎处处收敛于 $f$. 众所周知, 经典 Fejér 核函数可由单调递减的可积函数来控制, 但此结论对一维 Walsh Fejér 核函数不成立. 过去几十年, 许多学者对 Walsh 函数进行研究, 得到很多好的结果. Móricz, 等人 [2] 证明当 $f\in L^1(Q^2)$, $|n_1-n_2|\leqslant\alpha$ 时, 序列 $\sigma_{(2^{n_1},2^{n_2})}f$ 几乎处处收敛于 $f$. Weisz[3] 分别讨论一维和二维 Walsh 情况下 $\sigma_nf$ 是几乎处处收敛于 $f$ 的. Taibleson[4] 把此结论推广到 $P$- 级数域. Gát[5] 则讨论在二整数群下 $\sigma_nf$ 是几乎处处收敛于 $f$ 的. 随后 Gát[6] 证明对每个可积函数 $f$ 满足 $\beta^{-1}\leqslant n_1/n_2\leqslant\beta\ (\beta\geqslant1)$ 条件时序列 $\sigma_{(n_1,n_2)}f\to f$ 几乎处处收敛于 $f$. Goginava[7] 更是证明对于 $d$- 维 Walsh 系统下 $\sigma_nf$ 是几乎处处收敛于 $f$. 本文便是在此基础上考虑加权平均极大算子的有界性, 即算子 $T$ 是弱 $(1,1)$ 型、强 $(p,p)$ 型 $(1<p\leqslant\infty)$ 以及 $(H,L)$ 型, 其中 $H_nf$ 表示部分和的加权平均, $H$ 表示 Hardy 空间. 借用此结果得到序列 $H_nf$ 是几乎处处收敛于可积函数 $f$.

## 2　定义及符号

我们用 $\mathbb{N}$、$\mathbb{P}$ 分别表示非负整数集合和正整数集合. $m:=(m_0,m_1,\ldots,m_k,\ldots)$ 和 $w:=(w_0,w_1,\ldots,w_k,\ldots)$ 是两自然数序列并满足 $m_k\geqslant2\,(k\in\mathbb{N})$. $Z_{m_k}$ 表示 $m_k$-离散循环群, 即 $Z_{m_k}=\{0,1,\ldots,m_k-1\}$. $G_m$ 表示由所有 $Z_{m_k}$ 生成的紧 Abel 群, 则 $G_m$ 中任一元素 $x$ 有如下表示形式: $x=(x_0,x_1,\ldots,x_k,\ldots)$, $x_k\in Z_{m_k}$. 群 $G_m$ 上拓扑可由 $I_n$ 诱导生成, 其中

$$I_n(0):=\{(x_0,x_1,\ldots,x_k,\ldots)\in G_m: x_k=0\ (k=0,\ldots,n-1)\},$$
$$I_0(0):=G_m,\ I_n(x):=I_n(0)+x,\quad n\in\mathbb{N}.$$

**引用格式:** Zhang C Z, Zhang X Y. Weighted average of Dirichlet kernels for two-dimensional Vilenkin-like systems (in Chinese). Sci Sin Math, 2010, 40(6): 593–602

若序列 $m$ 是有界的, 则称 Vilenkin 空间 $G_m$ 是有界的. 定义 $M_0 := 1$, $M_{k+1} := m_k M_k$ $(k \in \mathbb{N})$, 则任一自然数 $n$ 有唯一表达式 $n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k M_k, 0 \leqslant n_k < m_k, n_k \in \mathbb{N}$. 令 $|n| := \max\{k \in \mathbb{N} : n_k \neq 0\}$, $n^{(k)} = \sum_{j=k}^{\infty} n_j M_j$, 则 $M_{|n|} \leqslant n < M_{|n|+1}$ (参见文献 [8]).

**定义 2.1** 复值函数 $r_k^n : G_m \longrightarrow \mathcal{C}$ 称为广义 Rademacher 函数 [9], 假若满足如下三条性质:

(i) $r_k^n$ 是 $\Sigma_{k+1}$- 可测的 (i.e. $r_k^n(x)$ 紧依赖 $x_0, x_1, \dots, x_k$, $k, n \in \mathbb{N}$), $r_k^0 = 1$.

(ii) 若 $M_k$ 整除 $n$ 和 $l$, $n^{(k+1)} = l^{(k+1)}$ $(k, l, n \in \mathbb{N})$, 则

$$E_k(r_k^n \bar{r}_k^l) = \begin{cases} 1, & \text{当 } n_k = l_k, \\ 0, & \text{当 } n_k \neq l_k, \end{cases}$$

其中 $E_k$ 表示关于 $\Sigma_k$ 的条件期望算子, $\bar{z}$ 表示 $z$ 的共轭复数.

(iii) 对任意的 $n, k \in \mathbb{N}$, $|r_k^n| = 1$.

**定义 2.2** 定义 Vilenkin 型系统 $\psi = (\psi_n : n \in \mathbb{N})$ 如下:

$$\psi_n := \prod_{k=0}^{\infty} r_k^{n^{(k)}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

因 $r_k^0 = 1$, $\psi_n = \prod_{k=0}^{|n|} r_k^{n^{(k)}}$.

对可积函数 $f$ 用 $\hat{f}(k), S_n f, \sigma_n f$ 分别表示 Fourier 系数, 部分和及 Cesáro 均值, 即

$$\hat{f}(k) := \int_{G_m} f \bar{\psi}_k, \quad k \in \mathbb{N},$$
$$S_n f := \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k) \psi_k, \quad n \in \mathbb{P}, S_0 f := 0,$$
$$\sigma_n f := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k f, \quad n \in \mathbb{P}, \sigma_0 f := 0.$$

文中将用到如下记号:

$$W_n := \sum_{k=0}^{n-1} w_k, \quad D_n(y,x) := \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k(y) \bar{\psi}_k(x), \quad n \in \mathbb{P}, D_0 := 0,$$
$$K_n := \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} D_k, \quad n \in \mathbb{P}, K_0 := 0, \quad V_n := \frac{1}{W_n} \sum_{k=0}^{n-1} w_k D_k, \quad n \in \mathbb{P}, V_0 := 0,$$
$$V_{a,b} := \sum_{k=a}^{a+b-1} w_k D_k, \quad \psi_{k,n} := \prod_{s=n}^{\infty} r_s^{k^{(s)}}, \quad \psi_{k,n,l} := \prod_{s=n}^{l} r_s^{k^{(s)}}.$$

众所周知, Dirichlet 核具有如下性质 [9]:

$$D_{M_n}(y,x) = \begin{cases} M_n, & \text{当 } y \in I_n(x), \\ 0, & \text{当 } y \in G_m \backslash I_n(x). \end{cases} \tag{2.1}$$

下边我们介绍二维 Vilenkin 型系统. 对 $(n_1, n_2) = n \in \mathbb{N}^2$ 定义 $\vee n := \max\{n_1, n_2\}, \wedge n := \min\{n_1, n_2\}$. 取 $\tilde{m}$ 是一类似 $m$ 的序列. $\tilde{I}_n$ 类似于 $I_n$. 定义 $\tilde{n} = \tilde{n}(n) := \min\{l \in \mathbb{N} : M_n \leqslant \tilde{M}_l\}$,

则存在常数 $c$ 满足 $M_n \leqslant \tilde{M}_{\tilde{n}} \leqslant cM_n$ $(n \in \mathbb{N})$, 从而我们用 $cM_n$ $(c>1)$ 代替 $\tilde{M}_{\tilde{n}}$. 本文假定序列 $m, \tilde{m}, w$ 是有界的.

$G_m \times G_{\tilde{m}}$ 表示 $G_m$ 与 $G_{\tilde{m}}$ 的笛卡尔乘积. 若 $\tilde{\psi}$ 是空间 $G_{\tilde{m}}$ 的 Vilenkin 型系统, 从而我们定义乘积空间的的正交系统 $\psi \times \tilde{\psi}$:

$$\psi \times \tilde{\psi} := \{\psi_k(x) \cdot \tilde{\psi}_l(y) : k, l \in \mathbb{N}\,(x \in G_m, y \in G_{\tilde{m}})\}.$$

对 $n = (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$, $f \in L^1(G_m \times G_{\tilde{m}})$ 定义二维 Fourier 级数的部分和加权平均及 Cesàro 均值如下:

$$H_n f = f * (V_{n_1} \times V_{n_2}), \quad \sigma_n f = f * (K_{n_1} \times K_{n_2}),$$

其中 $V_{n_1} \times V_{n_2}(X, Y) = V_{n_1}(x_1, y_1) \cdot V_{n_2}(x_2, y_2), x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in G_m \times G_{\tilde{m}}$, $*$ 表示卷积, 即

$$H_{(n_1,n_2)} f(x) = \int_{G_m} \int_{G_{\tilde{m}}} f(u, v) V_{n_1}(x_1, u) V_{n_2}(x_2, v).$$

我们用 $T$ 表示加权平均极大算子, 即 $Tf := \sup_{n=(n_1,n_2)\in\mathbb{P}^2, \beta^{-1}\leqslant n_1/n_2\leqslant\beta} |H_n f|$.

原子分解方法是一个非常有效的方法，可以方便的将一维和多维情况统一处理 (参见文献 [10, 11, 12]).

**定义 2.3** 函数 $a \in L^\infty(G_m \times G_{\tilde{m}})$ 称为原子, 假若存在矩形 $I_k(x_1) \times \tilde{I}_{\tilde{k}}(x_2)$ $(x = (x_1, x_2) \in G_m \times G_{\tilde{m}})$ 满足

1) $\operatorname{supp} a \subset I_k(x_1) \times \tilde{I}_{\tilde{k}}(x_2)$,

2) $\|a\|_\infty \leqslant M_k \cdot \tilde{M}_{\tilde{k}}$,

3) $\int_{G_m \times G_{\tilde{m}}} a = 0$.

**定义 2.4** 称可积函数 $f \in L^1(G_m \times G_{\tilde{m}})$ 属于空间 $H(G_m \times G_{\tilde{m}})$, 假若存在常数序列 $\lambda_j \in \mathcal{C}$ $(j \in \mathbb{P})$ 和原子序列 $a_j$ $(j \in \mathbb{P})$ 满足 $\sum_{j=1}^\infty |\lambda_j| < \infty$, $f = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j a_j$. 此时空间 $H$ 是 Banach 空间, 范数为 $\|f\|_H := \inf \sum_{j=1}^\infty |\lambda_j|$, 其中下确界是由 $f$ 的所有原子分解来确定的.

**注** 文中出现的常数 $c$ 在不同的位置可表示不同的值.

## 3 主要结果

**定理 3.1** 算子 $T$ 是弱 $(1,1)$ 型和强 $(p,p)$ 型 $(1 < p \leqslant \infty)$, 即存在常数 $c$ 满足

$$\mu(\{Tf > \lambda\}) \leqslant c\frac{\|f\|_1}{\lambda}, \quad \forall \lambda > 0,\ \forall f \in L^1(G_m \times G_{\tilde{m}}),$$
$$\|Tf\|_p \leqslant c\|f\|_p, \quad \forall f \in L^p(G_m \times G_{\tilde{m}}).$$

**定理 3.2** 若 $f \in L^1(G_m \times G_{\tilde{m}})$, 则当 $n_1, n_2 \to \infty$, $\beta^{-1} \leqslant n_1/n_2 \leqslant \beta$ $(\beta \geqslant 1)$ 时, 序列 $H_{(n_1,n_2)} f$ 几乎处处收敛于 $f$.

**推论 3.3** 若 $f \in L^1(G_m \times G_{\tilde{m}})$, 则当 $n_1, n_2 \to \infty$, $\beta^{-1} \leqslant n_1/n_2 \leqslant \beta$ $(\beta \geqslant 1)$ 时, 序列 $\sigma_{(n_1,n_2)} f$ 几乎处处收敛于 $f$.

**定理 3.4** 算子 $T$ 是 $(H, L)$ 型的, 即存在常数 $c$ 满足 $\|Tf\|_1 \leqslant c\|f\|_H$, $\forall f \in H(G_m \times G_{\tilde{m}})$.

**引理 3.1**[9]

$$D_n(y, x) = \sum_{s=0}^\infty \psi_{n,s+1}(y) \bar{\psi}_{n,s+1}(x) D_{M_s}(y, x) \sum_{j=0}^{n_s - 1} r_s^{n^{(s+1)} + jM_s}(y) \bar{r}_s^{n^{(s+1)} + jM_s}(x).$$

**引理 3.2**

$$\int_{I_t(y)\backslash I_{t+1}(y)}|V_{n^{(s)},M_s}(y,x)|^2d\mu(x)\leqslant cM_t^2M_s,\quad s,t\in\mathbb{N}.$$

**证明** 假定 $s\leqslant t$. 当 $x\in I_t(y)\backslash I_{t+1}(y)$ 时, 有

$$\begin{aligned}|V_{n^{(s)},M_s}(y,x)|&\leqslant\sum_{k=n^{(s)}}^{n^{(s)}+M_s-1}w_k|\overline{D_k(y,x)}|\\&=\sum_{k=n^{(s)}}^{n^{(s)}+M_s-1}w_k\bigg|\sum_{i=0}^{t-1}M_i\prod_{k=i+1}^{t}\psi_{n,t}(y)\bar{\psi}_{n,t}(x)\sum_{j=0}^{n_i-1}|r_i^{n^{(i+1)}+jM_i}(y)|^2\\&\quad+M_t\psi_{n,t}(y)\bar{\psi}_{n,t}(x)\sum_{j=0}^{n_t-1}r_t^{n^{(t+1)}+jM_t}(y)\bar{r}_t^{n^{(t+1)}+jM_t}(x)\bigg|\\&\leqslant c\sum_{k=n^{(s)}}^{n^{(s)}+M_s-1}w_k\bigg(\sum_{i=0}^{t-1}M_i+M_t\bigg)\leqslant cM_tM_s.\end{aligned}$$

从而

$$\int_{I_t(y)\backslash I_{t+1}(y)}|V_{n^{(s)},M_s}(y,x)|^2d\mu(x)\leqslant cM_t^2M_s^2/M_t\leqslant cM_t^2M_s.\tag{3.1}$$

现假定 $s>t$. 当 $x\in I_t(y)\backslash I_{t+1}(y)$ 时, 有

$$\begin{aligned}\overline{V_{n^{(s)},M_s}(y,x)}&=\sum_{k=n^{(s)}}^{n^{(s)}+M_s-1}w_k\sum_{i=0}^{t-1}M_i|\psi_{k,i+1,t-1}(x)|^2\times\psi_{k,t}(y)\bar{\psi}_{k,t}(x)\sum_{l=0}^{k_i-1}|r_i^{k^{(i+1)}+lM_i}(x)|^2\\&\quad+\sum_{k=n^{(s+1)}+jM_s}^{n^{(s+1)}+(j+1)M_s-1}w_kM_t\psi_{k,t+1}(y)\bar{\psi}_{k,t+1}(x)\times\sum_{l=0}^{k_t-1}r_t^{k^{(t+1)}+lM_t}(y)\bar{r}_t^{k^{(t+1)}+lM_t}(x)\\&=\sum_{k=n^{(s)}}^{n^{(s)}+M_s-1}w_k\sum_{i=0}^{t-1}M_i\times\psi_{k,t}(y)\bar{\psi}_{k,t}(x)\sum_{l=0}^{k_i-1}|r_i^{k^{(i+1)}+lM_i}(x)|^2\\&\quad+\sum_{k=n^{(s+1)}+jM_s}^{n^{(s+1)}+(j+1)M_s-1}w_kM_t\psi_{k,t+1}(y)\bar{\psi}_{k,t+1}(x)\times\sum_{l=0}^{k_t-1}r_t^{k^{(t+1)}+lM_t}(y)\bar{r}_t^{k^{(t+1)}+lM_t}(x)\\&=:A_1(y,x)+A_2(y,x).\end{aligned}$$

由广义 Rademacher 定义 (iii) 知

$$\bigg|\sum_{l=0}^{k_t-1}r_t^{k^{(t+1)}+lM_t}(y)\bar{r}_t^{k^{(t+1)}+lM_t}(x)\bigg|\leqslant k_t\leqslant c.\tag{3.2}$$

又因

$$\int_{I_{t+1}(v)}\bar{\psi}_{k,t+1}(x)\psi_{l,t+1}(x)d\mu(x)=\frac{1}{M_{t+1}}E_{t+1}(\bar{\psi}_{k,t+1}\psi_{l,t+1}(v))=\begin{cases}\dfrac{1}{M_{t+1}}, & \text{当 } k^{(t+1)}=l^{(t+1)},\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 $k,l\in[n^{(s)},n^{(s+1)}+M_s),s>t,v\in G_m$. 令 $y\in I_t(u)$, 则

$$\begin{aligned}\int_{I_t(u)}|A_2(y,x)|^2d\mu(x)=&\sum_{u_t=0}^{m_t-1}\int_{I_{t+1}(u)}M_t^2\sum_{k,l\in[n^{(s)},n^{(s)}+M_s)}w_k\psi_{k,t+1}(y)\psi_{l,t+1}(y)w_l\bar{\psi}_{k,t+1}(x)\psi_{l,t+1}(x)\\&\cdot\sum_{i=0}^{k_t-1}r_t^{k^{(t+1)}+iM_t}(y)\bar{r}_t^{k^{(t+1)}+iM_t}(x)\sum_{a=0}^{l_t-1}r_t^{l^{(t+1)}+aM_t}(y)\bar{r}_t^{l^{(t+1)}+aM_t}(x)d\mu(x)\\\leqslant&\, cM_t^2\sum_{u_t=0}^{m_t-1}\frac{1}{M_{t+1}}\sup_{|k|=|n|\geqslant t}\sum_{k,l\in[n^{(s)},n^{(s)}+M_s),k^{(t+1)}=l^{(t+1)}}w_kw_l\\\leqslant&\, cM_t^2\sum_{k=n^{(s)}}^{n^{(s)}+M_s-1}w_k\leqslant cM_t^2M_s.\end{aligned}\tag{3.3}$$

另一方面, 当 $b<t$ 时, $r_b^k$ 是 $\Sigma_t$- 可测的, 从而

$$\int_{I_t(u)}|A_1(y,x)|^2d\mu(x)\leqslant cM_t^2\sum_{k,l\in[n^{(s)}+,n^{(s)}+M_s)}\bigg(\int_{I_t(u)}\bar{\psi}_{k,t}(x)\psi_{l,t}(x)d\mu(x)\bigg)|w_k\psi_{k,t}(y)w_l\bar{\psi}_{l,t}(y)|.$$

又因

$$\int_{I_t(u)}\bar{\psi}_{k,t}(x)\psi_{l,t}(x)d\mu(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{M_t}, & k^{(t)}=l^{(t)},\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

我们有

$$\begin{aligned}\int_{I_t(y)}|A_1(y,x)|^2d\mu(x)\leqslant&\sum_{k,l\in[n^{(s)},n^{(s)}+M_s),k^t=l^{(t)}}w_kw_l\frac{1}{M_t}cM_t^2\\\leqslant&\, cM_t^2\sum_{k=n^{(s)}}^{n^{(s)}+M_s-1}w_k\leqslant cM_t^2M_s.\end{aligned}\tag{3.4}$$

由于 $I_t(y)\backslash I_{t+1}(y)\subset I_t(y)=I_t(u)$, 引理 3.2 得到证明.

**引理 3.3** 令 $A,s,t\in\mathbb{N},A\geqslant s$, 则

$$\int_{I_t(y)\backslash I_{t+1}(y)}\sup_{|n|=A}|V_{n^{(s)},M_s}(y,x)|d\mu(x)\leqslant c(M_tM_A)^{\frac{1}{2}},\quad n\in\mathbb{N}.$$

**证明** 由引理 3.2 和 Cauchy 不等式知

$$\begin{aligned}&\int_{I_t(y)\backslash I_{t+1}(y)}\sup_{|n|=A}|V_{n^{(s)},M_s}(y,x)|d\mu(x)\\&\leqslant\bigg(\int_{I_t(y)\backslash I_{t+1}(y)}\Big(\sup_{|n|=A}|V_{n^{(s)},M_s}(y,x)|\Big)^2d\mu(x)\bigg)^{1/2}\times\mu(I_t(y)\backslash I_{t+1}(y))^{1/2}\\&\leqslant\frac{c}{(M_t)^{1/2}}\bigg(\int_{I_t(y)\backslash I_{t+1}(y)}\sum_{n_s=0}^{m_s-1}\sum_{n_{s+1}=0}^{m_{s+1}-1}\cdots\sum_{n_A=0}^{m_A-1}|V_{n^{(s)},M_s}(y,x)|^2d\mu(x)\bigg)^{1/2}\\&\leqslant c(m_s\cdot m_{s+1}\cdots m_AM_t^2M_s)^{1/2}\frac{1}{(M_t)^{1/2}}\end{aligned}$$

$$= c(M_A/M_s M_t^2 M_s)^{1/2} \frac{1}{(M_t)^{1/2}} = c(M_t M_A)^{1/2},$$

引理 3.3 得证.

**引理 3.4**

$$\int_{I_k(y)\backslash I_{k+1}(y)} \sup_{n \geqslant M_l} |V_n(y,x)| d\mu(x) \leqslant c\left(\frac{M_t}{M_l}\right)^{1/2}, \quad k,l \in \mathbb{N}.$$

**证明** 由引理 3.2 和引理 3.3 以及 $n^{(s)}$ 的定义 ($n^{(s)} = \sum_{n=s}^{\infty} n_s M_s = \sum_{n=s}^{|n|} n_s M_s$) 知,

$$\begin{aligned}
(1)(t \leqslant l) \quad & \int_{I_t(y)\backslash I_{t+1}(y)} \sup_{n \geqslant M_l} |V_n(y,x)| d\mu(x) \\
& \leqslant c \sum_{A=l}^{\infty} \left( \sum_{s=0}^{t} \int_{I_t(y)\backslash I_{t+1}(y)} \sup_{M_A \leqslant n^{(s)} < M_{A+1}} |V_{n^{(s)},M_s}(y,x)| d\mu(x) \right) \frac{1}{M_A} \\
& \quad + c \sum_{A=l}^{\infty} \left( \sum_{s=t+1}^{A} \int_{I_t(y)\backslash I_{t+1}(y)} \sup_{M_A \leqslant n^{(s)} < M_{A+1}} |V_{n^{(s)},M_s}(y,x)| d\mu(x) \right) \frac{1}{M_A} \\
& \leqslant c \sum_{A=l}^{\infty} \left( \sum_{s=0}^{t} M_t M_s \mu(I_t(y)\backslash I_{t+1}(y)) + (A-t)(M_t M_A)^{1/2} \right) \frac{1}{M_A} \\
& \leqslant c \sum_{A=l}^{\infty} \left( M_t/M_A + c \sum_{A=l}^{\infty} (A-t)(M_t M_A)^{1/2} \right) \frac{1}{M_A} \\
& \leqslant c M_t/M_l + c(l-t)\left(\frac{M_t}{M_l}\right)^{1/2} \leqslant c\left(\frac{M_t}{M_l}\right)^{1/2};
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
(2)(t > l) \quad & \int_{I_t(y)\backslash I_{t+1}(y)} \sup_{n \geqslant M_l} |V_n(y,x)| d\mu(x) \\
& = \int_{I_t(y)\backslash I_{t+1}(y)} \sup_{n \geqslant M_t} |V_n(y,x)| d\mu(x) + \int_{I_t(y)\backslash I_{t+1}(y)} \sup_{M_t > n \geqslant M_l} |V_n(y,x)| d\mu(x) \\
& \leqslant c + c M_t \mu(I_t(y)\backslash I_{t+1}(y)) \leqslant c(M_t/M_l)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

引理 3.4 得证.

令 $f \in L^1(G_m \times G_{\tilde{m}})$, supp $f \subset J = I_k(x_1) \times \tilde{I}_{\tilde{k}}(x_2)\,(k, \tilde{k} \in \mathbb{N}, (x_1,x_2) \in G_m \times G_{\tilde{m}})$.

**引理 3.5** 固定 $A, k \in \mathbb{N}$ 且满足 $A > k - c$, 则

$$\int_{G_m \times G_{\tilde{m}}\backslash J} \sup\{|H_n f| : n = (n_1,n_2) \in \mathbb{P}^2, \wedge n \geqslant M_A, \beta^{-1} \leqslant n_1/n_2 \leqslant \beta\} \leqslant c\left(\frac{M_k}{M_A}\right)^{1/2} \|f\|_1.$$

**证明** 我们按照如下方式分解集合 $G_m \times G_{\tilde{m}}\backslash J$ :

$$\begin{aligned}
G_m \times G_{\tilde{m}}\backslash J &= (G_m\backslash I_k(x_1)) \times (G_{\tilde{m}}\backslash \tilde{I}_{\tilde{k}}(x_2)) \cup (I_k(x_1) \times G_{\tilde{m}}\backslash \tilde{I}_{\tilde{k}}(x_2)) \cup G_m\backslash I_k(x_1)) \times \tilde{I}_{\tilde{k}}(x_2) \\
&=: J_1 \cup J_2 \cup J_3.
\end{aligned}$$

我们引入如下记号: 假定 $0 < d \leqslant D$,

$$L_d^{(D)} := \sup_{n \in \mathbb{P}^2,\ \beta^{-1} \leqslant n_1/n_2 \leqslant \beta, d \leqslant \wedge n \vee n \leqslant D}, \quad L_d := \sup_{n \in \mathbb{P}^2,\ \beta^{-1} \leqslant n_1/n_2 \leqslant \beta, d \leqslant \wedge n}.$$

由引理 3.4 和 Fubini 定理知

$$\begin{aligned}\int_{J_1} L_{M_A}|H_n f| &\leqslant \sum_{a=0}^{k-1}\sum_{b=0}^{\tilde{k}-1}\int_{(I_a(x_1)\backslash I_{a+1}(x_1))\times(\tilde{I}_b(x_2)\backslash\tilde{I}_{b+1}(x_2))}|L_{M_A}H_n f|\\
&= \sum_{a=0}^{k-1}\sum_{b=0}^{\tilde{k}-1}\int_{(I_a(x_1)\backslash I_{a+1}(x_1))\times(\tilde{I}_b(x_2)\backslash\tilde{I}_{b+1}(x_2))} L_{M_A}\left|\int_J f(y,z)V_{n_1}(y,u)V_{n_2}(z,v)d\mu(y)d\mu(z)\right|d\mu(u)d\mu(v)\\
&\leqslant c\sum_{a=0}^{k-1}\sum_{b=0}^{\tilde{k}-1}\int_J|f(y,z)|\int_{(I_a(x_1)\backslash I_{a+1}(x_1))\times(\tilde{I}_b(x_2)\backslash\tilde{I}_{b+1}(x_2))} L_{M_A}|V_{n_1}(y,u)V_{n_2}(z,v)|d\mu(u)d\mu(v)d\mu(y)d\mu(z)\\
&\leqslant c\sum_{a=0}^{k-1}\sum_{b=0}^{\tilde{k}-1}\left(\sqrt{\frac{M_a}{M_A}}\sqrt{\frac{\tilde{M}_b}{M_A}}\right)\int_J|f(y,z)| \leqslant c\sqrt{\frac{M_k}{M_A}}\sqrt{\frac{\tilde{M}_{\tilde{k}}}{M_A}}\int_J|f(y,z)|\leqslant c\frac{M_k}{M_A}\|f\|_1.\end{aligned}$$

以下, 我们考虑 $L_{M_A}|H_n f|$ 在 $J_3$ 的积分. 令 $e_i := (0,\dots,0,1,0,\dots)\in G_{\tilde{m}}$ $(i\in\mathbb{N})$. $\epsilon := \sum_{i=\tilde{k}}^{r}\epsilon_i e_i\in G_{\tilde{m}}, \tilde{k}, r\in\mathbb{N}, r>\tilde{k}$, 其中 $\epsilon_i\in Z_{\tilde{m}}, i=\tilde{k},\dots,r$. 则

$$J = I_k(x_1)\times\bigcup_{\epsilon_i\in Z_{\tilde{m}}, i=\tilde{k},\dots,r}\tilde{I}_{r+1}(x_2+\epsilon) =: \bigcup_{\epsilon} J_\epsilon.$$

若 $a=0,1,\dots,k-1$; $b=\tilde{k},\dots,r$; $\epsilon := \sum_{i=\tilde{k}}^{r}\epsilon_i e_i\in G_{\tilde{m}}$,

$$\begin{aligned}J_{3,\epsilon}^{a,b} &:= (I_a(x_1)\backslash I_{a+1}(x_1))\times(\tilde{I}_b(x_2+\epsilon)\backslash\tilde{I}_{b+1}(x_2+\epsilon)),\\
J_{3,\epsilon}^{a} &:= (I_a(x_1)\backslash I_{a+1}(x_1))\times(\tilde{I}_{r+1}(x_2+\epsilon)).\end{aligned}$$

则

$$J_3 = \left(\bigcup_{a=0}^{k-1}\bigcup_{b=\tilde{k}}^{r} J_{3,\epsilon}^{a,b}\right)\cup\bigcup_{a=0}^{k-1}J_{3,\epsilon}^{a}.$$

从而我们有

$$L_{M_A}|H_n f| \leqslant \sum_{r=A}^{\infty}\sup_{n=(n_1,n_2)\in\mathbb{P}^2,\beta^{-1}\leqslant n_1/n_2\leqslant\beta, M_r\leqslant\wedge n\leqslant M_{r+1}}|H_n f| \leqslant \sum_{r=A}^{\infty}L_{M_r}^{(\beta\cdot M_r+1)}|H_n f|. \tag{3.7}$$

假定 $A\geqslant k$, 则

$$\begin{aligned}\int_{J_3} L_{M_A}|H_n f| &\leqslant \sum_{r=A}^{\infty}\int_{J_3}L_{M_r}^{(\beta\cdot M_r+1)}|H_n f|\\
&= \sum_{r=A}^{\infty}\int_{J_3}L_{M_r}^{(\beta\cdot M_r+1)}\left|\int_J f(u,v)V_{n_1}(y,x)V_{n_2}(z,v)d\mu(u)d\mu(v)\right|d\mu(y)d\mu(z)\\
&\leqslant \sum_{r=A}^{\infty}\int_{J_3}L_{M_r}^{(\beta\cdot M_r+1)}\sum_{\varepsilon}\left|\int_{J_\epsilon} f(u,v)V_{n_1}(y,x)V_{n_2}(z,v)d\mu(u)d\mu(v)\right|d\mu(y)d\mu(z)\\
&\leqslant \sum_{r=A}^{\infty}\sum_{\epsilon}\Big(\sum_{a=0}^{k-1}\sum_{b=\tilde{k}}^{r}\int_{J_{3,\ \epsilon}^{a,b}}L_{M_r}^{(\beta\cdot M_r+1)}\left|\int_{J_\epsilon} f(u,v)V_{n_1}(y,x)V_{n_2}(z,v)d\mu(u)d\mu(v)\right|d\mu(y)d\mu(z)\\
&\quad +\sum_{a=0}^{k-1}\int_{J_{3,\ \epsilon}^{a}}L_{M_r}^{(\beta\cdot M_r+1)}\left|\int_{J_\epsilon} f(u,v)V_{n_1}(y,x)V_{n_2}(z,v)d\mu(u)d\mu(v)\right|d\mu(y)d\mu(z)\Big)\end{aligned}$$

$$=: \sum_{r=A}^{\infty} \sum_{\epsilon} (B^1 + B^2).$$

由引理 3.4 (类似于 $J_1$), 我们给出 $B^1$ 的上界.

$$\begin{aligned} B^1 &\leqslant \sum_{a=0}^{k-1} \sum_{b=\tilde{k}}^{r} \int_{J_{3,\ \epsilon}^{a,b}} L_{M_r}^{(\beta \cdot M_r+1)} \left| \int_{J_\epsilon} f(u,v) V_{n_1}(y,x) V_{n_2}(z,v) d\mu(u) d\mu(v) \right| d\mu(y) d\mu(z) \\ &\leqslant c \sum_{a=0}^{k-1} \sum_{b=\tilde{k}}^{r} \int_{J_\epsilon} |f| \sqrt{\frac{M_a \tilde{M_b}}{M_r^2}} \leqslant c \sum_{a=0}^{k-1} \sqrt{\frac{M_a}{M_r}} \int_{J_\epsilon} |f|. \end{aligned} \tag{3.8}$$

从而,

$$\sum_{r=A}^{\infty} \sum_{\epsilon} B^1 \leqslant c \left( \frac{M_k}{M_A} \right)^{1/2} \|f\|_1. \tag{3.9}$$

另一方面,

$$\begin{aligned} B^2 &\leqslant \sum_{a=0}^{k-1} \int_{J_{3,\ \epsilon}^{a}} L_{M_r}^{(\beta \cdot M_r+1)} \left| \int_{J_\epsilon} f(u,v) V_{n_1}(y,x) V_{n_2}(z,v) d\mu(u) d\mu(v) \right| d\mu(y) d\mu(z) \\ &\leqslant c \sum_{a=0}^{k-1} \int_{J_\epsilon} |f(u,v)| \int_{J_{3,\ \epsilon}^{a}} L_{M_r}^{(\beta \cdot M_r+1)} |V_{n_1}(y,x) V_{n_2}(z,v)| d\mu(y) d\mu(z) d\mu(u) d\mu(v) \\ &\leqslant c \sum_{a=0}^{k-1} \int_{J_\epsilon} |f(u,v)| \left( \frac{M_a}{M_r} \right)^{1/2} \frac{\beta \cdot M_r + 1}{M_r} \leqslant c \sqrt{\frac{M_k}{M_r}} \int_{J_\epsilon} |f|. \end{aligned} \tag{3.10}$$

此即意味

$$\sum_{r=A}^{\infty} \sum_{\epsilon} B^2 \leqslant c \sqrt{\frac{M_k}{M_A}} \|f\|_1. \tag{3.11}$$

假定 $A \leqslant k$, 由条件 $k - c < A \leqslant k$ 及引理 3.4 和 Fubini 定理知,

$$\begin{aligned} \int_{J_3} L_{M_A} |H_n f| &\leqslant \sum_{r=A}^{\infty} \int_{J_3} L_{M_r}^{(\beta \cdot M_r+1)} |H_n f| \\ &= \sum_{r=A}^{\infty} \int_{J_3} L_{M_r}^{(\beta \cdot M_r+1)} \left| \int_J f(u,v) V_{n_1}(y,x) V_{n_2}(z,v) d\mu(u) d\mu(v) \right| d\mu(y) d\mu(z) \\ &= \sum_{r=k+1}^{\infty} \int_{J_3} L_{M_r}^{(\beta \cdot M_r+1)} \left| \int_J f(u,v) V_{n_1}(y,x) V_{n_2}(z,v) d\mu(u) d\mu(v) \right| d\mu(y) d\mu(z) \\ &\quad + \sum_{r=A}^{k} \int_{J_3} L_{M_r}^{(\beta \cdot M_r+1)} \left| \int_J f(u,v) V_{n_1}(y,x) V_{n_2}(z,v) d\mu(u) d\mu(v) \right| d\mu(y) d\mu(z) \\ &\leqslant c \sqrt{\frac{M_k}{M_k}} \|f\|_1 + c \sum_{r=A}^{k} \int_J |f(u,v)| \int_{J_3} L_{M_r}^{(\beta \cdot M_r+1)} |V_{n_1}(y,x) V_{n_2}(z,v)| d\mu(y) d\mu(z) d\mu(u) d\mu(v) \\ &\leqslant c \|f\|_1 + c \sum_{r=A}^{k} \|f\|_1 \sum_{a=0}^{k-1} \sqrt{M_a / M_r} \frac{\beta \cdot M_r + 1}{M_k} \leqslant c \sqrt{\frac{M_k}{M_A}} \|f\|_1. \end{aligned} \tag{3.12}$$

从而,

$$\int_{J_3} L_{M_A} |H_n f| \leqslant c \sqrt{\frac{M_k}{M_A}} \|f\|_1. \tag{3.13}$$

我们可以类似讨论在 $J_2$ 上的积分. 从而

$$\int_{G_m\times G_{\tilde{m}}\setminus J} L_{M_A}|H_nf|\leqslant c\left(\frac{M_k}{M_A}\right)^{1/2}\|f\|_1. \tag{3.14}$$

引理 3.5 得证.

**引理 3.6** (C-Z 分解)　假定 $f\in L^1(G_m\times G_{\tilde{m}}),\lambda>\|f\|_1$. 则存在常数 $c$ (仅依赖于 $m_n,\ \tilde{m}_n$), $f$ 的分解 $f=\sum_{j=0}^{\infty}f_j$ 及一列互不相交集合 $J_n:=I_{k_n}(x_1^{(n)})\times\tilde{I}_{\tilde{k}_n}(x_2^{(n)})$, 满足 $\operatorname{supp} f_j\subset J_n$,

$$\int_{J_n}f_n=0\int_{J_n}\|f_n\|d\mu\leqslant c\lambda\mu(J_n),\ n\in\mathbb{P},\quad \|f_0\|_\infty\leqslant c\lambda,\quad \|f_0\|_1\leqslant c\|f\|_1,\quad \mu(F)\leqslant\frac{c\|f\|_1}{\lambda},$$

其中 $F=\bigcup_{n\in\mathbb{P}}J_n$.

## 4　定理的证明

**定理 3.1 的证明**　假定 $f\in L^1(G_m\times G_{\tilde{m}})$. 由算子 $T$ 的次线性知

$$\begin{aligned}\mu(\{Tf>2c\lambda\})&\leqslant\mu(\{Tf_0>2c\lambda\})+\mu(F)+\frac{1}{c\lambda}\int_{G_m\times G_{\tilde{m}}\setminus F}T\left(\sum_{i=1}^{\infty}f_i\right)\\&\leqslant c\frac{\|f\|_1}{\lambda}+\sum_{i=1}^{\infty}\int_{G_m\times G_{\tilde{m}}\setminus F}Tf_i.\end{aligned}$$

由广义 Rademacher 函数及 Dirichlet 核的加权平均的定义知, 当 $n_1\leqslant M_{k_i},n_2<\tilde{M}_{\tilde{k}_i}$ 时 $H_{(n_1,n_2)}f_i=0$. 从而

$$\begin{aligned}Tf_i&=\{\sup|H_nf_i|:n=(n_1,n_2)\in\mathbb{P}^2,\beta^{-1}\leqslant n_1/n_2\leqslant\beta\}\\&=\{\sup|H_nf_i|:n=(n_1,n_2)\in\mathbb{P}^2,\beta^{-1}\leqslant n_1/n_2\leqslant\beta,n_1\leqslant M_{k_i}\ \text{或}\ n_2\geqslant\tilde{M}_{\tilde{k}_i}\geqslant M_{k_i}\}\\&\leqslant\{\sup|H_nf_i|:n=(n_1,n_2)\in\mathbb{P}^2,\beta^{-1}\leqslant n_1/n_2\leqslant\beta,\wedge n\geqslant M_{k_i}\}.\end{aligned}$$

由引理 3.5 得

$$\begin{aligned}\mu(\{Tf>2c\lambda\})&\leqslant c\frac{\|f\|_1}{\lambda}+\frac{1}{c\lambda}\sum_{i=1}^{\infty}\int_{G_m\times G_{\tilde{m}}\setminus F}Tf_i\leqslant c\frac{\|f\|_1}{\lambda}+\frac{1}{c\lambda}\sum_{i=1}^{\infty}\int_{G_m\times G_{\tilde{m}}\setminus J_i}Tf_i\\&\leqslant c\frac{\|f\|_1}{\lambda}+c\frac{\|f_i\|_1}{\lambda}\leqslant c\frac{\|f\|_1}{\lambda}+c\frac{1}{\lambda}\int_{G_m\times G_{\tilde{m}}}|f-f_0|\leqslant c\frac{\|f\|_1}{\lambda}.\end{aligned}$$

从而算子 $T$ 是 $(1,1)$ 型的. 又因 $\|V_{n_1}\times V_{n_2}\|_1\leqslant c\,(n_1,n_2\in\mathbb{P})$ 即算子是 $(\infty,\infty)$ 型的, 由内插定理知结论成立.

**定理 3.2 的证明**　因二维多项式 $P=\sum_{k=0}^{r}\sum_{l=0}^{s}c_{k,l}\psi_k\bar{\psi}_l$ $(c_{k,l}\in\mathcal{C},r,s\in\mathbb{P})$ 满足

$$\lim_{\wedge n\to\infty}H_{(n_1,n_2)}P=P,$$

点点成立, 由稠密理论及定理 3.1 知定理成立.

**定理 3.4 的证明**　假定 $a$ 为原子且满足 $\operatorname{supp}a\subset I_k(x_1)\times\tilde{I}_{\tilde{k}}(x_2)=J,\|a\|_\infty\leqslant M_k\cdot\tilde{M}_{\tilde{k}}$ $(k,\tilde{k}\in\mathbb{P},x=(x_1,x_2)\in G_m\times G_{\tilde{m}})$

$$\|Ta\|_1\leqslant\int_J|Ta|+\int_{G_m\times G_{\tilde{m}}\setminus J}|Ta|.$$

由于算子 $T$ 是强 (2,2) 型的, 则

$$\int_J |Ta| \leqslant c\|Ta\|_2\mu(J)^{1/2} \leqslant c\|a\|_2\mu(J)^{1/2} \leqslant c\|a\|_\infty\mu(J) \leqslant c.$$

从而当 $n_1 \leqslant M_k, n_2 < \tilde{M}_{\tilde{k}}$ 时 $H_{(n_1,n_2)}a = 0$. 由引理 3.5 知

$$\int_{G_m\times G_{\tilde{m}}\setminus J} |Ta| \leqslant c\int_{G_m\times G_{\tilde{m}}\setminus J} L_{M_k}|H_n a| \leqslant c\|a\|_1 \leqslant \|a\|_\infty\mu(J) \leqslant c.$$

定理得证.

**致谢** 感谢审稿人提出的宝贵意见.

## 参考文献


1 Marcinkiewicz J, Zygmund A. On the summability of double Fourier series. Fund Math, 1939, 32: 122–132
2 Móricz F, Schipp F, wade W R. Cesàro summability of double Walsh-Fourier series. Trans Amer Math Soc, 1992, 329: 131–140
3 Weisz F. Cesàro summability of one-and two-dimensional Walsh-Fourier series. Analysis Math, 1996, 22: 229–242
4 Taibleson M H. Fourier series on the ring of integers in a $p$-series field. Bull Amer Math Soc, 1967, 73: 623–629
5 Gát G. On the almost everywhere convergence of Fejer means of functions on the group of 2-adic integers. J Approx Theory, 1997, 90: 88–96
6 Gát G. Point convergence of double Walsh-Fejer means. Annales Univ Sci Budapestiensis, Sectio Computatorica, 1996, 16: 173–184
7 Goginava U. Marcinkiewicz-Fejér means of $d$-dimensional Walsh-Fourier series. J Math Anal Appl, 2005, 307: 206–218
8 Schipp F, Wade W R, Simon P, Pál P. Walsh Series, an Introduction to dyadic Harmonic Analysis. Bristol: Hilger, 1990
9 Gát G. On summability for Vilenkin-like systems. Studia Math, 2001, 144: 101–120
10 Fujii N. A maximal inequality for $H^1$ functions on the generalized Walsh-Paley group. Proc Amer Math Soc, 1979, 77: 111–116
11 Weisz F. Martingale Hardy Spaces and Their Applications in Fourier Analysis. Berlin: Springer-Verlag, 1994
12 Weisz F. Martingale Hardy spaces and the dyadic derivative. Analysis Math, 1998, 24: 59–77


# Weighted average of Dirichlet kernels for two-dimensional Vilenkin-like systems

ZHANG ChuanZhou & ZHANG XueYing

**Abstract** For two-dimensional Vilenkin-like systems we define the weighted maximal operator $T$ (i.e. $Tf := \sup_{n=(n_1,n_2)\in\mathbb{P}^2,\beta^{-1}\leqslant n_1/n_2\leqslant\beta}|H_nf|$), where $H_nf$ is the weighted average for partial sums and prove the operator $T$ is of weak type $(1,1)$ and of type $(p,p)$ for $1 < p \leqslant \infty$. As a consequence, we prove the a.e. convergence of sequence $H_nf$ provided the quotient of the indices is bounded. Moreover the operator $T$ is of type $(H,L)$, where $H$ is the Hardy space.

**Keywords: Vilenkin-like system, weighted average, a.e. convergence**
**MSC(2000): 42C10**