



# 二维有限元复形

陈龙<sup>1</sup>, 黄学海<sup>2\*</sup>

1. Department of Mathematics, University of California at Irvine, Irvine, CA 92697, USA;

2. 上海财经大学数学学院, 上海 200433

E-mail: chenlong@math.uci.edu, huang.xuehai@sufe.edu.cn

收稿日期: 2023-03-18; 接受日期: 2024-02-07; 网络出版日期: 2024-04-25; \* 通信作者

美国国家科学基金 (批准号: DMS-1913080 和 DMS-2012465)、国家自然科学基金 (批准号: 12171300) 和上海市自然科学基金 (批准号: 21ZR1480500) 资助项目

**摘要** 本文首次系统性地构建具有各种光滑度的二维有限元复形, 涵盖了 de Rham 复形、curl div 复形、弹性复形、Hessian 复形和 div div 复形等. 首先借助单纯形格点的几何分解和多项式空间的 Bernstein 基, 构造二维光滑标量有限元, 其中顶点处的可微性阶数至少是边上的两倍. 其次, 通过使用光滑参数满足特定关系的光滑有限元, 设计不同光滑度的有限元 de Rham 复形. 最后, 利用 Bernstein-Gelfand-Gelfand (BGG) 框架, 基于有限元 de Rham 复形构造出有限元弹性复形、有限元 Hessian 复形和有限元 div div 复形等. 本研究是首次系统地构建有限元复形的工作. 此外, 单纯形格点的几何分解和离散 BGG 构造等新工具, 也将有助于本领域的进一步研究.

**关键词** 有限元复形 Bernstein-Gelfand-Gelfand 框架 光滑有限元 几何分解 单纯形格点 Bernstein 基**MSC (2020) 主题分类** 65N30, 58J10

## 1 引言

Hilbert 复形在偏微分方程理论分析及其稳定数值方法设计中扮演着核心角色 (参见文献 [2, 3, 6, 13]). Arnold 和 Hu<sup>[7]</sup> 提出了 Bernstein-Gelfand-Gelfand (BGG) 框架的系统方法, 用以从诸如 de Rham 复形这样的经典微分复形中衍生出新的复形. 本文旨在将 BGG 框架推广到二维区域上的有限元复形, 二维区域上的有限元复形涵盖了不同光滑性级别的有限元 de Rham 复形、有限元 curl div 复形、有限元弹性复形、有限元 Hessian 复形及有限元 div div 复形等.

首先, 应用 Hu 等<sup>[32]</sup> 的工作, 通过几何分解的方法来构造光滑有限元. 考虑区域  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  上的三角剖分  $\mathcal{T}_h$ . 顶点和边上的光滑度 (可微性) 分别由参数  $r^v$  和  $r^e$  确定, 用  $\mathbf{r} = (r^v, r^e)$  表示. 当  $r^v \geq 2r^e$  且  $k \geq 2r^v + 1$  时, 利用单纯形格点  $\mathbb{T}_k^2 = \{\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^{0:2} \mid \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = k\}$  的几何分解和多项式的 Bernstein 基  $\{\lambda^\alpha, \alpha \in \mathbb{T}_k^2\}$  来构建  $C^{r^e}$  连续的有限元空间  $\mathbb{V}_k(\mathcal{T}_h; \mathbf{r})$ , 其中  $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$  代表重心坐标.  $C^{r^e}$  连续性确保了  $\mathbb{V}_k(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}) \subset H^{r^e+1}(\Omega)$ .

英文引用格式: Chen L, Huang X H. Finite element complexes in two dimensions (in Chinese). Sci Sin Math, 2025, 55: 1593–1626, doi: 10.1360/SCM-2023-0169

接下来, 给出 de Rham 复形的有限元离散. 对于  $r \geq 1$ , 有如下的 de Rham 复形:

$$\mathbb{R} \hookrightarrow H^{r+1}(\Omega) \xrightarrow{\text{curl}} \mathbf{H}^r(\Omega; \mathbb{R}^2) \xrightarrow{\text{div}} H^{r-1}(\Omega) \rightarrow 0; \tag{1.1}$$

对于  $r \geq 0$  且  $s \geq \max\{r - 1, 0\}$  混合正则性的情形, 有

$$\mathbb{R} \hookrightarrow H^{r+1}(\Omega) \xrightarrow{\text{curl}} \mathbf{H}^{r,s}(\text{div}, \Omega) \xrightarrow{\text{div}} H^s(\Omega) \rightarrow 0, \tag{1.2}$$

其中  $\mathbf{H}^{r,s}(\text{div}, \Omega)$  定义为满足  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^r(\Omega; \mathbb{R}^2)$  和  $\text{div} \mathbf{v} \in H^s(\Omega)$  的向量场空间. 显然, (1.1) 是 (1.2) 的一种特殊情形, 也被称为 Stokes 复形, 因为  $H^1(\Omega; \mathbb{R}^2) \times L^2(\Omega)$  对应到 Stokes 方程的速度和压力空间.

选择整数向量  $\mathbf{r}_0 = (r_0^v, r_0^e)$ ,  $\mathbf{r}_1 = (r_1^v, r_1^e)$ ,  $\mathbf{r}_2 = (r_2^v, r_2^e)$ , 满足  $r_1^v \geq 2r_1^e + 1$ ,  $r_2^v \geq 2r_2^e$ ,  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 + 1$ ,  $\mathbf{r}_1 \geq -1$ ,  $\mathbf{r}_2 \geq \mathbf{r}_1 \ominus 1 := \max\{\mathbf{r}_1 - 1, -1\}$ , 以及  $k$  足够大, 本文构建如下具有不同光滑度的有限元 de Rham 复形:

$$\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{V}_{k+1}^{\text{curl}}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_0) \xrightarrow{\text{curl}} \mathbb{V}_k^{\text{div}}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \xrightarrow{\text{div}} \mathbb{V}_{k-1}^{L^2}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_2) \rightarrow 0, \tag{1.3}$$

这是 de Rham 复形 (1.2) 的协调有限元离散. 当  $\mathbf{r}_1 \geq 0$  时, (1.3) 也是 Stokes 复形 (1.1) 的协调有限元离散.

通过对向量场和微分算子作旋转, 还可以得到包含 grad 算子和 rot 算子的有限元 de Rham 复形

$$\mathbb{R} \xhookrightarrow{\subset} \mathbb{V}_{k+1}^{\text{grad}}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_0) \xrightarrow{\text{grad}} \mathbb{V}_k^{\text{rot}}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \xrightarrow{\text{rot}} \mathbb{V}_{k-1}^{L^2}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_2) \rightarrow 0, \tag{1.4}$$

其中  $\mathbb{V}_k^{\text{rot}}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  空间可应用于 Maxwell 方程或四阶 curl 问题的离散求解. 将两个有限元 de Rham 复形 (1.3) 拼接在一起可以得到有限元 curl div 复形

$$\mathbb{R} \times \{0\} \xhookrightarrow{\subset} \mathbb{V}_{k+1}^{\text{curl}}(\mathbf{r}_0) \times \mathbb{R} \xrightarrow{(\text{curl}, \mathbf{x})} \mathbb{V}_k^{\text{div}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \xrightarrow{\text{curl div}} \mathbb{V}_{k-2}^{\text{div}}(\mathbf{r}_2 - 1, \mathbf{r}_3) \xrightarrow{\text{div}} \mathbb{V}_{k-3}^{L^2}(\mathbf{r}_3) \rightarrow 0.$$

现有文献中多个二维区域上的有限元 de Rham 复形是 (1.3) 或 (1.4) 的特例, 详见表 1. 满足  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 + 1$  和  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 - 1$  的有限元 de Rham 复形 (1.3) 在最近的研究文献 [32] 中构造. 本文考虑更一般的情形  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 + 1$  和  $\mathbf{r}_2 \geq \mathbf{r}_1 \ominus 1$ , 这为后面构造更多的有限元复形打下了基础. 对于一些从协调有限元 de Rham 复形修改而来的非协调 Stokes 复形可参见文献 [28, 37]. 非协调 Stokes 复形不包含在我们的框架中.

接着利用 BGG 框架 [7] 来构建更多的有限元复形. 当  $\mathbf{r}_1 \geq -1$  和  $\mathbf{r}_2 \geq \mathbf{r}_1 \ominus 1$  满足  $r_1^v \geq 2r_1^e + 2$  和  $r_2^v \geq 2r_2^e$  并且多项式次数  $k$  足够大时, 本文设计了 BGG 图 (如图 1 所示), 并从中推导出有限元弹性复形

$$\mathbb{P}_1 \xhookrightarrow{\subset} \mathbb{V}_{k+2}^{\text{curl}}(\mathbf{r}_1 + 2) \xrightarrow{\text{Airy}} \mathbb{V}_k^{\text{div}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbb{S}) \xrightarrow{\text{div}} \mathbb{V}_{k-1}^{L^2}(\mathbf{r}_2; \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbf{0}. \tag{1.5}$$

表 1 有限元 de Rham 复形 (1.3) 的例子

$k \geq$	$\mathbf{r}_0$	$\mathbf{r}_1$	$\mathbf{r}_2$	结果
1	(0, 0)	(-1, -1)	(-1, -1)	标准结果
4	(0, 0)	(-1, -1)	(0, 0)	文献 [34, 第 5.2.1 小节]
4	(2, 1)	(1, 0)	(0, -1)	文献 [26, 第 3 节]
4	(2, 1)	(1, 0)	(0, 0)	文献 [26, 第 4 节]
2	(1, 0)	(0, -1)	(-1, -1)	文献 [23, 第 2.2 小节]

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbb{R} & \xrightarrow{\subset} & \mathbb{V}_{k+2}^{\text{curl}}(\mathbf{r}_1 + 2) & \xrightarrow{\text{curl}} & \mathbb{V}_{k+1}^{\text{div}}(\mathbf{r}_1 + 1) & \xrightarrow{\text{div}} & \mathbb{V}_k^{L^2}(\mathbf{r}_1) \longrightarrow 0 \\
 & & & \nearrow \text{id} & & \nearrow -2 \text{sskw} & \\
 \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\subset} & \mathbb{V}_{k+1}^{\text{curl}}(\mathbf{r}_1 + 1; \mathbb{R}^2) & \xrightarrow{\text{curl}} & \mathbb{V}_k^{\text{div}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbb{M}) & \xrightarrow{\text{div}} & \mathbb{V}_{k-1}^{L^2}(\mathbf{r}_2; \mathbb{R}^2) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

图 1 有限元弹性复形的 BGG 图

当  $\mathbf{r}_1 \geq 0$  和  $\mathbf{r}_2 \geq \max\{\mathbf{r}_1 - 2, -1\}$  以及多项式次数  $k$  足够大时, 我们构建了 BGG 图 (如图 2 所示), 并从中推导出有限元  $\text{div div}$  复形

$$\mathbf{RT} \xrightarrow{\subset} \mathbb{V}_{k+1}^{\text{curl}}(\mathbf{r}_1 + 1; \mathbb{R}^2) \xrightarrow{\text{sym curl}} \mathbb{V}_k^{\text{div div}^+}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbb{S}) \xrightarrow{\text{div div}} \mathbb{V}_{k-2}^{L^2}(\mathbf{r}_2) \rightarrow 0, \tag{1.6}$$

其中  $\mathbb{V}_k^{\text{div div}^+}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbb{S}) \subset \mathbf{H}(\text{div div}, \Omega; \mathbb{S}) \cap \mathbf{H}(\text{div}, \Omega; \mathbb{S})$  (详细信息见第 5 节). 文献 [14, 33] 中构建的有限元  $\text{div div}$  复形对应于  $\mathbf{r}_1 = (0, -1)$  和  $\mathbf{r}_2 = (-1, -1)$  的情形.

现有的一些二维有限元复形可以视作 (1.5) 或 (1.6) 的特例, 汇总在表 2 中. 然而, 文献 [24] 中基于 Clough-Tocher 分裂构建的离散弹性复形和  $\text{rot rot}$  复形 (因为使用分片多项式作为形函数空间) 不包含在 (1.5) 和 (1.6) 中.

近年来, 有限元 Hessian 复形、弹性复形和  $\text{div div}$  复形的构建方面取得了多项进展 (参见文献 [14–16, 22, 29–31, 33]). 我们的长远目标是将 BGG 构造扩展到有限元复形, 从而能够统一这些构造. 在这项工作中, 我们尝试在 2 维情形下统一有限元复形的构造. 然而, 将其扩展到 3 维, 还有很大的困难.

其中一个挑战是构造 3 维空间具有不同光滑度的有限元 de Rham 复形, 我们将在后续工作文献 [18] 中讨论. 当空间为 2 维时,  $H(\text{curl})$ - 协调有限元空间可以通过旋转  $H(\text{div})$ - 协调有限元空间得到. 当空间为 3 维时,  $H(\text{curl})$ - 协调有限元空间 (也称为棱单元) 要比  $H(\text{div})$ - 协调有限元空间更为复杂. 此外, 将 BGG 框架推广到离散情形的主要障碍是  $H(\text{curl})$  或  $H(\text{div})$  协调的有限元空间需要切向或法向连续性, 两者的连续性不匹配. 在文献 [7] 中, 处理的是  $H^s(\Omega)$  空间, 并选择匹配的指数  $s$ , 而不是  $H(\text{curl}, \Omega)$  空间或  $H(\text{div}, \Omega)$  空间. 我们将在未来的工作 [17] 中探讨这些困难的解决方案.

为了便于清晰和有效的讨论, 本文将 2 维和 3 维情形分开处理. 尽管 2 维情形更为简单, 并为 3 维情形提供了一些洞见, 但由于两种情形的差异, 目前无法以统一的方式同时处理它们. 我们也希望通

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\subset} & \mathbb{V}_{k+1}^{\text{curl}}(\mathbf{r}_1 + 1; \mathbb{R}^2) & \xrightarrow{\text{curl}} & \mathbb{V}_k^{\text{div div}^+}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbb{M}) & \xrightarrow{\text{div}} & \mathbb{V}_{k-1}^{\text{div}}(\mathbf{r}_1 - 1, \mathbf{r}_2) \longrightarrow 0 \\
 & & & \nearrow \text{mskw} & & \nearrow \text{id} & \\
 \mathbb{R} & \xrightarrow{\subset} & \mathbb{V}_k^{\text{curl}}(\mathbf{r}_1) & \xrightarrow{\text{curl}} & \mathbb{V}_{k-1}^{\text{div}}(\mathbf{r}_1 - 1, \mathbf{r}_2) & \xrightarrow{\text{div}} & \mathbb{V}_{k-2}^{L^2}(\mathbf{r}_2) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

图 2 有限元  $\text{div div}$  复形的 BGG 图

表 2 有限元弹性复形和  $\text{div div}$  复形的例子

类型	$k$	$\mathbf{r}_1$	$\mathbf{r}_2$	结果
弹性复形 (1.5)	$\geq 3$	$(0, -1)$	$(-1, -1)$	文献 [23, 第 6 节]
Hessian 复形 ((1.5) 的旋转)	$\geq 5$	$(0, -1)$	$(0, 0)$	文献 [16, 第 5.1 小节]
$\text{div div}$ 复形 (1.6)	$\geq 6$	$(1, 0)$	$(0, 0)$	文献 [16, 第 5.2 小节]
$\text{div div}$ 复形 (5.13)	$\geq 3$	$(0, -1)$	$(-1, -1)$	文献 [33, 第 2.3 小节]
$\text{div div}$ 复形 (5.15)	$\geq 3$	$(0, -1)$	$(-1, -1)$	文献 [14, 第 3.3 小节]

过 2 维相对简单的情形, 将我们的思路和方法更好地呈现出来, 这有助于理解更为复杂的 3 维和高维情形. 本文构建有限元复形的系统方法也可以推广到矩形网格.

本文余下内容的结构如下. 第 2 节回顾 de Rham 复形和 BGG 框架. 第 3 节研究二维  $C^m$ - 协调有限元的几何分解. 第 4 节构建具有各种光滑性的有限元 de Rham 复形. 第 5 节介绍基于 BGG 方法构造的更多有限元复形.

## 2 Hilbert 复形概述

本节介绍与二维区域  $\Omega$  相关的 Hilbert 复形的基本概念, 包括一些针对标量、向量或张量函数的微分算子.

### 2.1 符号说明

对于标量函数  $v$ , 定义

$$\text{mskw } v := \begin{pmatrix} 0 & -v \\ v & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{curl } v := \left( \frac{\partial v}{\partial x_2}, -\frac{\partial v}{\partial x_1} \right)^\top = (\text{grad } v)^\perp,$$

其中,  $(a, b)^\perp := (b, -a)$  表示顺时针旋转  $90^\circ$ ,  $\text{hess} := \text{grad grad}$ ,

$$\text{Air } v := \text{curl curl } v = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} & -\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \\ -\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \end{pmatrix}.$$

因此有  $\text{div}(\text{mskw } v) = -\text{curl } v$ . 对于向量函数  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ , 定义

$$\text{rot } \mathbf{v} := \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \text{div } \mathbf{v}^\perp.$$

对于张量函数

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{pmatrix},$$

定义

$$\text{sym } \boldsymbol{\tau} := \frac{1}{2}(\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}^\top), \quad \text{skw } \boldsymbol{\tau} := \frac{1}{2}(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}^\top), \quad \text{sskw } \boldsymbol{\tau} := \text{mskw}^{-1} \circ \text{skw } \boldsymbol{\tau} = \frac{1}{2}(\tau_{21} - \tau_{12}).$$

直接计算可得

$$\text{div } \mathbf{v} = 2 \text{sskw}(\text{curl } \mathbf{v}), \quad \text{rot } \mathbf{v} = 2 \text{sskw}(\text{grad } \mathbf{v}). \quad (2.1)$$

### 2.2 Hilbert 复形与正合序列

Hilbert 复形是由一系列 Hilbert 空间  $\{\mathcal{V}_i\}$  和一系列稠定闭线性算子  $\{d_i\}$  连接的序列

$$0 \hookrightarrow \mathcal{V}_1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{V}_2 \xrightarrow{d_2} \cdots \xrightarrow{d_{n-2}} \mathcal{V}_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \mathcal{V}_n \xrightarrow{d_n} 0, \quad (2.2)$$

满足性质  $\text{img}(d_i) \subseteq \ker(d_{i+1})$ . 若复形满足  $\ker(d_1) = 0$  且对  $i = 1, \dots, n-1$  成立  $\text{img}(d_i) = \ker(d_{i+1})$ , 则称复形 (2.2) 为正合序列. 在正合序列中,  $d_1$  是单射且  $d_{n-1}$  是满射. 更多关于 Hilbert 复形的背景知识参见文献 [2]. 为简化表述, 通常省略复形起始的零空间, 并用  $\mathcal{V}_0 \xrightarrow{c} \mathcal{V}_1$  来表示嵌入映射.

对于由有限维 Hilbert 空间组成的复形, 验证正合性主要依靠计算维数.

**引理 2.1** 设

$$\mathcal{V}_0 \xrightarrow{c} \mathcal{V}_1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{V}_2 \xrightarrow{d_2} \mathcal{V}_3 \rightarrow 0 \quad (2.3)$$

是一个复形, 其中  $\mathcal{V}_i$  是有限维线性空间. 假设  $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}_1 \cap \ker(d_1)$ , 并且

$$\dim \mathcal{V}_0 - \dim \mathcal{V}_1 + \dim \mathcal{V}_2 - \dim \mathcal{V}_3 = 0. \quad (2.4)$$

如果  $d_1 \mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2 \cap \ker(d_2)$  或者  $d_2 \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_3$ , 则复形 (2.3) 是正合的.

**证明** 根据等式 (2.4) 和关系  $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}_1 \cap \ker(d_1)$ , 通过维数计数来证明  $d_1 \mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2 \cap \ker(d_2)$  和  $d_2 \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_3$  等价. 由于  $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}_1 \cap \ker(d_1)$ , 所以

$$\dim d_1 \mathcal{V}_1 = \dim \mathcal{V}_1 - \dim(\mathcal{V}_1 \cap \ker(d_1)) = \dim \mathcal{V}_1 - \dim \mathcal{V}_0.$$

然后根据 (2.4) 可知

$$\dim(\mathcal{V}_2 \cap \ker(d_2)) - \dim d_1 \mathcal{V}_1 = \dim \mathcal{V}_2 - \dim d_2 \mathcal{V}_2 - \dim \mathcal{V}_1 + \dim \mathcal{V}_0 = \dim \mathcal{V}_3 - \dim d_2 \mathcal{V}_2.$$

证毕. □

### 2.3 多项式 de Rham 复形

对于二维区域  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ , de Rham 复形定义如下:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{c} H^1(\Omega) \xrightarrow{\text{curl}} \mathbf{H}(\text{div}, \Omega) \xrightarrow{\text{div}} L^2(\Omega) \rightarrow 0. \quad (2.5)$$

若区域  $\Omega$  是单连通时, 则上述的 de Rham 复形 (2.5) 是正合的. 往后总是假设区域  $\Omega$  是单连通的.

对于整数  $k \geq 1$ , 在单个三角形区域内, 有多项式 de Rham 复形

$$\mathbb{R} \xrightarrow{c} \mathbb{P}_{k+1}(T) \xrightarrow{\text{curl}} \mathbb{P}_k(T; \mathbb{R}^2) \xrightarrow{\text{div}} \mathbb{P}_{k-1}(T) \rightarrow 0, \quad (2.6)$$

这里的  $\mathbb{P}_k(T)$  指定义在三角形  $T$  上次数不超过  $k$  的实值多项式空间, 而  $\mathbb{P}_k(T; \mathbb{X}) := \mathbb{P}_k(T) \otimes \mathbb{X}$  对应于向量空间  $\mathbb{R}^2$ 、张量空间  $\mathbb{M}$  或对称张量空间  $\mathbb{S}$  的情形.

可以直接验证以下恒等式成立:

$$1 - \binom{k+3}{2} + 2 \binom{k+2}{2} - \binom{k+1}{2} = 0. \quad (2.7)$$

等式  $\text{curl} \mathbb{P}_{k+1}(T) = \mathbb{P}_k(T; \mathbb{R}^2) \cap \ker(\text{div})$  可以证明如下: 如果  $\text{grad} p \in \mathbb{P}_k(T; \mathbb{R}^2)$ , 则  $p$  必属于  $\mathbb{P}_{k+1}(T)$ . 在二维空间中,  $\text{curl}$  是  $\text{grad}$  的旋转. 因此, 根据引理 2.1, 复形 (2.6) 是正合的.

### 2.4 BGG 构建

Eastwood<sup>[25]</sup> 利用 BGG 构建<sup>[9]</sup> 揭示了弹性复形与 de Rham 复形之间的联系. Arnold 等<sup>[4]</sup> 基于有限元 de Rham 复形, 使用 BGG 重建了最初在文献 [8] 中提出的有限元弹性复形. 虽然文献 [7] 建立了一个系统化的 BGG 构建方法, 但本文只考虑二维区域上的复形, 所以将不直接套用文献 [7] 中的抽象框架, 而是给出具体的构造步骤, 以帮助读者理解 BGG 构建. 下面是两个具体的例子.

通过叠加两个 de Rham 复形先构建 BGG 图 (如图 3 所示), 可以从中推导出弹性复形

$$\mathbb{P}_1 \xrightarrow{\subset} H^2(\Omega) \xrightarrow{\text{Air}} \mathbf{H}(\text{div}, \Omega; \mathbb{S}) \xrightarrow{\text{div}} L^2(\Omega; \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbf{0}. \quad (2.8)$$

通过旋转变换, 还可以得到 Hessian 复形

$$\mathbb{P}_1 \xrightarrow{\subset} H^2(\Omega) \xrightarrow{\text{hess}} \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega; \mathbb{S}) \xrightarrow{\text{rot}} L^2(\Omega; \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbf{0}.$$

下面逐步解释如何从图 3 得到 (2.8). 根据 (2.1) 的第一个等式, 有反交换性  $\text{div } \mathbf{v} = 2 \text{sskw}(\text{curl } \mathbf{v})$ . 对于  $\mathbf{u} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$ , 根据图 3 下方 de Rham 复形的正合性, 可知存在  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega; \mathbb{M})$  满足  $\mathbf{u} = \text{div } \boldsymbol{\tau}$ . 然后应用图 3 上方 de Rham 复形的正合性找到满足  $-2 \text{sskw } \boldsymbol{\tau} = \text{div } \mathbf{v}$  的  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$ . 令  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} + \text{curl } \mathbf{v} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega; \mathbb{M})$ . 显然  $\text{div } \boldsymbol{\sigma} = \text{div } \boldsymbol{\tau} = \mathbf{u}$ . 由算子的反交换性质, 有

$$2 \text{sskw } \boldsymbol{\sigma} = 2 \text{sskw } \boldsymbol{\tau} + 2 \text{sskw}(\text{curl } \mathbf{v}) = 2 \text{sskw } \boldsymbol{\tau} + \text{div } \mathbf{v} = 0,$$

即  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega; \mathbb{S})$ . 相关函数的关系如图 4 所示. 这证明了  $\text{div } \mathbf{H}(\text{div}, \Omega; \mathbb{S}) = L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$ , 即弹性复形 (2.8) 的后半部分成立. 通过简单地复合两个 curl 算子可以得到弹性复形 (2.8) 的前半部分  $H^2(\Omega) \xrightarrow{\text{Air}} \mathbf{H}(\text{div}, \Omega; \mathbb{S})$ . 核空间  $\ker(\text{Air})$  由  $\mathbb{R} + \mathbb{R}^2 \cdot \mathbf{x}^\perp = \mathbb{P}_1$  组成是显然的.

定义  $\mathbf{H}(\text{div div}, \Omega; \mathbb{M}) := \{\boldsymbol{\tau} \in L^2(\Omega; \mathbb{M}) : \text{div div } \boldsymbol{\tau} \in L^2(\Omega)\}$ . 通过组合两个 de Rham 复形, 可以构建如下的 BGG 图 (如图 5 所示), 这一构建引出了如下 div div 复形:

$$\mathbf{RT} \xrightarrow{\subset} \mathbf{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^2) \xrightarrow{\text{sym curl}} \mathbf{H}(\text{div div}, \Omega; \mathbb{S}) \xrightarrow{\text{div div}} L^2(\Omega) \rightarrow \mathbf{0}, \quad (2.9)$$

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\subset} & H^2(\Omega) & \xrightarrow{\text{curl}} & \mathbf{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^2) & \xrightarrow{\text{div}} & L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbf{0} \\ & \nearrow & \cdot(-\mathbf{x})^\perp & \nearrow \text{id} & & \nearrow -2 \text{sskw} & \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\subset} & \mathbf{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^2) & \xrightarrow{\text{curl}} & \mathbf{H}(\text{div}, \Omega; \mathbb{M}) & \xrightarrow{\text{div}} & L^2(\Omega; \mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbf{0} \end{array}$$

图 3 弹性复形的 BGG 图

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{v} & \xrightarrow{\text{div}} & -2 \text{sskw}(\boldsymbol{\tau}) \\ \text{id} \nearrow & & \nearrow & \\ \mathbf{v} & \xleftarrow{\text{curl}} & \boldsymbol{\tau} & \xrightarrow{\text{div}} & \mathbf{u} \\ & & & \nearrow -2 \text{sskw} & \end{array}$$

图 4  $\text{div } \mathbf{H}(\text{div}, \Omega; \mathbb{S}) = L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$  的 BGG 图解释

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\subset} & \mathbf{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^2) & \xrightarrow{\text{curl}} & \mathbf{H}(\text{div div}, \Omega; \mathbb{M}) & \xrightarrow{\text{div}} & \mathbf{H}^{-1,0}(\text{div}, \Omega) \longrightarrow \mathbf{0} \\ & \nearrow & -\mathbf{x} & \nearrow \text{mskw} & & \nearrow \text{id} & \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\subset} & L^2(\Omega) & \xrightarrow{\text{curl}} & \mathbf{H}^{-1,0}(\text{div}, \Omega) & \xrightarrow{\text{div}} & L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbf{0} \end{array}$$

图 5 div div 复形的 BGG 图

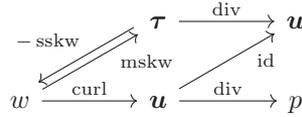


图 6  $\text{div div } \mathbf{H}(\text{div div}, \Omega; \mathbb{S}) = L^2(\Omega)$  的 BGG 图解释

以及通过旋转得到的应变复形

$$\mathbf{RM} \xrightarrow{\subset} \mathbf{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^2) \xrightarrow{\text{sym grad}} \mathbf{H}(\text{rot rot}, \Omega; \mathbb{S}) \xrightarrow{\text{rot rot}} L^2(\Omega) \rightarrow 0,$$

其中,  $\mathbf{RT}$  表示  $\mathbb{R}^2 + \mathbf{x}\mathbb{R}$ ,  $\mathbf{RM}$  表示  $\mathbb{R}^2 + \mathbf{x}^\perp\mathbb{R}$ .

在图 5 中, 反交换性质说明了  $\text{curl}(c\mathbf{x}) = \text{mskw } c$  对于任意  $c \in \mathbb{R}$  成立,  $\text{div}(\text{mskw } v) = -\text{curl } v$  对于  $v \in L^2(\Omega)$  成立. 对于  $L^2(\Omega)$  中的  $p$ , 基于图 5 底部 de Rham 复形的正合性, 存在  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^{-1,0}(\text{div}, \Omega)$  满足  $p = \text{div } \mathbf{u}$ . 然后利用图 5 顶部复形的正合性找到  $\tau \in \mathbf{H}(\text{div div}, \Omega; \mathbb{M})$ , 使得  $\mathbf{u} = \text{div } \tau$ . 令  $\sigma = \tau + \text{mskw } w \in \mathbf{H}(\text{div div}, \Omega; \mathbb{M})$ , 其中  $w = -\text{sskw } \tau \in L^2(\Omega)$ . 因为  $\text{div div mskw } w = -\text{div curl } w = 0$ , 所以  $\text{div div } \sigma = \text{div div } \tau = p$ , 且  $\text{sskw } \sigma = \text{sskw } \tau + w = 0$ , 即  $\sigma$  属于  $\mathbf{H}(\text{div div}, \Omega; \mathbb{S})$ . 相关函数的关系如图 6 所示. 这就证明了  $\text{div div } \mathbf{H}(\text{div div}, \Omega; \mathbb{S}) = L^2(\Omega)$ , 即  $\text{div div}$  复形 (2.9) 的后半部分成立.

通过对称化图 5 中顶部复形的前半部分可以得到  $\text{div div}$  复形 (2.9) 的前半部分  $\mathbf{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^2) \xrightarrow{\text{sym curl}} \mathbf{H}(\text{div div}, \Omega; \mathbb{S})$ . 对于  $\sigma \in \mathbf{H}(\text{div div}, \Omega; \mathbb{S}) \cap \ker(\text{div div})$ , 有  $\text{div } \sigma \in \mathbf{H}^{-1,0}(\text{div}, \Omega) \cap \ker(\text{div})$ . 基于图 5 底部 de Rham 复形的正合性, 存在  $w \in L^2(\Omega)$  满足  $\text{div } \sigma = \text{curl } w$ . 又因为  $\text{curl } w = -\text{div}(\text{mskw } w)$ , 从而  $\sigma + \text{mskw } w \in \mathbf{H}(\text{div div}, \Omega; \mathbb{M}) \cap \ker(\text{div})$ . 再借助图 5 顶部 de Rham 复形的正合性, 可知存在  $v \in \mathbf{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$  满足  $\sigma + \text{mskw } w = \text{curl } v$ . 对此式两边作用对称化算子  $\text{sym}$  可得  $\sigma = \text{sym curl } v$ . 故成立  $\mathbf{H}(\text{div div}, \Omega; \mathbb{S}) \cap \ker(\text{div div}) = \text{sym curl } \mathbf{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$ .

接下来, 根据图 3 和 5 构建其有限元复形, 并从中派生出几种有限元弹性和  $\text{div div}$  复形. 作为第一步, 需要构造具有不同光滑性的有限元 de Rham 复形.

### 3 二维光滑有限元的构建

本节旨在介绍二维三角形网格上的  $C^m$ -连续有限元构建方法. 该方法最早源于 Bramble 和 Zlámal 的工作 [10], 最近 Hu 等 [32] 将其推广到任意维. 对于二维情形, 相关的工作也可以在三角网格上的样条中找到 (参见文献 [35]). 本文将采用文献 [32] 中的方法, 通过对单纯形格点进行分解, 然后使用积分形式的自由度来构造光滑有限元. 不同之处是, 本文引入了格点到子单纯形的距离, 并利用距离和导数的关系来给出格点的几何分解. 这里, 侧重于二维情形, 但使用到的概念和方法可以推广到任意维, 参见文献 [18] 的附录.

采用一对整数  $\mathbf{r} = (r^v, r^e)$  来定义顶点处和边上的光滑度级别, 其中  $-1$  表示无需连续性约束. 对于  $C^m$ -连续性,  $r^e = m$  是边上的最基本要求. 对于顶点, 要求  $r^v$  至少为  $\max\{2r^e, -1\}$ . 多项式的次数  $k$  应满足  $k \geq \max\{2r^v + 1, 0\}$ . 对于向量  $\mathbf{r}$  和任意常数  $c$ ,  $\mathbf{r} \geq c$  意味着对于所有  $i = 1, 2, \dots, d$ , 都有  $r_i \geq c$ , 而  $\mathbf{r} + c$  表示将每个分量都增加  $c$ . 特别地,  $\mathbf{r} \ominus 1 := \max\{\mathbf{r} - 1, -1\}$ .

#### 3.1 单纯形格点

对于任意两个非负整数  $l$  和  $m$  ( $l \leq m$ ), 采用多重指标符号  $\alpha \in \mathbb{N}^{l:m}$ , 其中  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ , 并且  $\alpha_i \geq 0$  是非负整数.  $\alpha$  的长度为  $m - l + 1$ . 多重指标的和定义为  $|\alpha| := \sum_{i=l}^m \alpha_i$ , 其阶乘为

$\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_m!$ . 记

$$D^\beta := \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2}}, \quad \beta \in \mathbb{N}^{1:2}.$$

度为  $k$  ( $k \geq 1$ ) 的二维单纯形格点是一个长度为 3、和为  $k$  的多重指标集合, 即

$$\mathbb{T}_k^2 := \{\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^{0:2} \mid |\alpha| = k\}.$$

集合中的元素  $\alpha$  称为一个格点.

可以将单纯形格点  $\mathbb{T}_k^2$  嵌入到一个由顶点  $\{v_0, v_1, v_2\}$  构成的三角形  $T$  中. 对于给定的  $\alpha \in \mathbb{T}_k^2$ , 其重心坐标为  $\lambda(\alpha) = (\lambda_0(\alpha), \lambda_1(\alpha), \lambda_2(\alpha)) = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)/k$ , 其几何嵌入为

$$x: \mathbb{T}_k^2 \rightarrow T, \quad x(\alpha) = \sum_{i=0}^2 \lambda_i(\alpha) v_i.$$

图 7 展示了二维单纯形格点  $\mathbb{T}_8^2$  在参考三角形  $\hat{T}$  (顶点为  $\{(0,0), (1,0), (0,1)\}$ ) 中的嵌入以及它在等边三角形中的嵌入示例.

按照定义, 单纯形格点  $\mathbb{T}_k^2$  是一个代数集合. 通过几何嵌入  $\mathbb{T}_k^2(T)$ , 我们能够应用几何算子. 例如, 用  $\mathbb{T}_k^2(\hat{T}) = \{\alpha \in \mathbb{T}_k^2, x(\alpha) \in \hat{T}\}$  表示所有几何嵌入在  $T$  内部的格点.

### 3.2 多项式的 Bernstein 基函数

我们有

$$|\mathbb{T}_k^2| = \binom{k+2}{k} = \dim \mathbb{P}_k(T).$$

考虑一个顶点为  $\{v_0, v_1, v_2\}$  的三角形  $T$ . 多项式  $\mathbb{P}_k(T)$  的 Bernstein 基函数定义为

$$\mathbb{P}_k(T) = \text{span}\{\lambda^\alpha := \lambda_0^{\alpha_0} \lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} \mid \alpha \in \mathbb{T}_k^2\}.$$

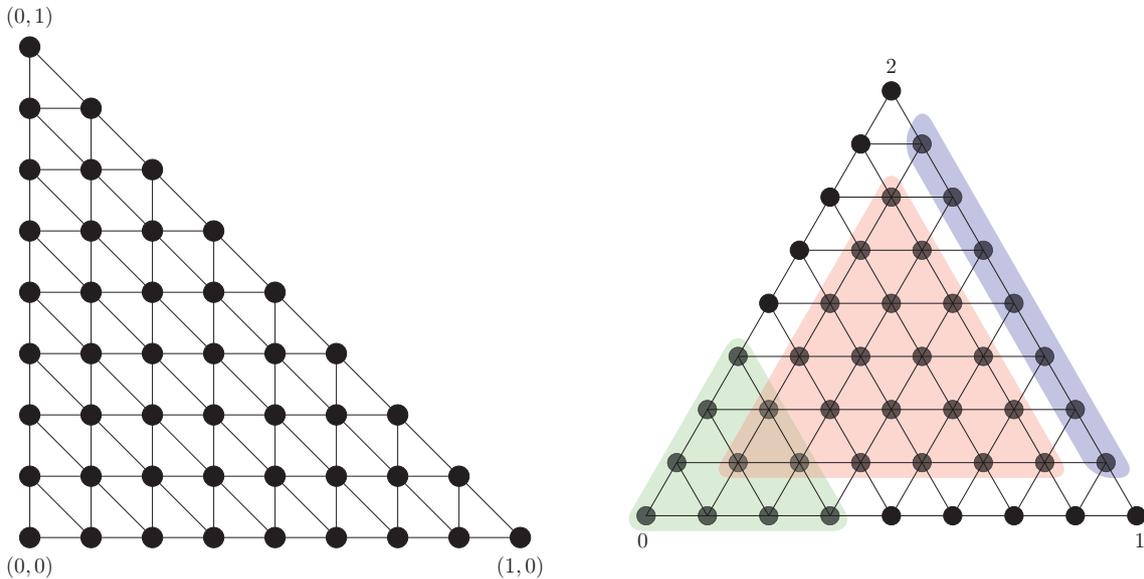


图 7 (网络版彩图) 二维单纯形格点  $\mathbb{T}_8^2$  的两种嵌入示例

对于  $\mathbb{T}_k^2$  的任意一个子集  $S$ , 定义

$$\mathbb{P}_k(S) := \text{span}\{\lambda^\alpha, \alpha \in S \subseteq \mathbb{T}_k^2\}.$$

通过将格点  $\alpha$  与其对应的 Bernstein 多项式  $\lambda^\alpha$  之间建立一一对应关系, 我们能够通过研究单纯形格点来分析多项式的性质. 事实上, 格点的几何嵌入可以作为  $k$  次 Lagrange 元的插值节点 (参见文献 [11, 39]).

### 3.3 子单纯形格点和距离

本文使用文献 [5] 中引入的记号:  $\Delta(T)$  表示三角形  $T$  所有可能的子单纯形构成的集合, 而  $\Delta_\ell(T)$  专指维数为  $\ell$  的子单纯形集合, 其中  $\ell = 0, 1, 2$ . 采用文献 [18] 的符号改动, 用  $f$  既表示几何上的单形, 也表示代数上的顶点编号集合. 作为一个顶点编号集,  $f = \{f(0), \dots, f(\ell)\}$  是  $\{0, 1, 2\}$  的一个子集; 作为一个几何单纯形,

$$f = \text{Convex}(\mathbf{v}_{f(0)}, \dots, \mathbf{v}_{f(\ell)})$$

是由  $\mathbf{v}_{f(0)}, \dots, \mathbf{v}_{f(\ell)}$  这些顶点张成的  $\ell$  维单形. 对于由顶点  $\mathbf{v}_i$  和  $\mathbf{v}_j$  形成的边, 我们也使用  $e_{ij}$  来表示, 这里  $i, j = 0, 1, 2, i \neq j$ .

对于  $f \in \Delta_\ell(T), \ell = 0, 1$ , 定义  $f^* \in \Delta_{2-\ell-1}(T)$  为  $T$  中与  $f$  相对的子单纯形. 当将  $f$  当作  $\{0, 1, 2\}$  的子集时,  $f^*$  是  $f$  的补集, 使得  $f$  和  $f^*$  的并集就是整个集合  $\{0, 1, 2\}$ . 从几何的角度来看,

$$f^* = \text{Convex}(\mathbf{v}_{f^*(1)}, \dots, \mathbf{v}_{f^*(2-\ell)})$$

代表由不属于  $f$  的顶点张成的  $1-\ell$  维单形. 值得注意的是,  $f$  可以通过与  $f^*$  相关的重心坐标的零水平集来确定, 即  $f = \{x \in T \mid \lambda_i(x) = 0, \text{对于所有 } i \in f^*\}$ .

对于子单纯形  $f \in \Delta_\ell(T)$ , 通过将  $f$  几何嵌入到  $T$ , 可以定义延展操作符  $E_f: \mathbb{T}_k^\ell(f) \rightarrow \mathbb{T}_k^2(T)$ . 规则如下: 对于  $\alpha \in \mathbb{T}_k^\ell(f)$ , 在  $f$  中的每个顶点  $f(i)$  的坐标被赋值为  $\alpha_i$ ; 对于  $j \notin f$ , 赋值为 0. 例如, 若  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{T}_k^1(f), f = \{1, 2\}$ , 则其扩展  $E_f(\alpha) = (0, \alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{T}_k^2(T)$ . 当  $f = \{0, 2\}$  时, 相应的扩展为  $E_f(\alpha) = (\alpha_0, 0, \alpha_1)$ . 在格点的几何嵌入中,  $x(E_f(\alpha)) \in f$ , 这解释了符号  $\mathbb{T}_k^\ell(f)$  的合理性.

我们稍微滥用一下符号, 对于格点  $\alpha_f \in \mathbb{T}_k^\ell(f)$ , 仍使用  $\alpha_f \in \mathbb{T}_k^2(T)$  来表示  $E_f(\alpha_f)$ . 据此, 得到分解

$$\alpha = E_f(\alpha_f) + E_{f^*}(\alpha_{f^*}) = \alpha_f + \alpha_{f^*}, \quad \text{并且} \quad |\alpha| = |\alpha_f| + |\alpha_{f^*}|. \tag{3.1}$$

依据上述分解, 可以将 Bernstein 多项式表达为

$$\lambda^\alpha = \lambda_f^{\alpha_f} \lambda_{f^*}^{\alpha_{f^*}},$$

其中  $\lambda_f = \lambda_{f(0)} \cdots \lambda_{f(\ell)} \in \mathbb{P}_{\ell+1}(f)$  是  $f$  上的泡函数, 也用  $b_f$  表示. 更一般地, 其  $k$  次多项式泡函数空间定义为

$$b_f \mathbb{P}_{k-(\ell+1)}(f) := \text{span}\{b_f \lambda_f^{\alpha_f} : \alpha_f \in \mathbb{T}_{k-(\ell+1)}^\ell(f) \cong \mathbb{T}_k^\ell(\overset{\circ}{f})\}.$$

从直观上理解, 多项式泡函数在  $\partial f$  上为 0, 因此只对应子单纯形内部的格点. 如图 7 所示,  $\mathbb{T}_k^2(\overset{\circ}{T})$  包括红色三角区域内的所有格点, 而对于  $f = \{1, 2\}$ ,  $\mathbb{T}_k^1(\overset{\circ}{f})$  位于蓝色梯形区域.

对于单纯形  $T$  中的子单纯形  $f$ , 可以定义格点  $\alpha$  到  $f$  的距离为

$$\text{dist}(\alpha, f) := |\alpha_{f^*}| = \sum_{i \in f^*} \alpha_i.$$

有了距离, 引入  $f$  周围半径为  $r$  的“格点管道”:

$$D(f, r) := \{\alpha \in \mathbb{T}_k^2, \text{dist}(\alpha, f) \leq r\},$$

包括了所有距离  $f$  不超过  $r$  的格点. 同时, 记所有距离  $f$  为  $s$  的格点集合为

$$L(f, s) := \{\alpha \in \mathbb{T}_k^2, \text{dist}(\alpha, f) = s\}.$$

因此,

$$D(f, r) = \bigcup_{s=0}^r L(f, s), \quad L(f, s) = L(f^*, k - s).$$

下面的引理可以通过定义直接验证.

**引理 3.1** 对于任意格点  $\alpha \in \mathbb{T}_k^2$ , 以下条件成立:

$$\begin{aligned} \alpha \in D(f, r) &\Leftrightarrow |\alpha_{f^*}| \leq r \Leftrightarrow |\alpha_f| \geq k - r, \\ \alpha \notin D(f, r) &\Leftrightarrow |\alpha_{f^*}| > r \Leftrightarrow |\alpha_f| \leq k - r - 1. \end{aligned}$$

对于顶点  $\mathbf{v}_i$ ,

$$D(\mathbf{v}_i, r) = \{\alpha \in \mathbb{T}_k^2(T), |\alpha_{i^*}| \leq r\},$$

与一个较小的度为  $r$  的单纯形格点  $\mathbb{T}_r^2$  结构相似. 例如,  $D(\mathbf{v}_0, 3)$  包括了位于图 7 中绿色三角区域的所有格点, 其本身就是一个小的单纯形格点  $\mathbb{T}_3^2$ .

**引理 3.2** 考虑  $T$  的一个子单纯形  $f$ . 对于任意  $\alpha \in \mathbb{T}_k^2$  和  $\beta \in \mathbb{N}^{1:2}$ , 有

$$D^\beta \lambda^\alpha|_f = 0, \quad \text{如果 } \text{dist}(\alpha, f) > |\beta|. \quad (3.2)$$

**证明** 对于任意  $\alpha \in \mathbb{T}_k^2$ , 将  $\lambda^\alpha$  表示为  $\lambda_f^{\alpha_f}$  和  $\lambda_{f^*}^{\alpha_{f^*}}$  的乘积. 当  $|\alpha_{f^*}| > |\beta|$  时, 导数  $D^\beta \lambda^\alpha$  将包含因子  $\lambda_{f^*}^\gamma$ , 这里  $\gamma \in \mathbb{N}^{1:(2-\ell)}$ , 并且  $|\gamma| = |\alpha_{f^*}| - |\beta| > 0$ . 由于对于  $i \in f^*$ , 有  $\lambda_i|_f = 0$ , 所以  $D^\beta \lambda^\alpha|_f = 0$ .  $\square$

在一维单纯形  $(0, 1)$  上,  $\lambda_0 = 1 - x$ ,  $\lambda_1 = x$ , 取  $f$  为顶点 0. 对  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1)$ ,  $\text{dist}(\alpha, f) = \alpha_1$ , (3.2) 是一元微积分结果

$$D^\beta ((1-x)^{\alpha_0} x^{\alpha_1})|_{x=0} = 0, \quad \text{如果 } \alpha_1 > \beta$$

在单纯形上的推广. 这说明通过调整  $\alpha$  到  $f$  的距离, 能够控制多项式  $\lambda^\alpha$  在  $f$  上导数为 0 的阶数, 从而为构造光滑有限元空间提供了一个强大的工具.

### 3.4 在顶点处的导数

考虑定义在  $\Omega$  上的  $C^m$ -光滑函数  $u$ , 可将其直至  $m$  阶的导数在一点  $\mathbf{v}$  的值表示如下:

$$\{D^\beta u(\mathbf{v}), \beta \in \mathbb{N}^{1:2}, |\beta| \leq m\}.$$

注意, 这里的多重指标  $\beta \in \mathbb{N}^{1:2}$  并不属于  $\mathbb{N}^{0:2}$ . 可以向  $\beta$  添加一个值为  $m - |\beta|$  的分量, 以形成一个  $m$  阶的单纯形格点  $\mathbb{T}_m^2$ , 用来确定该点处的导数.

**引理 3.3** 对于三角形的每一个顶点  $v_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ), 多项式空间

$$\mathbb{P}_k(D(v_i, m)) := \text{span}\{\lambda^\alpha, \alpha \in \mathbb{T}_k^2, \text{dist}(\alpha, v_i) = |\alpha_{i^*}| \leq m\}$$

由以下自由度唯一确定:

$$\{D^\beta u(v_i), \beta \in \mathbb{N}^{1:2}, |\beta| \leq m\}. \tag{3.3}$$

**证明** 不失一般性, 考虑顶点  $v_0$ . 定义映射  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \rightarrow \beta = (\alpha_1, \alpha_2)$ . 这个映射将  $D(v_0, m) = \{\alpha \in \mathbb{T}_k^2, \alpha_1 + \alpha_2 \leq m\}$  一一对应到  $\{\beta \in \mathbb{N}^{1:2}, |\beta| \leq m\}$  上. 因此,  $\mathbb{P}_k(D(v_i, m))$  的维数与自由度 (3.3) 的数量相匹配. 只需要证明, 对于  $u \in \mathbb{P}_k(D(v_0, m))$ , 如果自由度 (3.3) 为 0, 则  $u = 0$ .

回顾多元微积分的结果

$$D^\beta(x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}) = \beta! \delta(\alpha, \beta), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}^{1:2}, \quad |\alpha| = |\beta| = s \geq 0, \tag{3.4}$$

其中  $\delta(\alpha, \beta)$  是 Kronecker  $\delta$  函数. 当三角形  $T$  是参考三角形、 $v_0$  是原点时, 则  $\lambda_1 = x_1, \lambda_2 = x_2$ . 因此得出齐次多项式空间  $\text{span}\{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}, \alpha \in \mathbb{N}^{1:2}, |\alpha| = s\}$  由自由度  $\{D^\beta u(v_0), \beta \in \mathbb{N}^{1:2}, |\beta| = s\}$  唯一确定, 对于  $s = 0, 1, \dots, m$  都成立. 至此完成了当三角形是参考三角形时的证明.

对于一般的三角形, 将使用重心坐标系而不是变换到参考三角形. 显然,  $\{\nabla \lambda_1, \nabla \lambda_2\}$  构成了  $\mathbb{R}^2$  的一组基. 记  $l^i = e_{0i}$  ( $i = 1, 2$ ) 为包含  $v_0$  的两条边向量, 则基  $\{l^1, l^2\}$  与  $\{\nabla \lambda_1, \nabla \lambda_2\}$  互为对偶, 即  $\nabla \lambda_i \cdot l^j = \delta_{i,j}, i, j = 1, 2$ .

可以在这个非正交基中表示导数, 即由  $D_n^\beta u := \frac{\partial^{|\beta|} u}{\partial (l^1)^{\beta_1} \partial (l^2)^{\beta_2}}$  来表示, 其中  $\frac{\partial}{\partial l^i} = l^i \cdot \nabla$ . 通过对偶性  $\nabla \lambda_i \cdot l^j = \delta_{i,j}$ , 得到 (3.4) 的如下推广:

$$D_n^\beta(\lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2}) = \beta! \delta(\alpha, \beta), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}^{1:2}, \quad |\alpha| = |\beta| = s. \tag{3.5}$$

通过链式法则, 容易证明  $\{D_n^\beta u(v_0) = 0, \beta \in \mathbb{N}^{1:2}, |\beta| \leq m\}$  等价于  $\{D^\beta u(v_0) = 0, \beta \in \mathbb{N}^{1:2}, |\beta| \leq m\}$ . 因此, 在接下来的证明中, 将使用  $D_n^\beta$  而不是  $D^\beta$ .

$\mathbb{P}_k(D(v_0, m))$  的 Bernstein 基由  $\{\phi_\alpha := \lambda_0^{k-|\alpha|} \lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2}, \alpha \in \mathbb{N}^{1:2}, |\alpha| \leq m\}$  给出. 自由度是  $\{D_n^\beta u(v_0), \beta \in \mathbb{N}^{1:2}, |\beta| \leq m\}$ . 将自由度 - 基函数矩阵  $(D_n^\beta \phi_\alpha(v_0))$  按  $\alpha$  和  $\beta$  的长度排列如下:

$$\begin{array}{c}
 |\beta| \setminus |\alpha| \\
 \begin{array}{cccccc}
 & 0 & 1 & \dots & m-1 & m \\
 0 & \left( \begin{array}{c|c|c|c|c|c}
 \square & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 \hline
 \square & \square & \dots & 0 & 0 \\
 \hline
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 \hline
 \square & \square & \dots & \square & 0 \\
 \hline
 \square & \square & \dots & \square & \square
 \end{array} \right) \\
 1 \\
 \vdots \\
 m-1 \\
 m
 \end{array}
 \end{array}$$

则由引理 3.2 知矩阵是块下三角结构. 由 (3.5) 知, 得到的每个对角块是对角矩阵. 因此整个块下三角矩阵是可逆的, 这等价于唯一可解性的证明. □

### 3.5 在边上的法向导数

上一节已经使用了格点  $D(\Delta_0(e), r^v) := \bigcup_{v \in \Delta_0(e)} D(v, r^v)$  来确定顶点处的导数值. 接下来, 使用边管道中剩余的格点  $D(e, r^e) \setminus D(\Delta_0(e), r^v)$  来确定边  $e$  上的法向导数.

**引理 3.4** 假设  $r^v \geq r^e \geq 0$  并且  $k \geq 2r^v + 1$ . 对于三角形  $T$  的一条边  $e$ , 多项式函数空间  $\mathbb{P}_k(D(e, r^e) \setminus D(\Delta_0(e), r^v))$  可以通过以下自由度唯一确定:

$$\int_e \frac{\partial^\beta u}{\partial n_e^\beta} \lambda_e^\alpha ds, \quad \alpha \in \mathbb{T}_{k-2(r^v+1)+\beta}^1, \quad \beta = 0, 1, \dots, r^e.$$

**证明** 不失一般性, 考虑边  $e = e_{0,1}$ . 空间  $\mathbb{P}_k(D(e, r^e) \setminus D(\Delta_0(e), r^v))$  的基为

$$\{\phi_\alpha := \lambda^\alpha = \lambda_e^{(\alpha_0, \alpha_1)} \lambda_2^{\alpha_2}, \alpha \in D(e, r^e) \setminus D(\Delta_0(e), r^v)\}.$$

根据引理 3.2, 当  $\text{dist}(\alpha, e) = \alpha_2 > \beta$  时, 有  $\frac{\partial^\beta \phi_\alpha}{\partial n_e^\beta} |_{e=0} = 0$ . 所以对应的自由度 - 基函数矩阵是一个块下三角状结构, 如下所示:

$$\begin{matrix} \beta \setminus \alpha_2 & 0 & 1 & \dots & r^e - 1 & r^e \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ r^e - 1 \\ r^e \end{matrix} & \begin{pmatrix} \square & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \square & \square & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \square & \square & \dots & \square & 0 \\ \square & \square & \dots & \square & \square \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

需要验证每一个对角块, 即  $\beta = \alpha_2 = s$  ( $s = 0, 1, \dots, r^e$ ) 是可逆的方阵. 因此整个块下三角矩阵也是可逆的, 这等价于唯一可解性的证明.

取  $\phi_\alpha = \lambda_e^{(\alpha_0, \alpha_1)} \lambda_2^s$ . 由链式法则和  $\lambda_2|_e = 0$  可知, 在  $\frac{\partial^s \phi_\alpha}{\partial n_e^s} |_e$  的非零项中,  $s$  阶导数将全部作用于  $\lambda_2^s$ , 因此,

$$\frac{\partial^s \phi_\alpha}{\partial n_e^s} \Big|_e = s!(n_e \cdot \nabla \lambda_2)^s \lambda_e^{(\alpha_0, \alpha_1)} |_e,$$

其中  $n_e \cdot \nabla \lambda_2$  是一个常数. 所以一个自然的自由度是

$$\int_e \frac{\partial^s u}{\partial n_e^s} \lambda_e^{(\alpha_0, \alpha_1)} ds, \quad (\alpha_0, \alpha_1, s) \in L(e, s) \setminus D(\Delta_0(e), r^v). \tag{3.6}$$

这样对应的块矩阵是基底  $\{\lambda_e^{(\alpha_0, \alpha_1)}\}$  的 Gram 矩阵. 现在根据格点要满足的条件来简化 (3.6) 用到的格点  $\alpha$ .

先回顾

$$L(e, s) = \{\alpha \in \mathbb{T}_k^2 \mid \text{dist}(\alpha, e) = s\} = \{\alpha \in \mathbb{T}_k^2 \mid \alpha_0 + \alpha_1 = k - s\}$$

包含了所有与边  $e$  平行且距离为  $s$  的格点. 我们利用条件  $\alpha \notin D(\Delta_0(e), r^v)$  来确定  $\alpha_0$  和  $\alpha_1$  的界限. 根据引理 3.1, 从  $\text{dist}(\alpha, v_0) > r^v$  可以推导出  $\alpha_0 < k - r^v$ . 结合  $\alpha_0 + \alpha_1 = k - s$  的条件, 可以推导出下

限  $\alpha_1 \geq r^v - s + 1$ . 类似地, 对于  $\alpha_0$ , 也有  $\alpha_0 \geq r^v - s + 1$ . 由假设  $r^v \geq r^e \geq 0$  可知, 当  $s = 0, 1, \dots, r^e$  时成立  $r^v - s + 1 \geq 1$ . 因此, 有

$$L(e, s) \setminus D(\Delta_0(e), r^v) = \{(\alpha_0, \alpha_1, s), \alpha_0 + \alpha_1 = k - s, \min\{\alpha_0, \alpha_1\} \geq r^v - s + 1\}.$$

从而

$$\lambda_e^{(\alpha_0, \alpha_1)} = \lambda_e^{(\alpha_0, \alpha_1) - (r^v - s + 1)} \lambda_e^{r^v - s + 1}, \quad (\alpha_0, \alpha_1, s) \in L(e, s) \setminus D(\Delta_0(e), r^v).$$

变化后的格点的度为

$$|(\alpha_0, \alpha_1) - (r^v - s + 1)| = \alpha_0 + \alpha_1 - 2(r^v - s + 1) = k - 2(r^v + 1) + s.$$

因为泡多项式  $\lambda_e^{r^v - s + 1}$  在  $e$  上定义了一个新的测度, 所以自由度 (3.6) 中的格点可以改为  $(\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{T}_{k-2(r^v+1)+s}^1$ . 每个对角块矩阵是在测度  $\lambda_e^{r^v - s + 1}$  下的 Gram 矩阵, 是一个对称正定矩阵, 当然也就是可逆的方阵.  $\square$

### 3.6 单纯形格点的几何分解

在三角形中, 一个顶点会被两条边共享, 为了每条边都有足够的格点来确定法向导数, 还需要添加  $r^v \geq 2r^e$  的条件 (如图 8(b) 所示). 对于一条边  $e$ ,  $\mathbb{P}_k(e)$  由  $k+1$  个格点确定. 为了有足够多的格点来确定两个顶点处的导数, 需要添加  $k \geq 2r^v + 1$  的条件.

将直和的记号  $\oplus$  延拓到集合的并: 当  $A \cap B = \emptyset$  时,  $A \oplus B$  定义为  $A \cup B$ .

**引理 3.5** 设  $r^e = m \geq -1$ ,  $r^v \geq \max\{2r^e, -1\}$ , 非负整数  $k \geq 2r^v + 1 \geq 4m + 1$ . 则有

$$\mathbb{T}_k^2(T) = S_0(T) \oplus S_1(T) \oplus S_2(T), \tag{3.7}$$

其中,

$$S_0(T) := D(\Delta_0(T), r^v) = \bigoplus_{v \in \Delta_0(T)} D(v, r^v),$$

$$S_1(T) := \bigoplus_{e \in \Delta_1(T)} (D(e, r^e) \setminus S_0(T)), \quad S_2(T) := \mathbb{T}_k^2(T) \setminus (S_0(T) \oplus S_1(T)),$$

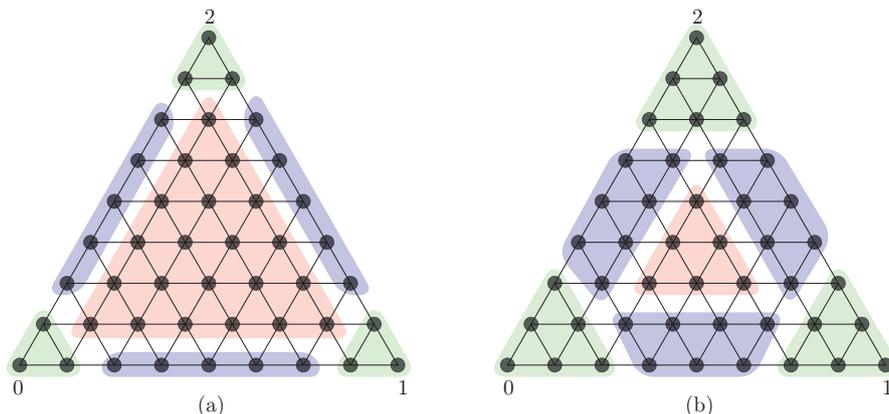


图 8 (网络版彩图) 二维 Hermite 元和  $C^1$  协调元的几何分解. (a) Hermite 元的几何分解:  $m = 0, r^e = 0, r^v = 1, k = 8$ ; (b)  $C^1$  元的几何分解:  $m = 1, r^e = 1, r^v = 2, k = 8$

其基数为

$$|S_0(T)| = 3 \binom{r^v + 2}{2}, \quad |S_1(T)| = 3 \sum_{i=0}^{r^e} (k - 1 - 2r^v + i), \quad |S_2(T)| = \binom{k + 2}{2} - |S_0(T)| - |S_1(T)|.$$

这意味着多项式空间的分解

$$\mathbb{P}_k(T) = \mathbb{P}_k(S_0(T)) \oplus \mathbb{P}_k(S_1(T)) \oplus \mathbb{P}_k(S_2(T)). \quad (3.8)$$

**证明** 由于  $k \geq 2r^v + 1$ , 所以集合  $\{D(v, r^v), v \in \Delta_0(T)\}$  是不相交的. 接着证明集合

$$\{D(e, r^e) \setminus D(\Delta_0(e), r^v), e \in \Delta_1(T)\}$$

也是不相交的. 格点  $\alpha \in D(e_{01}, r^e)$  意味着  $\alpha_2 \leq r^e$ , 同理,  $\alpha \in D(e_{02}, r^e)$  意味着  $\alpha_1 \leq r^e$ . 因此  $|\alpha_0| = \alpha_1 + \alpha_2 \leq 2r^e \leq r^v$ , 即  $D(e_{01}, r^e) \cap D(e_{02}, r^e) \subseteq D(v_0, r^v)$ . 对每对边重复这个论证, 得出  $\{D(e, r^e) \setminus D(\Delta_0(e), r^v), e \in \Delta_1(T)\}$  是不相交的.

对于给定的边  $e$ , 顶点  $e^*$  与  $e$  相对, 且  $L(e^*, r^v) = L(e, k - r^v)$ . 由于  $k - r^v \geq r^v + 1 > r^e$ , 所以  $D(e, r^e) \cap D(e^*, r^v) = \emptyset$ , 因此  $D(e, r^e) \setminus D(\Delta_0(T), r^v) = D(e, r^e) \setminus D(\Delta_0(e), r^v)$ .

至此证明了分解 (3.7) 和 (3.8). □

定义

$$\mathbb{B}_k(\mathbf{r}) = \mathbb{B}_k(\mathbf{r}; T) := \mathbb{P}_k(S_2(T)) = \text{span}\{\lambda^\alpha, \alpha \in S_2(T)\},$$

并将其称为光滑度为  $\mathbf{r}$  的多项式泡函数空间. 根据引理 3.3 和 3.4, 有

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_k(\mathbf{r}; T) = \{u \in \mathbb{P}_k(T) : \nabla^j u \text{ 在 } T \text{ 的所有顶点处对于 } j = 0, \dots, r^v \text{ 为 } 0, \\ \text{并且 } \nabla^j u \text{ 在 } T \text{ 的所有边上对于 } j = 0, \dots, r^e \text{ 为 } 0\}. \end{aligned}$$

当多项式次数足够大时, 能保证有足够的泡函数. 本文将使用 Iverson 括号  $[\text{statement}] = 1$ , 如果括号内的陈述为真, 否则为 0.

**引理 3.6** 设  $r^e \geq -1$  且  $r^v \geq \max\{2r^e, -1\}$ .

(1) 当  $k \geq \max\{2r^v + 1, 3r^e + 3, (r^e + 3)[r^v = 0]\}$  时,  $\dim \mathbb{B}_k(\mathbf{r}) \geq 1$ .

(2) 当  $k \geq \max\{2r^v + 1, 3r^e + 4, 4[r^e = -1, r^v = 1], 2[r^e = -1, r^v = 0]\}$  时,  $\dim \mathbb{B}_k(\mathbf{r}) \geq 3$ .

**证明** (1) 已在文献 [18] 中给出. (2) 通过直接验证以下不等式来证明:

$$\dim \mathbb{B}_k(\mathbf{r}) = \binom{k - 3r^e - 1}{2} - 3 \binom{r^v - 2r^e}{2} \geq 3.$$

证毕. □

### 3.7 二维光滑有限元

现在, 介绍三角剖分上的  $C^m$ -协调有限元.

**定理 3.1** 设  $r^e = m \geq -1$ ,  $r^v \geq \max\{2r^e, -1\}$ , 且非负整数  $k \geq 2r^v + 1$ . 则形函数空间  $\mathbb{P}_k(T)$  由以下自由度确定:

$$D^\alpha u(\mathbf{v}), \quad \alpha \in \mathbb{N}^{1:2}, \quad |\alpha| \leq r^v, \quad \mathbf{v} \in \Delta_0(T), \quad (3.9a)$$

$$\int_e \frac{\partial^\beta u}{\partial n_e^\beta} q ds, \quad q \in \mathbb{P}_{k-2(r^v+1)+\beta}(e), \quad \beta = 0, \dots, r^e, \quad e \in \Delta_1(T), \quad (3.9b)$$

$$\int_T u q dx, \quad q \in \mathbb{B}_k(\mathbf{r}). \quad (3.9c)$$

**证明** 根据  $\mathbb{P}_k(T)$  的分解 (3.8), 可知  $\mathbb{P}_k(T)$  的维数与自由度的数量相匹配. 设  $u \in \mathbb{P}_k(T)$  满足所有的自由度 (3.9a)–(3.9c) 皆为 0.

借助于引理 3.3–3.5, 自由度 (3.9a) 和 (3.9b) 为 0 意味着  $u \in \mathbb{P}_k(S_2(T))$ . 然后, 由自由度 (3.9c) 为 0 可推导出  $u = 0$ . □

参数  $r^e = m = 0, r^v = 1$  且  $k = 2r^v + 1 = 3$  对应 Hermite 元. 参数  $r^e = m = 1, r^v = 2$  且  $k = 2r^v + 1 = 5$ , 称为 Argyris 元<sup>[1, 38]</sup>. 图 8 给出了当  $k = 8$  时高阶 Hermite 元和 Argyris 元的格点几何分解. 当  $r^e = m, r^v = 2m$  且  $k = 4m + 1$  时,  $C^m$ - 协调有限元已在文献 [10, 40] 中构造, 也可参见文献 [35, 第 8.1 小节] 及其引用的文献, 但文献 [35] 所用的自由度与 (3.9b) 和 (3.9c) 不同. 在样条文献 [35] 中, 自由度也称为节点最小确定集, 是函数及其导数在某些节点的值. 而自由度 (3.9b) 和 (3.9c) 以积分形式出现, 这有利于证明自由度的唯一可解性和有限元 de Rham 复形的构造. 在任意维单纯形上, 采用积分形式自由度的光滑有限元在文献 [32] 中首次构造出来.

给定网格  $\mathcal{T}_h$ , 定义全局  $C^m$ - 连续的有限元空间

$$\mathbb{V}_k(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}) = \{u \in L^2(\Omega) : \text{对所有 } T \in \mathcal{T}_h, \text{ 有 } u|_T \in \mathbb{P}_k(T), \text{ 自由度 (3.9) 是单值的}\}.$$

由于  $r^v \geq r^e = m$ , 所以单值的自由度 (3.9a) 和 (3.9b) 将意味着  $u \in C^m(\Omega)$ . 事实上, 记  $w = \frac{\partial^\beta u}{\partial n_e^\beta}|_e \in \mathbb{P}_{k-\beta}(e)$ , 其中  $\beta = 0, \dots, r^e$ . 根据边上的一维样条,  $w$  由单值的自由度

$$\frac{\partial^i w}{\partial t_e^i}(\mathbf{v}), \quad i = 0, \dots, r^v - \beta, \quad \mathbf{v} \in \Delta_0(e); \quad \int_e w q ds, \quad q \in \mathbb{P}_{k-2(r^v+1)+\beta}(e)$$

所确定. 因此  $w$  是单值的, 这说明了  $u \in C^m(\Omega)$ .

空间  $\mathbb{V}_k(\mathcal{T}_h; \mathbf{r})$  的维数是

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{V}_k(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}) &= |\Delta_0(\mathcal{T}_h)| \binom{r^v + 2}{2} + |\Delta_1(\mathcal{T}_h)| \left[ \binom{k - 2r^v + r^e}{2} - \binom{k - 2r^v - 1}{2} \right] \\ &\quad + |\Delta_2(\mathcal{T}_h)| \left[ \binom{k - 3r^e - 1}{2} - 3 \binom{r^v - 2r^e}{2} \right]. \end{aligned}$$

### 4 有限元 de Rham 复形

本节构建具有适当自由度的有限元空间, 使得有限元 de Rham 复形 (4.1) 是正合的:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\hookrightarrow} \mathbb{V}_{k+1}^{\text{curl}}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_0) \xrightarrow{\text{curl}} \mathbb{V}_k^{\text{div}}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \xrightarrow{\text{div}} \mathbb{V}_{k-1}^{L^2}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_2) \rightarrow 0. \quad (4.1)$$

空间  $\mathbb{V}_k(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_2)$  表示为  $\mathbb{V}_k^{L^2}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_2)$ , 以强调它被视为  $L^2(\Omega)$  的子空间, 尽管当  $\mathbf{r}_2 \geq 0$  时它是连续的.

与经典的有限元外微分复形 (finite element exterior calculus, FEEC)<sup>[3]</sup> 不同, 本文将对子单纯形 (对于二维三角剖分是顶点和边) 添加额外的光滑性, 这些光滑性由 3 个整数向量  $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1$  和  $\mathbf{r}_2$  描述. 每个  $\mathbf{r}_i = (r_i^v, r_i^e)$  ( $i = 0, 1, 2$ ) 包含两个参数, 分别指定顶点和边的光滑性, 且有  $r_i^v \geq 2r_i^e$ . 在文献 [32] 中构建的有限元 de Rham 复形对应复形 (4.1) 中  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 + 1$  且  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 - 1$  的情形. 本文考虑更一般的情形  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 + 1, \mathbf{r}_2 \geq \mathbf{r}_1 \ominus 1 = \max\{\mathbf{r}_1 - 1, -1\}$ .

### 4.1 连续的向量有限元空间和递减的光滑性

首先考虑简单情形, 即向量函数空间是连续的, 而且光滑参数每次递减 1:

$$\mathbf{r}_1 \geq 0, \quad \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 + 1, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 - 1.$$

由于  $\mathbf{r}_1 \geq 0$ , 所以  $\mathbb{V}_k^{\text{div}}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_1) = \mathbb{V}_k^2(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_1) := \mathbb{V}_k(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_1) \times \mathbb{V}_k(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_1)$ , 且  $\mathbb{V}_{k+1}^{\text{curl}}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_0) = \mathbb{V}_{k+1}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_1 + 1)$  至少是  $C^1$  连续的. 在这种情形下, (4.1) 也称为离散的 Stokes 复形. 有限元空间  $\mathbb{V}_k^{\text{div}}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_1)$  是  $H^1$ - 协调的, 可以用来离散 Stokes 方程中的速度空间.

**引理 4.1** 设  $r_1^e \geq 0, r_1^v \geq 2r_1^e + 1, k \geq 2r_1^v + 2$ , 且设  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 + 1, \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 - 1$ . 记

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{V}_{k+1}^{\text{curl}}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_0) &= C_{00}|\Delta_0(\mathcal{T}_h)| + C_{01}|\Delta_1(\mathcal{T}_h)| + C_{02}|\Delta_2(\mathcal{T}_h)|, \\ \dim \mathbb{V}_k^{\text{div}}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_1) &= C_{10}|\Delta_0(\mathcal{T}_h)| + C_{11}|\Delta_1(\mathcal{T}_h)| + C_{12}|\Delta_2(\mathcal{T}_h)|, \\ \dim \mathbb{V}_{k-1}^{L^2}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_2) &= C_{20}|\Delta_0(\mathcal{T}_h)| + C_{21}|\Delta_1(\mathcal{T}_h)| + C_{22}|\Delta_2(\mathcal{T}_h)|. \end{aligned}$$

系数  $C_{ij}$  在表 3 中给出, 并且满足  $C_{0i} - C_{1i} + C_{2i} = (-1)^i (i = 0, 1, 2)$ .

**证明** 与  $|\Delta_0(\mathcal{T}_h)|$  相关的维数以及  $C_{00} - C_{10} + C_{20} = 1$  可以直接验证. 对于列  $|\Delta_1(\mathcal{T}_h)|$ , 通过抵消掉相同的  $k - 1 - 2r_1^v$ , 计算可得

$$C_{01} - C_{11} + C_{21} = \sum_{i=0}^{r_0^e} (i - 1) - 2 \sum_{i=0}^{r_1^e} i + \sum_{i=0}^{r_2^e} (i + 1) = -1.$$

由这两个等式可知  $C_{02} - C_{12} + C_{22} = 1$  是 (2.7) 的一个简单推论. □

作为推论, 本文得到了以下的多项式泡复形.

**推论 4.1** 设  $r_1^e \geq 0, r_1^v \geq 2r_1^e + 1, k \geq 2r_1^v + 2$ , 并设  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 + 1, \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 - 1$ . 则多项式泡函数复形

$$0 \xrightarrow{C} \mathbb{B}_{k+1}(\mathbf{r}_0) \xrightarrow{\text{curl}} \mathbb{B}_k^2(\mathbf{r}_1) \xrightarrow{\text{div}} \mathbb{B}_{k-1}(\mathbf{r}_2) \xrightarrow{Q_0} \mathbb{R} \rightarrow 0 \tag{4.2}$$

是正合的, 其中  $Q_0$  是到常数空间的  $L^2$ - 投影.

**证明** 显然有  $\text{curl } \mathbb{B}_{k+1}(\mathbf{r}_0) \subseteq \mathbb{B}_k^2(\mathbf{r}_1) \cap \ker(\text{div})$ . 对于  $\mathbf{v} \in \mathbb{B}_k^2(\mathbf{r}_1) \cap \ker(\text{div})$ , 应用复形 (2.6) 得到  $\mathbf{v} = \text{curl } q$ , 其中  $q \in \mathbb{P}_{k+1}(T)$ . 由于  $\text{curl } q \in \mathbb{B}_k^2(\mathbf{r}_1)$ , 所以有  $(\text{curl } q)|_{\partial T} = 0$ , 这意味着  $q|_{\partial T}$  是常数. 因此, 通过减去一个常数, 可以选择  $q \in \mathbb{P}_{k+1}(T)$  满足  $q|_{\partial T} = 0$ , 即  $q \in \mathbb{B}_{k+1}(\mathbf{r}_0)$ . 这证明了  $\text{curl } \mathbb{B}_{k+1}(\mathbf{r}_0) = \mathbb{B}_k^2(\mathbf{r}_1) \cap \ker(\text{div})$ .

根据引理 4.1 中的最后一列, 得到

$$\dim \mathbb{B}_{k+1}(\mathbf{r}_0) - \dim \mathbb{B}_k^2(\mathbf{r}_1) + \dim \mathbb{B}_{k-1}(\mathbf{r}_2) - 1 = 0.$$

这与引理 2.1 一起得出泡函数复形 (4.2) 的正合性. □

表 3 系数  $C_{ij}$

	$ \Delta_0(\mathcal{T}_h) $	$ \Delta_1(\mathcal{T}_h) $	$ \Delta_2(\mathcal{T}_h) $
$\dim \mathbb{V}_{k+1}^{\text{curl}}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_0)$	$\binom{r_0^v+2}{2}$	$\sum_{i=0}^{r_0^e} (k - 2r_0^v + i)$	$\binom{k+3}{2} - 3(C_{00} + C_{01})$
$\dim \mathbb{V}_k^{\text{div}}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_1)$	$2\binom{r_1^v+2}{2}$	$2\sum_{i=0}^{r_1^e} (k - 1 - 2r_1^v + i)$	$2\binom{k+2}{2} - 3(C_{10} + C_{11})$
$\dim \mathbb{V}_{k-1}^{L^2}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_2)$	$\binom{r_2^v+2}{2}$	$\sum_{i=0}^{r_2^e} (k - 2 - 2r_2^v + i)$	$\binom{k+1}{2} - 3(C_{20} + C_{21})$
$C_{0i} - C_{1i} + C_{2i}$	1	-1	1

**定理 4.1** 设  $r_1^e \geq 0, r_1^v \geq 2r_1^e + 1, k \geq 2r_1^v + 2$ , 并设  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 + 1, \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 - 1$ . 则有限元复形

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\subset} \mathbb{V}_{k+1}^{\text{curl}}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_0) \xrightarrow{\text{curl}} \mathbb{V}_k^{\text{div}}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_1) \xrightarrow{\text{div}} \mathbb{V}_{k-1}^{L^2}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_2) \rightarrow 0 \tag{4.3}$$

是正合的.

**证明** 因为有限元空间都是协调的, 所以 (4.3) 是一个复形, 且

$$\text{curl } \mathbb{V}_{k+1}^{\text{curl}}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_0) = \mathbb{V}_k^{\text{div}}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_1) \cap \ker(\text{div}).$$

根据引理 4.1 和 Euler 公式, 可得

$$\begin{aligned} & 1 - \dim \mathbb{V}_{k+1}^{\text{curl}}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_0) + \dim \mathbb{V}_k^{\text{div}}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_1) - \dim \mathbb{V}_{k-1}^{L^2}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_2) \\ &= 1 - |\Delta_0(\mathcal{T}_h)| + |\Delta_1(\mathcal{T}_h)| - |\Delta_2(\mathcal{T}_h)| \\ &= 0. \end{aligned}$$

由引理 2.1 可得复形 (4.3) 的正合性. □

**例 4.1** Falk 和 Neilan<sup>[26]</sup> 构建的二维有限元 de Rham 复形对应于  $r_1^e = 0, r_1^v = 1$  以及  $k \geq 4$  的情形:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\subset} \text{Argy}_{k+1} \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{\text{curl}} \text{Herm}_k \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{\text{div}} \mathbb{V}_{k-1}^{L^2} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \rightarrow 0.$$

这里在符号中省略了  $\mathcal{T}_h$  并将  $\mathbf{r}_i = \begin{pmatrix} r_i^v \\ r_i^e \end{pmatrix}$  写作列向量. 速度的有限元空间是  $C^0$  的, 因此前一个有限元是  $C^1$  的, 其最低次是五次 Argyris 元. 压力元是不连续的  $\mathbb{P}_3$ , 但在顶点处连续. 如果对压力也用连续元, 即  $\mathbf{r}_2 = (2, 0)$ , 则  $\mathbf{r}_1 = (3, 1), \mathbf{r}_0 = (4, 2)$  并且  $k \geq 8$ , 这个有限元可应用于应变梯度弹性问题 (参见文献 [21, 36]). 稍后, 将放宽等式关系  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 - 1$  并构建具有连续压力元的次数相对低一些的 Stokes 有限元空间.

注意, 取不到  $\mathbf{r}_1 = (0, 0)$  和  $\mathbf{r}_2 = (-1, -1)$ , 因为参数  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 + 1 = (1, 1)$  无法定义一个  $C^1$  元. 事实上, Stokes 元  $\text{Lagrange}_k - \text{DG}_{k-1}$  的 div 稳定性更为微妙, 无法从我们现有的框架中推出.

### 4.2 法向连续的向量有限元空间

继续考虑  $r_1^e = -1$  的情形, 并通过以下方式来确定边上的光滑性:

$$r_0^e = 0, \quad r_1^e = -1, \quad r_2^e = -1.$$

顶点光滑性的约束为

$$r_0^v = r_1^v + 1, \quad r_1^v \geq -1, \quad r_2^v = \max\{r_1^v - 1, -1\}.$$

标量函数的有限元空间  $\mathbb{V}_{k+1}^{\text{curl}}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_0)$  和  $\mathbb{V}_{k-1}^{L^2}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_2)$  保持不变. 我们需要定义光滑参数为  $\mathbf{r}_1 = (r_1^v, -1)$  的  $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$  有限元空间. 向量函数在边上不连续. 但为了保证  $H(\text{div})$ - 协调性, 法向分量应该连续. 对光滑参数更准确的写法为

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} r_1^v \\ -1, 0 \end{pmatrix},$$

其中切向分量为  $-1$  (不连续) 而法向分量为  $0$  (连续), 在文献 [32] 中采用了  $(\frac{r_1^v}{2})$  的表示. 这里仍然使用简化形式  $\mathbf{r}_1 = (r_1^v, -1)$ , 将  $\mathbb{V}_k^{\text{div}}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_1)$  空间中的  $r_1^e = -1$  理解为法向连续性.

采用  $\mathbb{P}_k(T; \mathbb{R}^2)$  作为形函数空间, 其中  $k \geq \max\{2r_1^v + 2, 1\}$ . 对于  $r_1^v \geq 0$ , 自由度为

$$\nabla^i \mathbf{v}(\mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \in \Delta_0(T), \quad i = 0, \dots, r_1^v, \quad (4.4a)$$

$$\int_e \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} q ds, \quad \mathbf{q} \in \mathbb{P}_{k-2(r_1^v+1)}(e), \quad e \in \Delta_1(T), \quad (4.4b)$$

$$\int_e \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} q ds, \quad \mathbf{q} \in \mathbb{P}_{k-2(r_1^v+1)}(e), \quad e \in \Delta_1(T), \quad (4.4c)$$

$$\int_T \mathbf{v} \cdot \mathbf{q} dx, \quad \mathbf{q} \in \mathbb{B}_k^2((r_1^v, 0)). \quad (4.4d)$$

尽管  $r_1^e = -1$ , 但仍然使用泡函数  $\mathbb{B}_k((r_1^v, 0))$  而不是  $\mathbb{B}_k((r_1^v, -1))$  作为内部自由度. 这可以让我们在边上拥有自由度 (4.4b)–(4.4c), 即在一个三角形上使用参数为  $(r_1^v, 0)$  的向量 Hermite 元. 在定义全局  $H(\text{div})$ - 协调有限元空间时, 切向分量 (4.4c) 被视为局部的, 即在内部边上是双值的, 而法向分量 (4.4b) 是单值的, 保证了法向的连续性.

当  $r_1^v = -1$  时, 顶点处没有自由度, 自由度为

$$\int_e \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} q ds, \quad \mathbf{q} \in \mathbb{P}_k(e), \quad e \in \Delta_1(T), \quad (4.5a)$$

$$\int_e \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} q ds, \quad \mathbf{q} \in \mathbb{P}_{k-2}(e), \quad e \in \Delta_1(T), \quad (4.5b)$$

$$\int_T \mathbf{v} \cdot \mathbf{q} dx, \quad \mathbf{q} \in \mathbb{B}_k^2((0, 0)). \quad (4.5c)$$

内部自由度变成  $\mathbb{B}_k((0, 0))$ , 即在一个三角形上使用向量 Lagrange 有限元的自由度. 因此单个三角形上自由度 (4.5) 的唯一可解性来自于向量 Lagrange 元的唯一可解性. 在每条边上, 使用  $t-n$  (切向-法向) 坐标; 在顶点处, 使用包含该顶点的两条边的两个法方向形成的坐标, 并合并到 (4.5a) 中, 这样法向分量变成了完整的多项式空间  $\mathbb{P}_k(e)$ , 而切向分量还是只对应于边的泡函数空间  $b_e \mathbb{P}_{k-2}(e)$ . 对法向分量自由度取单值可以保证法向连续性.

定义全局  $H(\text{div})$ - 协调有限元空间

$$\mathbb{V}_k^{\text{div}}(\mathcal{T}_h; (r_1^v, -1)) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega; \mathbb{R}^2) : \mathbf{v}|_T \in \mathbb{P}_k(T; \mathbb{R}^2), \forall T \in \mathcal{T}_h, \text{自由度 (4.4a) 和 (4.4b) 是单值的}\},$$

$$\mathbb{V}_k^{\text{div}}(\mathcal{T}_h; (-1, -1)) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega; \mathbb{R}^2) : \mathbf{v}|_T \in \mathbb{P}_k(T; \mathbb{R}^2), \forall T \in \mathcal{T}_h, \text{自由度 (4.5a) 是单值的}\},$$

其中  $r_1^v \geq 0$ . 这里切向分量 (4.4c) 和 (4.5b) 被视为局部的, 即在每条内部边可能是双值的.

**定理 4.2** 假设参数  $\mathbf{r}_0$ 、 $\mathbf{r}_1$  和  $\mathbf{r}_2$  满足

$$r_0^v = r_1^v + 1, \quad r_1^v \geq -1, \quad r_2^v = \max\{r_1^v, 0\} - 1,$$

$$r_0^e = 0, \quad r_1^e = -1, \quad r_2^e = -1.$$

设  $k \geq \max\{2r_1^v + 2, 1\}$ . 则有限元复形

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\subset} \mathbb{V}_{k+1}^{\text{curl}}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_0) \xrightarrow{\text{curl}} \mathbb{V}_k^{\text{div}}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_1) \xrightarrow{\text{div}} \mathbb{V}_{k-1}^{L^2}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_2) \rightarrow 0 \quad (4.6)$$

是正合的.

**证明** 显然 (4.6) 是一个复形, 且

$$\text{curl } \mathbb{V}_{k+1}^{\text{curl}}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_0) = \mathbb{V}_k^{\text{div}}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_1) \cap \ker(\text{div}).$$

然后计算维数. 除了  $C_{11} = k - 1 - 2r_1^v$ , 引理 4.1 中的维数计算大部分仍然有效. 由于  $C_{01} = k - 2r_0^v$  和  $C_{21} = 0$ , 所以恒等式  $C_{01} - C_{11} + C_{21} = -1$  仍然成立. 后续证明类似定理 4.1.  $\square$

**例 4.2** 当  $k \geq 1$ ,  $r_0^v = 0$ ,  $r_1^v = -1$ ,  $r_2^v = -1$  时, 得到标准的有限元 de Rham 复形

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\subset} \text{Lagrange}_{k+1} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{\text{curl}} \text{BDM}_k \left( \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{\text{div}} \text{DG}_{k-1} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \rightarrow 0.$$

若取  $r_0^v = 1$ ,  $r_1^v = 0$ ,  $r_2^v = -1$  并且  $k \geq 2$ , 可得

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\subset} \text{Herm}_{k+1} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{\text{curl}} \text{Sten}_k \left( \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{\text{div}} \text{DG}_{k-1} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \rightarrow 0.$$

该复形首次出现在文献 [23] 中.

### 4.3 不等式约束的一般情形

考虑更一般的情形, 对光滑参数  $\mathbf{r}_1$  和  $\mathbf{r}_2$  引入不等式约束:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 + 1, \quad \mathbf{r}_1 \geq -1, \quad \mathbf{r}_2 \geq \mathbf{r}_1 \ominus 1. \tag{4.7}$$

为了定义有限元空间, 进一步要求

$$r_1^v \geq 2r_1^e + 1, \quad r_2^v \geq 2r_2^e, \quad k \geq \max\{2r_1^v + 2, 2r_2^v + 2, 3r_2^e + 4, (r_2^e + 4)[r_2^v = 0]\}.$$

标量函数的有限元空间  $\mathbb{V}_{k+1}^{\text{curl}}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_0)$  和  $\mathbb{V}_{k-1}^{L^2}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_2)$  保持不变. 接下来为  $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$  定义一个新的有限元空间. 选择  $\mathbb{P}_k(T; \mathbb{R}^2)$  作为形函数空间. 自由度为

$$\nabla^i \mathbf{v}(\mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \in \Delta_0(T), \quad i = 0, \dots, r_1^v, \tag{4.8a}$$

$$\nabla^j \text{div } \mathbf{v}(\mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \in \Delta_0(T), \quad j = \max\{r_1^v, 0\}, \dots, r_2^v, \tag{4.8b}$$

$$\int_e \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} q ds, \quad q \in \mathbb{P}_{k-2(r_1^v+1)}(e), \quad e \in \Delta_1(T), \tag{4.8c}$$

$$\int_e \partial_n^i (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) q ds, \quad q \in \mathbb{P}_{k-2(r_1^v+1)+i}(e), \quad e \in \Delta_1(T), \quad i = 0, \dots, r_1^e, \tag{4.8d}$$

$$\int_e \partial_n^i (\text{div } \mathbf{v}) q ds, \quad q \in \mathbb{P}_{k-1-2(r_2^v+1)+i}(e), \quad e \in \Delta_1(T), \quad i = 0, \dots, r_2^e, \tag{4.8e}$$

$$\int_T \text{div } \mathbf{v} q dx, \quad q \in \mathbb{B}_{k-1}(\mathbf{r}_2)/\mathbb{R}, \tag{4.8f}$$

$$\int_T \mathbf{v} \cdot \mathbf{q} dx, \quad \mathbf{q} \in \text{curl } \mathbb{B}_{k+1}(\mathbf{r}_1 + 1). \tag{4.8g}$$

接下来解释自由度的变化. 这里添加了与  $\text{div } \mathbf{v}$  相关的自由度 (4.8b)、(4.8e) 和 (4.8f) 来确定  $\text{div } \mathbf{v} \in \mathbb{V}_{k-1}^{L^2}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_2)$ . 对于内部自由度, 使用泡函数复形 (4.2) 将其分解为  $\text{div}$  的值域及其正交补. 在边上, 关于  $\text{div } \mathbf{v}$  的自由度, 引入了切向分量和法向分量的法向导数的一些线性依赖, 因此需要消除一些冗余.

更具体地, 对于  $i = 0, 1, \dots, r_1^e - 1$  且  $r_2^e = r_1^e - 1 \geq 0$ ,

$$\partial_n^i(\operatorname{div} \mathbf{v}) = \partial_n^i(\partial_n(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) + \partial_t(\mathbf{v} \cdot \mathbf{t})) = \partial_n^{i+1}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) + \partial_t(\partial_n^i(\mathbf{v} \cdot \mathbf{t})).$$

第二项  $\partial_t(\partial_n^i(\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}))$  将由 (4.8a) 和 (4.8d) 确定. 法向导数的法向导数  $\partial_n^{i+1}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})$  ( $i \geq 0$ ) 被纳入 (4.8e), 而函数值  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  在 (4.8c) 中给出. 自由度 (4.8c)–(4.8e) 的线性组合将确定

$$\int_e \partial_n^i \mathbf{v} \cdot \mathbf{q} ds, \quad \mathbf{q} \in \mathbb{P}_{k-2(r_1^v+1)+i}^2(e), \quad e \in \Delta_1(T_h), \quad i = 0, 1, \dots, r_1^e.$$

这样就回到了之前定义的光滑有限元, 从而得到唯一可解性.

**引理 4.2** 假设  $\mathbf{r}_1$  和  $\mathbf{r}_2$  满足 (4.7),  $r_1^v \geq 2r_1^e + 1$ ,  $r_2^v \geq 2r_2^e$ , 且  $k \geq \max\{2r_2^v + 2, 3r_2^e + 4, (r_2^e + 4)[r_2^v = 0]\}$ . 则自由度 (4.8a)–(4.8g) 对  $\mathbb{P}_k(T; \mathbb{R}^2)$  是唯一可解的.

**证明** 条件  $k \geq \max\{2r_2^v + 2, 3r_2^e + 4, (r_2^e + 4)[r_2^v = 0]\}$  确保了  $\dim \mathbb{B}_{k-1}(\mathbf{r}_2) \geq 1$ , 这可以通过证明  $|S_2(T)| > 0$  来验证, 参见引理 3.5.

与  $\operatorname{div} \mathbf{v}$  相关的自由度 (4.8b)、(4.8e) 和 (4.8f) 的数量是  $\dim \mathbb{P}_{k-1}(T) - 3\binom{r_1^v+1}{2} - 1$ , 这与  $\mathbf{r}_2$  无关. 因此, 自由度 (4.8a)–(4.8g) 的数量也与  $\mathbf{r}_2$  无关. 所以可以考虑  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 \ominus 1$  的情形, 而这种情形之前已经证明过自由度 (4.8a)–(4.8g) 的数量等于  $\mathbb{P}_k(T; \mathbb{R}^2)$  的维数.

取  $\mathbf{v} \in \mathbb{P}_k(T; \mathbb{R}^2)$  并假设所有自由度 (4.8a)–(4.8g) 为 0. 自由度 (4.8c) 为 0 意味着  $\operatorname{div} \mathbf{v} \in L_0^2(T)$ . 利用自由度 (4.8a)–(4.8b) 和 (4.8e)–(4.8f) 为 0, 得到  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ . 再由自由度 (4.8a) 和 (4.8c)–(4.8d) 为 0 可知  $\mathbf{v} \in \operatorname{curl} \mathbb{B}_{k+1}(\mathbf{r}_1 + 1)$ . 因此, 由自由度 (4.8g) 为 0 可得  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .  $\square$

定义全局  $C^{r_1^e}$ - 连续的有限元空间

$$\mathbb{V}_k^{\operatorname{div}}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega; \mathbb{R}^2) : \mathbf{v}|_T \in \mathbb{P}_k(T; \mathbb{R}^2), \forall T \in \mathcal{T}_h, \text{自由度 (4.8a)–(4.8e) 是单值的}\}.$$

当  $\mathbf{r}_2 \geq \mathbf{r}_1 \ominus 1$  时, 有

$$\mathbb{V}_k^{\operatorname{div}}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \subseteq \mathbb{V}_k^{\operatorname{div}}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1 \ominus 1).$$

**定理 4.3** 设  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 + 1$ ,  $\mathbf{r}_1 \geq -1$ ,  $\mathbf{r}_2 \geq \mathbf{r}_1 \ominus 1$  满足  $r_1^v \geq 2r_1^e + 1$ ,  $r_2^v \geq 2r_2^e$ . 假设  $k \geq \max\{2r_1^v + 2, 2r_2^v + 2, 3r_2^e + 4, (r_2^e + 4)[r_2^v = 0]\}$ . 则有限元复形

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\subseteq} \mathbb{V}_{k+1}^{\operatorname{curl}}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_0) \xrightarrow{\operatorname{curl}} \mathbb{V}_k^{\operatorname{div}}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \xrightarrow{\operatorname{div}} \mathbb{V}_{k-1}^{L^2}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_2) \rightarrow 0 \quad (4.9)$$

是正合的.

**证明** 首先根据构造有  $\operatorname{curl} \mathbb{V}_{k+1}^{\operatorname{curl}}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_0) \subseteq \mathbb{V}_k^{\operatorname{div}}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  和  $\operatorname{div} \mathbb{V}_k^{\operatorname{div}}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \subseteq \mathbb{V}_{k-1}^{L^2}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_2)$ , 这样可以直接验证 (4.9) 是一个复形. 同样显然成立

$$\operatorname{curl} \mathbb{V}_{k+1}^{\operatorname{curl}}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_0) = \mathbb{V}_k^{\operatorname{div}}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \cap \ker(\operatorname{div}).$$

已经证明了当  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 \ominus 1$  时的正合性. 在计算维数时, 只需要检查与这种情形的差异.

为  $\mathbb{V}_k^{\operatorname{div}}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  和  $\mathbb{V}_{k-1}^{L^2}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_2)$  新增的顶点自由度的个数是相等的, 即

$$C_{10}(\mathbf{r}_2) - C_{10}(\mathbf{r}_1 \ominus 1) = C_{20}(\mathbf{r}_2) - C_{20}(\mathbf{r}_1 \ominus 1).$$

对边上的自由度也可以应用同样的论证. 因此, 交替列和保持不变, 定理 4.1 的证明仍然适用.  $\square$

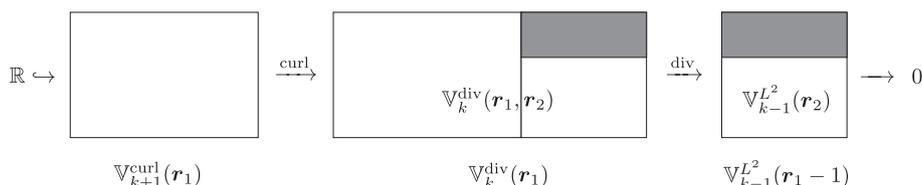


图 9 在光滑有限元 de Rham 复形 (4.3) 中对  $\text{div } \mathbf{v}$  引入额外的约束得到有限元 de Rham 复形 (4.9)

下面使用图 9 来说明有限元 de Rham 复形 (4.9) 的正合性. 它是在正合复形 (4.3) 的基础上, 通过对  $\text{div } \mathbf{v}$  引入额外的光滑性, 即对  $\text{div } \mathbf{v}$  增加更多约束而得到的. 图 9 中  $\mathbb{V}_{k-1}^{L^2}(\mathbf{r}_2)$  的灰色部分对应于  $\text{div } \mathbf{v}$  需要满足的额外光滑性, 白色部分对应泡函数空间.

下面提供两个以 Lagrange 元结尾的 de Rham 复形的例子.

**例 4.3** 选择  $\mathbf{r}_1 = (1, 0)$ ,  $\mathbf{r}_2 = 0$ , 且  $k \geq 4$ . 现在可以选择连续的压力空间而不增加多项式次数. 复形为

$$\mathbb{R} \hookrightarrow \text{Argv}_{k+1} \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{\text{curl}} \mathbb{V}_k^{\text{div}} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{\text{div}} \text{Lagrange}_{k-1} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \rightarrow 0.$$

速度空间是一个加了约束的 Hermite 空间,  $\text{div } \mathbf{v}$  在顶点和边上是连续的. 这种  $\mathbb{P}_k$ - $\mathbb{P}_{k-1}$  Stokes 元与 Taylor-Hood 元相比的优势是, 散度为 0 是逐点保证的. Falk 和 Neilan<sup>[26]</sup> 构造的  $H^1(\text{div})$ - $H^1$  有限元空间对应这个复形后半部分的子空间.

**例 4.4** 考虑  $\mathbf{r}_1 = -1$  和  $\mathbf{r}_2 = 0$  且  $k \geq 4$  的情形. 复形为

$$\mathbb{R} \hookrightarrow \text{Lagrange}_{k+1} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{\text{curl}} \mathbb{V}_k^{\text{div}} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{\text{div}} \text{Lagrange}_{k-1} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \rightarrow 0,$$

这是文献 [34, 第 5.2.1 小节] 中提到的有限元 de Rham 复形的旋转版本. 空间  $\mathbb{V}_k^{\text{div}}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0)$  可用于离散化四阶 div 或 curl 方程<sup>[27, 34]</sup>, 也可以将  $\mathbb{V}_k^{\text{div}}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0)$  和  $\text{Lagrange}_{k-1}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_0)$  应用于 Poisson 方程  $-\Delta u = f$  的混合有限元方法中.

为了简洁起见, 后文中将省略全局有限元空间符号中的三角剖分  $\mathcal{T}_h$ . 例如,  $\mathbb{V}_k^{\text{div}}(\mathcal{T}_h; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  将简称为  $\mathbb{V}_k^{\text{div}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ .

## 5 更多的有限元复形

本节基于有限元 de Rham 复形来构建更多的有限元复形.

### 5.1 有限元 curl div 复形

基于有限元 de Rham 复形 (4.9), 可以得到 curl div 复形<sup>[7]</sup>

$$\mathbb{R} \times \{0\} \hookrightarrow H^1(\Omega) \times \mathbb{R} \xrightarrow{(\text{curl}, \mathbf{x})} \mathbf{H}(\text{curl div}, \Omega) \xrightarrow{\text{curl div}} \mathbf{H}(\text{div}, \Omega) \xrightarrow{\text{div}} L^2(\Omega) \rightarrow 0$$

的有限元离散化, 其中

$$\mathbf{H}(\text{curl div}, \Omega) := \mathbf{H}^{0,1}(\text{div}, \Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega) : \text{div } \mathbf{v} \in H^1(\Omega)\}.$$

算子  $(\text{curl}, \boldsymbol{x})$  定义为

$$(\text{curl}, \boldsymbol{x}) \begin{pmatrix} v \\ c \end{pmatrix} := \text{curl } v + c\boldsymbol{x},$$

其中  $v \in H^1(\Omega)$  和  $c \in \mathbb{R}$ .

**定理 5.1** 设  $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}_1 + 1$ ,  $\boldsymbol{r}_1 \geq -1$ ,  $\boldsymbol{r}_2 \geq \max\{\boldsymbol{r}_1 - 1, 0\}$ ,  $\boldsymbol{r}_3 \geq \max\{\boldsymbol{r}_2 - 2, -1\}$  满足  $r_1^v \geq 2r_1^e + 1$ ,  $r_2^v \geq 2r_2^e$ ,  $r_3^v \geq 2r_3^e$ . 假设  $k \geq \max\{2r_1^v + 2, 2r_2^v + 2, 3r_2^e + 4, (r_2^e + 4)[r_2^v = 0], 2r_3^v + 4, 3r_3^e + 6, (r_3^e + 6)[r_3^v = 0]\}$ . 则有限元复形

$$\mathbb{R} \times \{0\} \xrightarrow{\subset} \mathbb{V}_{k+1}^{\text{curl}}(\boldsymbol{r}_0) \times \mathbb{R} \xrightarrow{(\text{curl}, \boldsymbol{x})} \mathbb{V}_k^{\text{div}}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) \xrightarrow{\text{curl div}} \mathbb{V}_{k-2}^{\text{div}}(\boldsymbol{r}_2 - 1, \boldsymbol{r}_3) \xrightarrow{\text{div}} \mathbb{V}_{k-3}^{L^2}(\boldsymbol{r}_3) \rightarrow 0 \quad (5.1)$$

是正合的.

**证明** 根据复形 (4.9), 显然 (5.1) 是一个复形, 并且  $\text{div } \mathbb{V}_{k-2}^{\text{div}}(\boldsymbol{r}_2 - 1, \boldsymbol{r}_3) = \mathbb{V}_{k-3}^{L^2}(\boldsymbol{r}_3)$ . 因此下面将重点放在证明复形 (5.1) 的正合性上.

条件  $k \geq \max\{2r_2^v + 2, 3r_2^e + 4, (r_2^e + 4)[r_2^v = 0]\}$  蕴涵了  $\dim \mathbb{B}_{k-1}(\boldsymbol{r}_2) \geq 1$ , 而  $k \geq \max\{2r_3^v + 4, 3r_3^e + 6, (r_3^e + 6)[r_3^v = 0]\}$  蕴涵了  $\dim \mathbb{B}_{k-3}(\boldsymbol{r}_3) \geq 1$ . 从复形 (4.9) 的正合性得到

$$\text{div } \mathbb{V}_k^{\text{div}}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \mathbb{V}_{k-1}^{L^2}(\boldsymbol{r}_2), \quad \text{curl } \mathbb{V}_{k-1}^{\text{curl}}(\boldsymbol{r}_2) = \mathbb{V}_{k-2}^{\text{div}}(\boldsymbol{r}_2 - 1, \boldsymbol{r}_3) \cap \ker(\text{div}).$$

由于当  $\boldsymbol{r}_2 \geq 0$  时  $\mathbb{V}_{k-1}^{\text{curl}}(\boldsymbol{r}_2) = \mathbb{V}_{k-1}^{L^2}(\boldsymbol{r}_2)$ , 因此  $\text{curl div } \mathbb{V}_k^{\text{div}}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \mathbb{V}_{k-2}^{\text{div}}(\boldsymbol{r}_2 - 1, \boldsymbol{r}_3) \cap \ker(\text{div})$ .

对于  $\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}_k^{\text{div}}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) \cap \ker(\text{curl div})$ , 存在常数  $c$  使得  $\text{div } \boldsymbol{v} = 2c$ . 则有  $\text{div}(\boldsymbol{v} - c\boldsymbol{x}) = 0$ , 即  $\boldsymbol{v} - c\boldsymbol{x} \in \mathbb{V}_k^{\text{div}}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) \cap \ker(\text{div})$ . 因此, 由复形 (4.9) 的正合性可得  $\boldsymbol{v} \in \text{curl } \mathbb{V}_{k+1}^{\text{curl}}(\boldsymbol{r}_0) \oplus \boldsymbol{x}\mathbb{R}$ .  $\square$

3 维  $\text{curl div}$  复形的协调有限元离散更为复杂, 主要原因是光滑性要求  $\text{curl div } \boldsymbol{\tau} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ . 在后续工作 [20] 中, 我们将构造  $\text{curl div } \boldsymbol{\tau} \in H^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^3)$  的有限元空间及其相应的复形.

## 5.2 有限元弹性复形和 Hessian 复形

首先给出两个例子. 记

$$\mathbb{V}_k^{\text{div}}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2; \mathbb{M}) := \mathbb{V}_k^{\text{div}}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) \times \mathbb{V}_k^{\text{div}}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2).$$

在矩阵函数中, 每一行属于  $\mathbb{V}_k^{\text{div}}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ . 为了节省空间, 跳过序列中起始的常数空间  $\mathbb{R}$  和末尾的 0, 并在空间的符号中省略  $\mathcal{T}_h$ . 取整数  $k \geq 3$ . 第一个示例已在文献 [23] 中提出, 如图 10 所示. 从中可以推导出有限元弹性复形

$$\boldsymbol{RM} \xrightarrow{\subset} \text{ArgY}_{k+2} \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{\text{Air}} \text{HZ}_k \left( \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \mathbb{S} \right) \xrightarrow{\text{div}} \text{DG}_{k-1} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}; \mathbb{R}^2 \right) \rightarrow \mathbf{0}. \quad (5.2)$$

接下来看另外一个例子: 使用旋转后的微分算子, 并使用有限元空间  $\mathbb{V}^{\text{rot}}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$  来增加末尾空间的光滑性. 对于  $k \geq 5$ , 构造有限元 BGG 图 (如图 11 所示), 并从中推导出文献 [16] 中构造的有限元 Hessian 复形

$$\mathbb{P}_1 \xrightarrow{\subset} \mathbb{V}_{k+2}^{\text{hess}} \xrightarrow{\nabla^2} \boldsymbol{\Sigma}_k^{\text{rot}} \xrightarrow{\text{rot}} \mathbb{V}_{k-1}^{\text{grad}} \rightarrow \mathbf{0}. \quad (5.3)$$

注意, 复形 (5.3) 不是复形 (5.2) 的旋转, 因为复形 (5.3) 以连续的 Lagrange 元结尾, 而 (5.2) 末尾是不连续的分片多项式空间.

接下来介绍一般情形.

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Argy}_{k+2}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) & \xrightarrow{\text{curl}} & \text{Herm}_{k+1}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbb{R}^2\right) & \xrightarrow{\text{div}} & \mathbb{V}_k^{L^2}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \\
 & \nearrow \text{id} & & \nearrow -2 \text{sskw} & \\
 \text{Herm}_{k+1}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbb{R}^2\right) & \xrightarrow{\text{curl}} & \text{Sten}_k\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \mathbb{M}\right) & \xrightarrow{\text{div}} & \text{DG}_{k-1}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}; \mathbb{R}^2\right)
 \end{array}$$

图 10 文献 [23] 中有限元弹性复形的 BGG 图

**定理 5.2** 设  $\mathbf{r}_1 \geq -1$  且  $\mathbf{r}_2 \geq \mathbf{r}_1 \ominus 1$  满足  $r_1^v \geq 2r_1^e + 2$ ,  $r_2^v \geq 2r_2^e$ , 并设多项式次数  $k \geq \max\{2r_1^v + 3, 2r_2^v + 2, 3r_2^e + 5, 5[r_2^e = -1, r_2^v = 1], 3[r_2^e = -1, r_2^v = 0]\}$ . 则有图 12, 从中可以推导出有限元弹性复形

$$\mathbb{P}_1 \xrightarrow{\subset} \mathbb{V}_{k+2}^{\text{curl}}(\mathbf{r}_1 + 2) \xrightarrow{\text{Air}} \mathbb{V}_k^{\text{div}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbb{S}) \xrightarrow{\text{div}} \mathbb{V}_{k-1}^{L^2}(\mathbf{r}_2; \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbf{0}, \tag{5.4}$$

其中  $\mathbb{V}_k^{\text{div}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbb{S}) := \mathbb{V}_k^{\text{div}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbb{M}) \cap \ker(\text{sskw})$ .

**证明** 首先证明  $\text{sskw} \mathbb{V}_k^{\text{div}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbb{M}) = \mathbb{V}_k^{L^2}(\mathbf{r}_1)$ . 对于任意  $q \in \mathbb{V}_k^{L^2}(\mathbf{r}_1)$ , 通过图 12 中顶部复形的正合性, 可知存在  $\mathbf{v}_h \in \mathbb{V}_{k+1}^{\text{div}}(\mathbf{r}_1) = \mathbb{V}_{k+1}^{\text{curl}}(\mathbf{r}_1)$  使得  $\text{div} \mathbf{v}_h = q_h$ . 然后从反交换性质 (2.1) 得到  $q_h = 2 \text{sskw}(\text{curl} \mathbf{v}_h)$ .

其次, 条件  $k \geq \max\{2r_2^v + 2, 3r_2^e + 5, 5[r_2^e = -1, r_2^v = 1], 3[r_2^e = -1, r_2^v = 0]\}$  确保了  $\dim \mathbb{B}_{k-1}(\mathbf{r}_2) \geq 3$  (参见引理 3.6).

我们可以应用文献 [7] 中的 BGG 框架来得到复形 (5.4) 及其正合性. 但在二维情形下, 本文提供一个简单而直接的证明, 不调用抽象的理论框架. 显然 (5.4) 是一个复形. 下面通过两步来证明复形 (5.4) 的正合性.

**步骤 1** 证明  $\text{Air} \mathbb{V}_{k+2}^{\text{curl}}(\mathbf{r}_1 + 2) = \mathbb{V}_k^{\text{div}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbb{S}) \cap \ker(\text{div})$ .

对于  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{V}_k^{\text{div}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbb{S}) \cap \ker(\text{div})$ , 通过图 12 中底部复形的正合性可知, 存在  $\mathbf{v} \in \mathbb{V}_{k+1}^{\text{curl}}(\mathbf{r}_1 + 1; \mathbb{R}^2)$  使得  $\boldsymbol{\tau} = \text{curl} \mathbf{v}$ . 然后从 (2.1) 推导出

$$\text{div} \mathbf{v} = 2 \text{sskw}(\text{curl} \mathbf{v}) = 2 \text{sskw} \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}.$$

通过顶部 de Rham 复形的正合性可知, 存在  $q \in \mathbb{V}_{k+2}^{\text{curl}}(\mathbf{r}_1 + 2)$  使得  $\mathbf{v} = \text{curl} q$ . 因此  $\boldsymbol{\tau} = \text{curl} \mathbf{v} = \text{Air} q \in \text{Air} \mathbb{V}_{k+2}^{\text{curl}}(\mathbf{r}_1 + 2)$ .

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Argy}_{k+2}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) & \xrightarrow{\text{grad}} & \text{Herm}_{k+1}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbb{R}^2\right) & \xrightarrow{\text{rot}} & \mathbb{V}_k^{L^2}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \\
 & \nearrow \text{id} & & \nearrow -2 \text{sskw} & \\
 \text{Herm}_{k+1}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbb{R}^2\right) & \xrightarrow{\text{grad}} & \mathbb{V}_k^{\text{rot}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbb{M}\right) & \xrightarrow{\text{rot}} & \text{Lagrange}_{k-1}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbb{R}^2\right)
 \end{array}$$

图 11 文献 [16] 中有限元 Hessian 复形的 BGG 图

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbb{R} & \xrightarrow{\subset} & \mathbb{V}_{k+2}^{\text{curl}}(\mathbf{r}_1 + 2) & \xrightarrow{\text{curl}} & \mathbb{V}_{k+1}^{\text{div}}(\mathbf{r}_1 + 1) & \xrightarrow{\text{div}} & \mathbb{V}_k^{L^2}(\mathbf{r}_1) \longrightarrow \mathbf{0} \\
 & \nearrow \cdot(-\mathbf{x})^\perp & & \nearrow \text{id} & \nearrow -2 \text{sskw} & & \\
 \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\subset} & \mathbb{V}_{k+1}^{\text{curl}}(\mathbf{r}_1 + 1; \mathbb{R}^2) & \xrightarrow{\text{curl}} & \mathbb{V}_k^{\text{div}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbb{M}) & \xrightarrow{\text{div}} & \mathbb{V}_{k-1}^{L^2}(\mathbf{r}_2; \mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbf{0}
 \end{array}$$

图 12 弹性复形的有限元 BGG 图

**步骤 2** 证明  $\text{div } \mathbb{V}_k^{\text{div}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbb{S}) = \mathbb{V}_{k-1}^{L^2}(\mathbf{r}_2; \mathbb{R}^2)$ .

由于  $\text{div} : \mathbb{V}_k^{\text{div}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbb{M}) \rightarrow \mathbb{V}_{k-1}^{L^2}(\mathbf{r}_2; \mathbb{R}^2)$  是满射, 所以给定  $\mathbf{q} \in \mathbb{V}_{k-1}^{L^2}(\mathbf{r}_2; \mathbb{R}^2)$ , 可以找到  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{V}_k^{\text{div}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbb{M})$  使得  $\text{div } \boldsymbol{\tau} = \mathbf{q}$ . 通过图 12, 可以找到  $\mathbf{v} \in \mathbb{V}_{k+1}^{\text{div}}(\mathbf{r}_1 + 1)$  使得  $\text{div } \mathbf{v} = -2 \text{sskw } \boldsymbol{\tau}$ . 令  $\boldsymbol{\tau}^s = \boldsymbol{\tau} + \text{curl } \mathbf{v}$ . 则  $\text{div } \boldsymbol{\tau}^s = \text{div } \boldsymbol{\tau} = \mathbf{q}$  且  $2 \text{sskw } \boldsymbol{\tau}^s = 2 \text{sskw } \boldsymbol{\tau} + 2 \text{sskw } \text{curl } \mathbf{v} = 2 \text{sskw } \boldsymbol{\tau} + \text{div } \mathbf{v} = 0$ , 即  $\boldsymbol{\tau}^s$  是对称的. 因此, 找到  $\boldsymbol{\tau}^s \in \mathbb{V}_k^{\text{div}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbb{S})$  满足  $\text{div } \boldsymbol{\tau}^s = \mathbf{q}$ .  $\square$

在 (5.4) 中,  $\mathbb{V}_k^{\text{div}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbb{S})$  定义为抽象的核空间  $\mathbb{V}_k^{\text{div}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbb{M}) \cap \ker(\text{sskw})$ . 接下来给出空间  $\mathbb{V}_k^{\text{div}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbb{S})$  的有限元描述, 从而可以给出局部的基函数. 在每个三角形上, 采用  $\mathbb{P}_k(T; \mathbb{S})$  作为形函数空间. 通过对称化自由度 (4.8a)–(4.8g), 本文提出以下自由度用于定义空间  $\mathbb{V}_k^{\text{div}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbb{S})$ :

$$\nabla^i \boldsymbol{\tau}(\mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \in \Delta_0(T), \quad i = 0, \dots, r_1^v, \quad (5.5a)$$

$$\nabla^j \text{div } \boldsymbol{\tau}(\mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \in \Delta_0(T), \quad j = r_1^v, \dots, r_2^v, \quad (5.5b)$$

$$\int_e (\boldsymbol{\tau} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{q} ds, \quad \mathbf{q} \in \mathbb{P}_{k-2(r_1^v+1)}^2(e), \quad e \in \Delta_1(T), \quad (5.5c)$$

$$\int_e \partial_n^i (\mathbf{t}^\top \boldsymbol{\tau} \mathbf{t}) q ds, \quad q \in \mathbb{P}_{k-2(r_1^v+1)+i}(e), \quad e \in \Delta_1(T), \quad i = 0, \dots, r_1^e, \quad (5.5d)$$

$$\int_e \partial_n^i (\text{div } \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{q} ds, \quad \mathbf{q} \in \mathbb{P}_{k-1-2(r_2^v+1)+i}^2(e), \quad e \in \Delta_1(T), \quad i = 0, \dots, r_2^e, \quad (5.5e)$$

$$\int_T \text{div } \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{q} dx, \quad \mathbf{q} \in \mathbb{B}_{k-1}^2(\mathbf{r}_2) / \mathbf{RM}, \quad (5.5f)$$

$$\int_T \boldsymbol{\tau} : \mathbf{q} dx, \quad \mathbf{q} \in \text{Air } \mathbb{B}_{k+2}(\mathbf{r}_1 + 2). \quad (5.5g)$$

**引理 5.1** 自由度 (5.5a)–(5.5g) 对于  $\mathbb{P}_k(T; \mathbb{S})$  是唯一可解的.

**证明** 自由度 (5.5b)、(5.5e) 和 (5.5f) 的数量是  $2 \dim \mathbb{P}_{k-1}(T) - 3 - 6 \binom{r_1^v+1}{2}$ . 于是自由度 (5.5a)–(5.5g) 的数量是

$$\begin{aligned} & 9 \binom{r_1^v+2}{2} + 6(k-1-2r_1^v) + 3 \sum_{i=0}^{r_1^e} (k-1-2r_1^v+i) + \dim \mathbb{B}_{k+2}(\mathbf{r}_1 + 2) \\ & + 2 \dim \mathbb{P}_{k-1}(T) - 3 - 6 \binom{r_1^v+1}{2} \\ & = \dim \mathbb{P}_{k+2}(T) + 2 \dim \mathbb{P}_{k-1}(T) - 3. \end{aligned}$$

由 (2.7) 可知上式等于  $\dim \mathbb{P}_k(T; \mathbb{S})$ .

取  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{P}_k(T; \mathbb{S})$ , 并假设所有的自由度 (5.5a)–(5.5g) 都为 0. 根据分部积分和 (5.5c), 有

$$(\text{div } \boldsymbol{\tau}, \mathbf{q})_T = 0, \quad \mathbf{q} \in \mathbf{RM}.$$

由于自由度 (5.5a)、(5.5b)、(5.5e) 和 (5.5f) 为 0, 得到  $\text{div } \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$ . 对于每条边  $e$ , 有

$$\begin{aligned} \partial_n^i (\text{div } \boldsymbol{\tau}) &= \partial_n^i (\text{div}(\mathbf{n}^\top \boldsymbol{\tau})) \mathbf{n} + \partial_n^i (\text{div}(\mathbf{t}^\top \boldsymbol{\tau})) \mathbf{t} \\ &= \partial_n^i (\partial_n(\mathbf{n}^\top \boldsymbol{\tau} \mathbf{n}) + \partial_t(\mathbf{n}^\top \boldsymbol{\tau} \mathbf{t})) \mathbf{n} + \partial_n^i (\partial_n(\mathbf{t}^\top \boldsymbol{\tau} \mathbf{n}) + \partial_t(\mathbf{t}^\top \boldsymbol{\tau} \mathbf{t})) \mathbf{t} \\ &= (\partial_n^{i+1}(\mathbf{n}^\top \boldsymbol{\tau} \mathbf{n}) + \partial_t \partial_n^i(\mathbf{n}^\top \boldsymbol{\tau} \mathbf{t})) \mathbf{n} + (\partial_n^{i+1}(\mathbf{t}^\top \boldsymbol{\tau} \mathbf{n}) + \partial_t \partial_n^i(\mathbf{t}^\top \boldsymbol{\tau} \mathbf{t})) \mathbf{t}. \end{aligned}$$

然后根据自由度 (5.5a)–(5.5e) 得到  $\boldsymbol{\tau} \in \text{Air } \mathbb{B}_{k+2}(\mathbf{r}_1 + 2)$ . 最后利用自由度 (5.5g) 为 0 可得  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$ .  $\square$

接下来, 定义全局有限元空间, 并证明它就是  $\mathbb{V}_k^{\text{div}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbb{S})$ .

**引理 5.2** 我们有

$$\mathbb{V}_k^{\text{div}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbb{S}) = \mathbb{V} := \{\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{L}^2(\Omega; \mathbb{S}) : \boldsymbol{\tau}|_T \in \mathbb{P}_k(T; \mathbb{S}), \forall T \in \mathcal{T}_h, \text{自由度 (5.5a)–(5.5e) 都是单值的}\}.$$

**证明** 显然  $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{V}_k^{\text{div}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbb{S})$ . 通过比较自由度和直接计算, 可以证明

$$\dim \mathbb{V}_k^{\text{div}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbb{S}) = \dim \mathbb{V},$$

从而得到所要的结果. □

### 5.3 有限元 div div 复形

首先考虑张量有限元空间是连续的情形. 设  $\mathbf{r}_1 \geq 0$  且  $\mathbf{r}_2 \geq \max\{\mathbf{r}_1 - 2, -1\}$ . 引入空间  $\mathbb{V}_k^{\text{div div}^+}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbb{M}) \subseteq \mathbb{V}_k^{\text{div}}(\mathbf{r}_1) \times \mathbb{V}_k^{\text{div}}(\mathbf{r}_1)$ , 其对  $\text{div div } \boldsymbol{\tau}$  有约束. 形函数空间取为  $\mathbb{P}_k(T; \mathbb{M})$ ,  $k \geq \max\{2r_1^v + 2, 2r_2^v + 3\}$ , 自由度为

$$\nabla^i \boldsymbol{\tau}(\mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \in \Delta_0(T), \quad i = 0, \dots, r_1^v, \tag{5.6a}$$

$$\nabla^j \text{div div } \boldsymbol{\tau}(\mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \in \Delta_0(T), \quad j = \max\{r_1^v - 1, 0\}, \dots, r_2^v, \tag{5.6b}$$

$$\int_e \boldsymbol{\tau} \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} ds, \quad \mathbf{q} \in \mathbb{P}_{k-2}^2(r_1^v+1)(e), \quad e \in \Delta_1(T), \tag{5.6c}$$

$$\int_e \partial_n^i(\boldsymbol{\tau} \mathbf{t}) \cdot \mathbf{q} ds, \quad \mathbf{q} \in \mathbb{P}_{k-2}^2(r_1^v+1+i)(e), \quad e \in \Delta_1(T), \quad i = 0, \dots, r_1^e, \tag{5.6d}$$

$$\int_e \mathbf{n}^\top \text{div } \boldsymbol{\tau} \mathbf{q} ds, \quad \mathbf{q} \in \mathbb{P}_{k-1-2r_1^v}(e), \quad e \in \Delta_1(T), \tag{5.6e}$$

$$\int_e \partial_n^i(\mathbf{t}^\top \text{div } \boldsymbol{\tau}) \mathbf{q} ds, \quad \mathbf{q} \in \mathbb{P}_{k-1-2r_1^v+i}(e), \quad e \in \Delta_1(T), \quad i = 0, \dots, r_1^e - 1, \tag{5.6f}$$

$$\int_e \partial_n^i(\text{div div } \boldsymbol{\tau}) \mathbf{q} ds, \quad \mathbf{q} \in \mathbb{P}_{k-2-2(r_2^v+1)+i}(e), \quad e \in \Delta_1(T), \quad i = 0, \dots, r_2^e, \tag{5.6g}$$

$$\int_T \text{div } \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{q} dx, \quad \mathbf{q} \in \text{curl } \mathbb{B}_k(\mathbf{r}_1), \tag{5.6h}$$

$$\int_T \text{div div } \boldsymbol{\tau} \mathbf{q} dx, \quad \mathbf{q} \in \mathbb{B}_{k-2}(\mathbf{r}_2)/\mathbb{P}_1(T), \tag{5.6i}$$

$$\int_T \boldsymbol{\tau} : \mathbf{q} dx, \quad \mathbf{q} \in \text{curl } \mathbb{B}_{k+1}(\mathbf{r}_1 + 1; \mathbb{R}^2). \tag{5.6j}$$

**引理 5.3** 设  $\mathbf{r}_1 \geq 0$  且  $\mathbf{r}_2 \geq \max\{\mathbf{r}_1 - 2, -1\}$ . 假设  $k \geq \max\{2r_1^v + 2, 2r_2^v + 3, 3r_2^e + 6, 6[r_2^e = -1, r_2^v = 1], 4[r_2^e = -1, r_2^v = 0]\}$ . 自由度 (5.6a)–(5.6j) 对于  $\mathbb{P}_k(T; \mathbb{M})$  是唯一可解的.

**证明** 自由度 (5.6b)、(5.6g) 和 (5.6i) 的数量是

$$\dim \mathbb{P}_{k-2}(T) - 3 - 3 \binom{r_1^v}{2} = 3 \sum_{i=1}^{r_1^e-1} (k - 2r_1^v + i) + \dim \mathbb{B}_{k-2}(\max\{\mathbf{r}_1 - 2, -1\}) - 3.$$

并且  $\mathbb{V}_k^{\text{div}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1 - 1)$  自由度 (4.8a)–(4.8g) 的数量减去自由度 (5.6a)、(5.6c)–(5.6f)、(5.6h) 和 (5.6j) 的数量是

$$3 \sum_{i=1}^{r_1^e-1} (k - 2r_1^v + i) + 2 \dim \mathbb{B}_{k-1}(\mathbf{r}_1 - 1) - \dim \mathbb{B}_k(\mathbf{r}_1) - 2$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \dim \mathbb{P}_{k-1}(T) - \dim \mathbb{P}_k(T) - 6 \binom{r_1^v + 1}{2} + 3 \binom{r_1^v + 2}{2} - 6 \sum_{i=0}^{r_1^e - 1} (k - 2r_1^v + i) \\
 &\quad + 3 \sum_{i=0}^{r_1^e} (k - 2r_1^v - 1 + i) + 3 \sum_{i=1}^{r_1^e - 1} (k - 2r_1^v + i) - 2 \\
 &= 2 \dim \mathbb{P}_{k-1}(T) - \dim \mathbb{P}_k(T) - 3 \binom{r_1^v}{2} - 2.
 \end{aligned}$$

由 (2.7) 得出上式等于  $\dim \mathbb{P}_{k-2}(T) - 3 - 3 \binom{r_1^v}{2}$ . 因此, 自由度 (5.6a)–(5.6j) 的数量等于  $\dim \mathbb{P}_k(T; \mathbb{M})$ .

取  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{P}_k(T; \mathbb{M})$ , 假设所有自由度 (5.6a)–(5.6j) 为 0. 设  $\boldsymbol{v} = \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{P}_{k-1}(T; \mathbb{R}^2)$ . 应用分部积分, 由 (5.6c) 和 (5.6e) 可得

$$(\operatorname{div} \boldsymbol{v}, q)_T = (\operatorname{div} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}, q)_T = 0, \quad q \in \mathbb{P}_1(T).$$

应用引理 4.2, 即空间  $\mathbb{V}_{k-1}^{\operatorname{div}}(\boldsymbol{r}_1 - 1, \boldsymbol{r}_2)$  的唯一可解性, 由 (5.6a)、(5.6b) 和 (5.6e)–(5.6i) 可知  $\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ . 然后可知  $\boldsymbol{\tau} = \operatorname{curl} \boldsymbol{w}$ , 其中  $\boldsymbol{w} \in \mathbb{P}_{k+1}(T; \mathbb{R}^2)$ . 借助定理 3.1, 由 (5.6a)、(5.6c)、(5.6d) 和 (5.6j) 得出  $\boldsymbol{w} = \mathbf{0}$  和  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$ .  $\square$

定义全局  $H(\operatorname{div} \operatorname{div})$ - 协调有限元空间

$$\mathbb{V}_k^{\operatorname{div} \operatorname{div}^+}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2; \mathbb{M}) = \{\boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega; \mathbb{M}) : \boldsymbol{\tau}|_T \in \mathbb{P}_k(T; \mathbb{M}), \forall T \in \mathcal{T}_h, \text{自由度 (5.6a)–(5.6g) 是单值的}\},$$

其中  $\operatorname{div} \operatorname{div}^+$  中的上标  $+$  表示光滑性超过  $H(\operatorname{div} \operatorname{div})$ - 协调. 实际上有关系

$$\mathbb{V}_k^{\operatorname{div} \operatorname{div}^+}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2; \mathbb{M}) \subset \boldsymbol{H}(\operatorname{div}, \Omega; \mathbb{M}) \cap \boldsymbol{H}(\operatorname{div} \operatorname{div}, \Omega; \mathbb{M}).$$

**引理 5.4** 设  $\boldsymbol{r}_1 \geq 0$  和  $\boldsymbol{r}_2 \geq \max\{\boldsymbol{r}_1 - 2, -1\}$ . 假设  $k \geq \max\{2r_1^v + 2, 2r_2^v + 3, 3r_2^e + 6, 6[r_2^e = -1, r_2^v = 1], 4[r_2^e = -1, r_2^v = 0]\}$ . 则有限元复形

$$\mathbb{R}^2 \xhookrightarrow{\subset} \mathbb{V}_{k+1}^{\operatorname{curl}}(\boldsymbol{r}_1 + 1; \mathbb{R}^2) \xrightarrow{\operatorname{curl}} \mathbb{V}_k^{\operatorname{div} \operatorname{div}^+}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2; \mathbb{M}) \xrightarrow{\operatorname{div}} \mathbb{V}_{k-1}^{\operatorname{div}}(\boldsymbol{r}_1 - 1, \boldsymbol{r}_2) \rightarrow \mathbf{0} \quad (5.7)$$

是正合的.

**证明** 可直接验证 (5.7) 是一个复形. 下面证明其正合性. 为此, 引入正合复形

$$\mathbb{R}^2 \xhookrightarrow{\subset} \mathbb{V}_{k+1}^{\operatorname{curl}}(\boldsymbol{r}_1 + 1; \mathbb{R}^2) \xrightarrow{\operatorname{curl}} \mathbb{V}_k^{\operatorname{div}}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_1 - 1; \mathbb{M}) \xrightarrow{\operatorname{div}} \mathbb{V}_{k-1}^{L^2}(\boldsymbol{r}_1 - 1; \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbf{0} \quad (5.8)$$

来作对比.

比较自由度 (5.6) 和自由度 (4.8) 可知  $\mathbb{V}_k^{\operatorname{div} \operatorname{div}^+}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2; \mathbb{M}) \cap \ker(\operatorname{div}) = \mathbb{V}_k^{\operatorname{div}}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_1 - 1; \mathbb{M}) \cap \ker(\operatorname{div})$ . 结合复形 (5.8) 的正合性即可得  $\mathbb{V}_k^{\operatorname{div} \operatorname{div}^+}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2; \mathbb{M}) \cap \ker(\operatorname{div}) = \operatorname{curl} \mathbb{V}_{k+1}^{\operatorname{curl}}(\boldsymbol{r}_1 + 1; \mathbb{R}^2)$ .

接着通过计算维数来证明  $\operatorname{div} \mathbb{V}_k^{\operatorname{div} \operatorname{div}^+}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2; \mathbb{M}) = \mathbb{V}_{k-1}^{\operatorname{div}}(\boldsymbol{r}_1 - 1, \boldsymbol{r}_2)$ . 注意到  $\dim \mathbb{V}_k^{\operatorname{div} \operatorname{div}^+}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2; \mathbb{M}) - \dim \mathbb{V}_{k-1}^{\operatorname{div}}(\boldsymbol{r}_1 - 1, \boldsymbol{r}_2)$  与  $\boldsymbol{r}_2$  无关, 不妨设  $\boldsymbol{r}_2 = \max\{\boldsymbol{r}_1 - 2, -1\}$ . 此时, 自由度 (5.6b) 消失. 再次比较自由度 (5.6) 和 (4.8), 有

$$\dim \mathbb{V}_k^{\operatorname{div} \operatorname{div}^+}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2; \mathbb{M}) - \dim \mathbb{V}_{k-1}^{\operatorname{div}}(\boldsymbol{r}_1 - 1, \boldsymbol{r}_2) = \dim \mathbb{V}_k^{\operatorname{div}}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_1 - 1; \mathbb{M}) - \dim \mathbb{V}_{k-1}^{L^2}(\boldsymbol{r}_1 - 1; \mathbb{R}^2).$$

最后, 利用复形 (5.8) 的正合性和引理 2.1 可以得到复形 (5.7) 的正合性.  $\square$

**定理 5.3** 设  $r_1 \geq 0$  和  $r_2 \geq \max\{r_1 - 2, -1\}$ . 假设  $k \geq \max\{2r_1^v + 2, 2r_2^v + 3, 3r_2^e + 6, 6[r_2^e = -1, r_2^v = 1], 4[r_2^e = -1, r_2^v = 0]\}$ . 则有图 13, 并从中推导出有限元  $\text{div div}$  复形

$$\mathbf{RT} \xrightarrow{\subset} \mathbb{V}_{k+1}^{\text{curl}}(\mathbf{r}_1 + 1; \mathbb{R}^2) \xrightarrow{\text{sym curl}} \mathbb{V}_k^{\text{div div}^+}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbb{S}) \xrightarrow{\text{div div}} \mathbb{V}_{k-2}^{L^2}(\mathbf{r}_2) \rightarrow 0, \quad (5.9)$$

其中  $\mathbb{V}_k^{\text{div div}^+}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbb{S}) := \mathbb{V}_k^{\text{div div}^+}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbb{M}) / \text{mskw } \mathbb{V}_k^{\text{curl}}(\mathbf{r}_1)$ .

**证明** 根据反交换性质  $\text{div}(\text{mskw } v) = -\text{curl } v$ , 可以从文献 [7] 中的 BGG 框架得出复形 (5.9). 接下来给出一个不使用 BGG 框架的直接证明. 显然 (5.9) 是一个复形. 下面证明其正合性.

对于  $\mathbb{V}_{k-2}^{L^2}(\mathbf{r}_2)$  中的  $p$ , 基于图 13 底部复形的正合性, 可知存在  $\mathbf{u} \in \mathbb{V}_{k-1}^{\text{div}}(\mathbf{r}_1 - 1, \mathbf{r}_2)$  满足  $p = \text{div } \mathbf{u}$ . 然后利用图 13 顶部复形的正合性找到  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{V}_k^{\text{div div}^+}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbb{M})$ , 使得  $\mathbf{u} = \text{div } \boldsymbol{\tau}$ . 令  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} + \text{mskw } w \in \mathbb{V}_k^{\text{div div}^+}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbb{M})$ , 其中  $w = -\text{sskw } \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{V}_k^{\text{curl}}(\mathbf{r}_1)$ . 因为  $\text{div div mskw } w = -\text{div curl } w = 0$ , 所以  $\text{div div } \boldsymbol{\sigma} = \text{div div } \boldsymbol{\tau} = p$ , 且  $\text{sskw } \boldsymbol{\sigma} = \text{sskw } \boldsymbol{\tau} + w = 0$ , 即  $\boldsymbol{\sigma}$  属于  $\mathbb{V}_k^{\text{div div}^+}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbb{S})$ . 这样就证明了  $\text{div div } \mathbb{V}_k^{\text{div div}^+}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbb{S}) = \mathbb{V}_{k-2}^{L^2}(\mathbf{r}_2)$ .

通过图 13 中的两个复形, 有

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{V}_k^{\text{div div}^+}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbb{M}) &= \dim \mathbb{V}_{k+1}^{\text{curl}}(\mathbf{r}_1 + 1; \mathbb{R}^2) + \dim \mathbb{V}_{k-1}^{\text{div}}(\mathbf{r}_1 - 1, \mathbf{r}_2) - 2, \\ \dim \mathbb{V}_{k-1}^{\text{div}}(\mathbf{r}_1 - 1, \mathbf{r}_2) &= \dim \mathbb{V}_k^{\text{curl}}(\mathbf{r}_1) + \dim \mathbb{V}_{k-2}^{L^2}(\mathbf{r}_2) - 1. \end{aligned}$$

结合上述两个等式得到

$$\dim \mathbb{V}_k^{\text{div div}^+}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbb{M}) = \dim \mathbb{V}_{k+1}^{\text{curl}}(\mathbf{r}_1 + 1; \mathbb{R}^2) + \dim \mathbb{V}_k^{\text{curl}}(\mathbf{r}_1) + \dim \mathbb{V}_{k-2}^{L^2}(\mathbf{r}_2) - 3.$$

因此

$$\dim \mathbb{V}_k^{\text{div div}^+}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbb{S}) = \dim \mathbb{V}_{k+1}^{\text{curl}}(\mathbf{r}_1 + 1; \mathbb{R}^2) + \dim \mathbb{V}_{k-2}^{L^2}(\mathbf{r}_2) - 3.$$

从而由引理 2.1 推导出 (5.9) 复形的正合性. □

接下来给出  $\mathbb{V}_k^{\text{div div}^+}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbb{S})$  的有限元描述. 选择  $\mathbb{P}_k(T; \mathbb{S})$  作为形函数空间. 通过对自由度 (5.6a)–(5.6j) 进行对称化得到以下单元自由度:

$$\nabla^i \boldsymbol{\tau}(\mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \in \Delta_0(T), \quad i = 0, \dots, r_1^v, \quad (5.10a)$$

$$\nabla^j \text{div div } \boldsymbol{\tau}(\mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \in \Delta_0(T), \quad j = \max\{r_1^v - 1, 0\}, \dots, r_2^v, \quad (5.10b)$$

$$\int_e \boldsymbol{\tau} \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} ds, \quad \mathbf{q} \in \mathbb{P}_{k-2(r_1^v+1)}^2(e), \quad e \in \Delta_1(T), \quad (5.10c)$$

$$\int_e \partial_n^i (\mathbf{t}^\top \boldsymbol{\tau} \mathbf{t}) q ds, \quad q \in \mathbb{P}_{k-2(r_1^v+1)+i}(e), \quad e \in \Delta_1(T), \quad i = 0, \dots, r_1^e, \quad (5.10d)$$

$$\int_e \mathbf{n}^\top \text{div } \boldsymbol{\tau} q ds, \quad q \in \mathbb{P}_{k-1-2r_1^v}(e), \quad e \in \Delta_1(T), \quad (5.10e)$$

$$\int_e \partial_n^i (\mathbf{t}^\top \text{div } \boldsymbol{\tau}) q ds, \quad q \in \mathbb{P}_{k-1-2r_1^v+i}(e), \quad e \in \Delta_1(T), \quad i = 0, \dots, r_1^e - 1, \quad (5.10f)$$

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\subset} & \mathbb{V}_{k+1}^{\text{curl}}(\mathbf{r}_1 + 1; \mathbb{R}^2) & \xrightarrow{\text{curl}} & \mathbb{V}_k^{\text{div div}^+}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbb{M}) & \xrightarrow{\text{div}} & \mathbb{V}_{k-1}^{\text{div}}(\mathbf{r}_1 - 1, \mathbf{r}_2) \rightarrow \mathbf{0} \\ & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\subset} & \mathbb{V}_k^{\text{curl}}(\mathbf{r}_1) & \xrightarrow{\text{curl}} & \mathbb{V}_{k-1}^{\text{div}}(\mathbf{r}_1 - 1, \mathbf{r}_2) & \xrightarrow{\text{div}} & \mathbb{V}_{k-2}^{L^2}(\mathbf{r}_2) \rightarrow \mathbf{0} \end{array}$$

(Diagram labels:  $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\subset} \mathbb{V}_{k+1}^{\text{curl}}(\mathbf{r}_1 + 1; \mathbb{R}^2)$ ,  $\mathbb{R} \xrightarrow{\subset} \mathbb{V}_k^{\text{curl}}(\mathbf{r}_1)$ ,  $\mathbb{V}_{k+1}^{\text{curl}}(\mathbf{r}_1 + 1; \mathbb{R}^2) \xrightarrow{\text{curl}} \mathbb{V}_k^{\text{div div}^+}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbb{M})$ ,  $\mathbb{V}_k^{\text{curl}}(\mathbf{r}_1) \xrightarrow{\text{curl}} \mathbb{V}_{k-1}^{\text{div}}(\mathbf{r}_1 - 1, \mathbf{r}_2)$ ,  $\mathbb{V}_{k+1}^{\text{curl}}(\mathbf{r}_1 + 1; \mathbb{R}^2) \xrightarrow{\text{mskw}} \mathbb{V}_k^{\text{div div}^+}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbb{M})$ ,  $\mathbb{V}_{k-1}^{\text{div}}(\mathbf{r}_1 - 1, \mathbf{r}_2) \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{V}_k^{\text{div div}^+}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbb{M})$ ,  $\mathbb{V}_k^{\text{div div}^+}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbb{M}) \xrightarrow{\text{div}} \mathbb{V}_{k-1}^{\text{div}}(\mathbf{r}_1 - 1, \mathbf{r}_2)$ ,  $\mathbb{V}_{k-1}^{\text{div}}(\mathbf{r}_1 - 1, \mathbf{r}_2) \xrightarrow{\text{div}} \mathbb{V}_{k-2}^{L^2}(\mathbf{r}_2)$ )

图 13  $\text{div div}$  复形的有限元 BGG 图

$$\int_e \partial_n^i (\operatorname{div} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}) q ds, \quad \boldsymbol{q} \in \mathbb{P}_{k-2(r_2^v+2)+i}(e), \quad e \in \Delta_1(T), \quad i = 0, \dots, r_2^e, \quad (5.10g)$$

$$\int_T \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{q} dx, \quad \boldsymbol{q} \in \operatorname{curl} \mathbb{B}_k(\boldsymbol{r}_1) / \boldsymbol{x}^\perp, \quad (5.10h)$$

$$\int_T \operatorname{div} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} q dx, \quad \boldsymbol{q} \in \mathbb{B}_{k-2}(\boldsymbol{r}_2) / \mathbb{P}_1(T), \quad (5.10i)$$

$$\int_T \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{q} dx, \quad \boldsymbol{q} \in \operatorname{Air} \mathbb{B}_{k+2}(\boldsymbol{r}_1 + 2). \quad (5.10j)$$

使用与引理 5.3 的证明相似的证明, 可以证明其唯一可解性.

**引理 5.5** 设  $\boldsymbol{r}_1 \geq 0$  且  $\boldsymbol{r}_2 \geq \max\{\boldsymbol{r}_1 - 2, -1\}$ . 假设  $k \geq \max\{2r_1^v + 2, 2r_2^v + 3, 3r_2^e + 6, 6[r_2^e = -1, r_2^v = 1], 4[r_2^e = -1, r_2^v = 0]\}$ . 则自由度 (5.10a)–(5.10j) 对于  $\mathbb{P}_k(T; \mathbb{S})$  是唯一可解的.

**引理 5.6** 设  $\boldsymbol{r}_1 \geq 0$  且  $\boldsymbol{r}_2 \geq \max\{\boldsymbol{r}_1 - 2, -1\}$ . 假设  $k \geq \max\{2r_1^v + 2, 2r_2^v + 3, 3r_2^e + 6, 6[r_2^e = -1, r_2^v = 1], 4[r_2^e = -1, r_2^v = 0]\}$ . 则成立

$$\mathbb{V}_k^{\operatorname{div} \operatorname{div}^+}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2; \mathbb{S}) = \mathbb{V} := \{\boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega; \mathbb{S}) : \boldsymbol{\tau}|_T \in \mathbb{P}_k(T; \mathbb{S}) \forall T \in \mathcal{T}_h, \text{ 自由度 (5.10a)–(5.10g) 是单值的}\},$$

且有  $\mathbb{V}_k^{\operatorname{div} \operatorname{div}^+}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2; \mathbb{S}) \subset \boldsymbol{H}(\operatorname{div}, \Omega; \mathbb{S}) \cap \boldsymbol{H}(\operatorname{div} \operatorname{div}, \Omega; \mathbb{S})$ .

**证明** 显然  $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{V}_k^{\operatorname{div} \operatorname{div}^+}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2; \mathbb{S})$ . 通过直接计算维数和 Euler 公式可得  $\dim \mathbb{V}_k^{\operatorname{div} \operatorname{div}^+}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2; \mathbb{S}) = \dim \mathbb{V}$ . □

**例 5.1** 选择  $\boldsymbol{r}_1 = (1, 0)$ ,  $\boldsymbol{r}_2 = (0, 0)$ ,  $k \geq 6$ , 得到文献 [16] 中构建的有限元  $\operatorname{div} \operatorname{div}$  复形为

$$\mathbf{RT} \xrightarrow{\subset} \operatorname{Argy}_{k+1} \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbb{R}^2 \right) \xrightarrow{\operatorname{sym} \operatorname{curl}} \mathbb{V}_k^{\operatorname{div} \operatorname{div}^+} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbb{S} \right) \xrightarrow{\operatorname{div} \operatorname{div}} \operatorname{Lagrange}_{k-2} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \rightarrow 0.$$

文献 [14, 33] 中提出的有限元  $\operatorname{div} \operatorname{div}$  复形对应  $\boldsymbol{r}_1 = (0, -1)$  和  $\boldsymbol{r}_2 = (-1, -1)$  的情形, 并不包含在复形 (5.9) 中, 因为不满足条件  $\boldsymbol{r}_1 \geq 0$ . 这会导致光滑性不匹配. 在图 13 中, 当

$$\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{V}_k^{\operatorname{div}} \left( \begin{pmatrix} r_1^v \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{r}_2; \mathbb{M} \right)$$

时,  $w = -\operatorname{sskw}(\boldsymbol{\tau})$  是不连续的. 尽管  $\operatorname{mskw}$  算子仍然是单射, 但不清楚有限元空间

$$\mathbb{V}_k^{\operatorname{div} \operatorname{div}^+} \left( \begin{pmatrix} r_1^v \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{r}_2; \mathbb{M} \right) / \operatorname{mskw} \mathbb{V}_k^{\operatorname{curl}} \left( \begin{pmatrix} r_1^v \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

是否由法向连续的对称矩阵函数组成. 在连续层面, 文献 [33] 中所用到的是

$$\mathbf{RT} \xrightarrow{\subset} \boldsymbol{H}^{1,1}(\operatorname{div}, \Omega) \xrightarrow{\operatorname{sym} \operatorname{curl}} \boldsymbol{H}(\operatorname{div} \operatorname{div}, \Omega; \mathbb{S}) \cap \boldsymbol{H}(\operatorname{div}, \Omega; \mathbb{S}) \xrightarrow{\operatorname{div} \operatorname{div}} L^2(\Omega) \rightarrow 0. \quad (5.11)$$

现在考虑利用 BGG 框架对  $\operatorname{div} \operatorname{div}$  复形 (5.11) 进行有限元离散. 对于  $\boldsymbol{r}_1 = (r_1^v, -1)$  且  $r_1^v \geq 0$ ,  $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}_1 + 1$  和  $\boldsymbol{r}_2 \geq \max\{\boldsymbol{r}_1 - 2, -1\}$  的情形, 对图 13 进行细化得到图 14. 这里的空间  $\hat{\mathbb{V}}_k^{\operatorname{div} \operatorname{div}^+}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2; \mathbb{M})$  是由  $\mathbb{V}_k^{\operatorname{div} \operatorname{div}^+}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2; \mathbb{M})$  中满足

$$\operatorname{sskw} \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{V}_k^{\operatorname{curl}} \left( \begin{pmatrix} r_1^v \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

的  $\tau$  构成的子空间. 由图 14 得到了有限元  $\text{div div}$  复形 (5.13), 其有限元空间

$$\mathbb{V}_k^{\text{div div}^+}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbb{S}) = \hat{\mathbb{V}}_k^{\text{div div}^+}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbb{M}) / \text{mskw } \mathbb{V}_k^{\text{curl}} \left( \begin{pmatrix} r_1^v \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

下面直接证明得到的有限元  $\text{div div}$  复形的正合性, 而不使用 BGG 框架. 空间  $\mathbb{V}_k^{\text{div div}^+}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbb{S})$  由自由度

$$\nabla^i \tau(\mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \in \Delta_0(T), \quad i = 0, \dots, r_1^v, \tag{5.12a}$$

$$\nabla^j \text{div div } \tau(\mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \in \Delta_0(T), \quad j = \max\{r_1^v - 1, 0\}, \dots, r_2^v, \tag{5.12b}$$

$$\int_e \tau \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} ds, \quad \mathbf{q} \in \mathbb{P}_{k-2(r_1^v+1)}^2(e), \quad e \in \Delta_1(T), \tag{5.12c}$$

$$\int_e \mathbf{n}^\top \text{div } \tau \mathbf{q} ds, \quad \mathbf{q} \in \mathbb{P}_{k-1-2r_1^v}(e), \quad e \in \Delta_1(T), \tag{5.12d}$$

$$\int_e \partial_n^i (\text{div div } \tau) \mathbf{q} ds, \quad \mathbf{q} \in \mathbb{P}_{k-2(r_2^v+2)+i}(e), \quad e \in \Delta_1(T), \quad i = 0, \dots, r_2^e, \tag{5.12e}$$

$$\int_T \text{div } \tau \cdot \mathbf{q} dx, \quad \mathbf{q} \in \text{curl } \mathbb{B}_k \left( \begin{pmatrix} r_1^v \\ 0 \end{pmatrix} \right) / \mathbf{x}^\perp, \tag{5.12f}$$

$$\int_T \text{div div } \tau \mathbf{q} dx, \quad \mathbf{q} \in \mathbb{B}_{k-2}(\mathbf{r}_2) / \mathbb{P}_1(T), \tag{5.12g}$$

$$\int_T \tau : \mathbf{q} dx, \quad \mathbf{q} \in \text{Air } \mathbb{B}_{k+2}(\mathbf{r}_1 + 2) \tag{5.12h}$$

确定. 使用与引理 5.3 中相似的证明, 可以证明自由度 (5.12) 对于  $\mathbb{P}_k(T; \mathbb{S})$  是唯一可解的.

**定理 5.4** 假设  $\mathbf{r}_1 = (r_1^v, -1)$ , 其中  $r_1^v \geq 0$ , 且  $\mathbf{r}_2 \geq \max\{\mathbf{r}_1 - 2, -1\}$ . 设  $k \geq \max\{2r_1^v + 2, 2r_2^v + 3, 3r_2^e + 6, 6[r_2^e = -1, r_2^v = 1], 4[r_2^e = -1, r_2^v = 0]\}$ . 则以下的有限元  $\text{div div}$  复形是正合的:

$$\mathbf{RT} \hookrightarrow \mathbb{V}_{k+1}^{\text{div}} \left( \begin{pmatrix} r_1^v + 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_1^v \\ 0 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{\text{sym curl}} \mathbb{V}_k^{\text{div div}^+} \left( \begin{pmatrix} r_1^v \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{r}_2; \mathbb{S} \right) \xrightarrow{\text{div div}} \mathbb{V}_{k-2}^{L^2}(\mathbf{r}_2) \rightarrow 0. \tag{5.13}$$

**证明** 容易验证 (5.13) 构成一个复形. 接下来证明复形 (5.13) 的正合性.

根据  $\text{div div}$  复形 (5.9), 有

$$\text{div div } \mathbb{V}_k^{\text{div div}^+} \left( \begin{pmatrix} r_1^v \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{r}_2; \mathbb{S} \right) = \mathbb{V}_{k-2}^{L^2}(\mathbf{r}_2).$$

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^2 & \hookrightarrow & \mathbb{V}_{k+1}^{\text{div}} \left( \mathbf{r}_0, \begin{pmatrix} r_1^v \\ 0 \end{pmatrix} \right) & \xrightarrow{\text{curl}} & \hat{\mathbb{V}}_k^{\text{div div}^+}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbb{M}) & \xrightarrow{\text{div}} & \mathbb{V}_{k-1}^{\text{div}} \left( \begin{pmatrix} r_1^v - 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{r}_2 \right) \rightarrow 0 \\ & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \\ \mathbb{R} & \hookrightarrow & \mathbb{V}_k^{\text{curl}} \left( \begin{pmatrix} r_1^v \\ 0 \end{pmatrix} \right) & \xrightarrow{\text{curl}} & \mathbb{V}_{k-1}^{\text{div}} \left( \begin{pmatrix} r_1^v - 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{r}_2 \right) & \xrightarrow{\text{div}} & \mathbb{V}_{k-2}^{L^2}(\mathbf{r}_2) \longrightarrow 0 \end{array}$$

图 14 当  $\mathbf{r}_1 = (r_1^v, -1)$  且  $r_1^v \geq 0$  时有限元  $\text{div div}$  复形的 BGG 图

注意到

$$\operatorname{div} \operatorname{div} \mathbb{V}_k^{\operatorname{div} \operatorname{div}^+} \left( \begin{pmatrix} r_1^v \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{r}_2; \mathbb{S} \right) \subseteq \operatorname{div} \operatorname{div} \mathbb{V}_k^{\operatorname{div} \operatorname{div}^+} \left( \begin{pmatrix} r_1^v \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{r}_2; \mathbb{S} \right) \subseteq \mathbb{V}_{k-2}^{L^2}(\mathbf{r}_2),$$

因此

$$\operatorname{div} \operatorname{div} \mathbb{V}_k^{\operatorname{div} \operatorname{div}^+} \left( \begin{pmatrix} r_1^v \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{r}_2; \mathbb{S} \right) = \mathbb{V}_{k-2}^{L^2}(\mathbf{r}_2).$$

此外,

$$\begin{aligned} & \dim \mathbb{V}_k^{\operatorname{div} \operatorname{div}^+} \left( \begin{pmatrix} r_1^v \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{r}_2; \mathbb{S} \right) - \dim \mathbb{V}_{k-2}^{L^2}(\mathbf{r}_2) \\ &= 3 \binom{r_1^v + 2}{2} |\Delta_0(\mathcal{T}_h)| - \binom{r_1^v}{2} |\Delta_0(\mathcal{T}_h)| + (3k - 6r_1^v - 2) |\Delta_1(\mathcal{T}_h)| \\ & \quad + |\Delta_2(\mathcal{T}_h)| \dim \mathbb{B}_k \left( \begin{pmatrix} r_1^v \\ 0 \end{pmatrix} \right) + |\Delta_2(\mathcal{T}_h)| \dim \mathbb{B}_{k+2} \left( \begin{pmatrix} r_1^v + 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) - 4 |\Delta_2(\mathcal{T}_h)| \\ &= 2 \binom{r_1^v + 3}{2} |\Delta_0(\mathcal{T}_h)| + (3k - 6r_1^v - 5) |\Delta_1(\mathcal{T}_h)| \\ & \quad + |\Delta_2(\mathcal{T}_h)| \dim \mathbb{B}_k \left( \begin{pmatrix} r_1^v \\ 0 \end{pmatrix} \right) + |\Delta_2(\mathcal{T}_h)| \dim \mathbb{B}_{k+2} \left( \begin{pmatrix} r_1^v + 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) - |\Delta_2(\mathcal{T}_h)| \\ & \quad - 3(|\Delta_0(\mathcal{T}_h)| - |\Delta_1(\mathcal{T}_h)| + |\Delta_2(\mathcal{T}_h)|). \end{aligned}$$

借助

$$\mathbb{V}_{k+1}^{\operatorname{div}} \left( \begin{pmatrix} r_1^v + 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_1^v \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

的自由度 (4.8a)–(4.8g) 和 Euler 公式, 可得

$$\dim \mathbb{V}_k^{\operatorname{div} \operatorname{div}^+} \left( \begin{pmatrix} r_1^v \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{r}_2; \mathbb{S} \right) - \dim \mathbb{V}_{k-2}^{L^2}(\mathbf{r}_2) = \dim \mathbb{V}_{k+1}^{\operatorname{div}} \left( \begin{pmatrix} r_1^v + 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_1^v \\ 0 \end{pmatrix} \right) - 3.$$

结合引理 2.1 得到了复形 (5.13) 的正合性. □

**例 5.2** 当  $r_1^v = 0$ ,  $\mathbf{r}_2 = -1$  和  $k \geq 3$  时, 得到了文献 [33] 中构建的有限元  $\operatorname{div} \operatorname{div}$  复形

$$\mathbf{RT} \hookrightarrow \mathbb{V}_{k+1}^{\operatorname{div}} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{\operatorname{sym} \operatorname{curl}} \operatorname{HMZ}_k \left( \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{\operatorname{div} \operatorname{div}} \operatorname{DG}_{k-2} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \rightarrow 0.$$

另一种改动是将光滑性从  $\mathbf{H}(\operatorname{div} \operatorname{div}, \Omega; \mathbb{S}) \cap \mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega; \mathbb{S})$  放宽到  $\mathbf{H}(\operatorname{div} \operatorname{div}, \Omega; \mathbb{S})$ . 用下面的自由度来替换 (5.12c)–(5.12d):

$$\int_e \mathbf{n}^\top \boldsymbol{\tau} \mathbf{n} q ds, \quad q \in \mathbb{P}_{k-2(r_1^v+1)}(e), \quad e \in \Delta_1(T), \tag{5.14a}$$

$$\int_e \mathbf{t}^\top \boldsymbol{\tau} \mathbf{n} q ds, \quad q \in \mathbb{P}_{k-2(r_1^v+1)}(e), \quad e \in \Delta_1(T), \quad (5.14b)$$

$$\int_e \text{tr}_2^{\text{div div}}(\boldsymbol{\tau}) q ds, \quad q \in \mathbb{P}_{k-1-2r_1^v}(e), \quad e \in \Delta_1(T), \quad (5.14c)$$

其中  $\text{tr}_2^{\text{div div}}(\boldsymbol{\tau}) = \partial_t(\mathbf{t}^\top \boldsymbol{\tau} \mathbf{n}) + \mathbf{n}^\top \text{div } \boldsymbol{\tau}$  是  $\text{div div}$  的一个迹算子 (参见文献 [14]).

定义

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_k^{\text{div div}} \left( \left( \begin{array}{c} r_1^v \\ -1 \end{array} \right), \mathbf{r}_2; \mathbb{S} \right) &= \mathbb{V} \\ &:= \{ \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{L}^2(\Omega; \mathbb{S}) : \boldsymbol{\tau}|_T \in \mathbb{P}_k(T; \mathbb{S}), \forall T \in \mathcal{T}_h, (5.12) \text{ 中 } (5.12c)-(5.12d) \\ &\quad \text{用 } (5.14) \text{ 替换后, 除了 } (5.14b) \text{ 都是单值的} \}. \end{aligned}$$

由于  $\mathbf{t}^\top \boldsymbol{\tau} \mathbf{n}$  是局部的, 所以向量  $\boldsymbol{\tau} \mathbf{n}$  在边界上不连续. 但  $\mathbf{n}^\top \boldsymbol{\tau} \mathbf{n}$  和  $\text{tr}_2^{\text{div div}}(\boldsymbol{\tau})$  是连续的. 所以有限元空间

$$\mathbb{V}_k^{\text{div div}} \left( \left( \begin{array}{c} r_1^v \\ -1 \end{array} \right), \mathbf{r}_2; \mathbb{S} \right) \subset \mathbf{H}(\text{div div}, \Omega; \mathbb{S})$$

但不包含于  $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega; \mathbb{S})$ . 它不能由图 14 直接推导出, 因为 BGG 诱导出来的空间应该包含于  $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega; \mathbb{S})$ .

**定理 5.5** 以下的有限元  $\text{div div}$  复形是正合的:

$$\mathbf{RT} \xrightarrow{\subset} \mathbb{V}_{k+1}^{\text{curl}} \left( \left( \begin{array}{c} r_1^v + 1 \\ 0 \end{array} \right); \mathbb{R}^2 \right) \xrightarrow{\text{sym curl}} \mathbb{V}_k^{\text{div div}} \left( \left( \begin{array}{c} r_1^v \\ -1 \end{array} \right), \mathbf{r}_2; \mathbb{S} \right) \xrightarrow{\text{div div}} \mathbb{V}_{k-2}^{L^2}(\mathbf{r}_2) \rightarrow 0. \quad (5.15)$$

**证明** 对于  $\boldsymbol{\tau} = \text{sym curl } \mathbf{v}$ , 有 (参见文献 [14, 引理 2.2])

$$\mathbf{n}^\top \boldsymbol{\tau} \mathbf{n} = \partial_t(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}), \quad \text{tr}_2^{\text{div div}}(\boldsymbol{\tau}) = \partial_{tt}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}).$$

因此, 显然 (5.15) 是一个复形. 接下来证明复形 (5.15) 的正合性.

注意到

$$\mathbb{V}_k^{\text{div div}^+} \left( \left( \begin{array}{c} r_1^v \\ -1 \end{array} \right), \mathbf{r}_2; \mathbb{S} \right) \subseteq \mathbb{V}_k^{\text{div div}} \left( \left( \begin{array}{c} r_1^v \\ -1 \end{array} \right), \mathbf{r}_2; \mathbb{S} \right),$$

由复形 (5.13) 的正合性可得

$$\text{div div } \mathbb{V}_k^{\text{div div}} \left( \left( \begin{array}{c} r_1^v \\ -1 \end{array} \right), \mathbf{r}_2; \mathbb{S} \right) = \mathbb{V}_{k-2}^{L^2}(\mathbf{r}_2).$$

此外,

$$\begin{aligned} &\dim \mathbb{V}_k^{\text{div div}} \left( \left( \begin{array}{c} r_1^v \\ -1 \end{array} \right), \mathbf{r}_2; \mathbb{S} \right) - \dim \mathbb{V}_{k-2}^{L^2}(\mathbf{r}_2) \\ &= 2 \binom{r_1^v + 3}{2} |\Delta_0(\mathcal{T}_h)| + 2(k - 2r_1^v - 2) |\Delta_1(\mathcal{T}_h)| \end{aligned}$$

$$+ |\Delta_2(\mathcal{T}_h)| \dim \mathbb{B}_k \left( \begin{pmatrix} r_1^v \\ -1 \end{pmatrix} \right) + |\Delta_2(\mathcal{T}_h)| \dim \mathbb{B}_{k+2} \left( \begin{pmatrix} r_1^v + 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) - |\Delta_2(\mathcal{T}_h)| \\ - 3(|\Delta_0(\mathcal{T}_h)| - |\Delta_1(\mathcal{T}_h)| + |\Delta_2(\mathcal{T}_h)|).$$

利用

$$\mathbb{V}_{k+1}^{\text{curl}} \left( \begin{pmatrix} r_1^v + 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbb{R}^2 \right)$$

的自由度 (3.9a)–(3.9c) 和 Euler 公式, 可得

$$\dim \mathbb{V}_k^{\text{div div}} \left( \begin{pmatrix} r_1^v \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{r}_2; \mathbb{S} \right) - \dim \mathbb{V}_{k-2}^{L^2}(\mathbf{r}_2) = \dim \mathbb{V}_{k+1}^{\text{curl}} \left( \begin{pmatrix} r_1^v + 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbb{R}^2 \right) - 3.$$

再根据引理 2.1 可得定理成立. □

**例 5.3** 当  $r_1^v = 0$ 、 $\mathbf{r}_2 = -1$  和  $k \geq 3$  时, 得到了文献 [14] 中构建的有限元 div div 复形

$$\mathbf{RT} \hookrightarrow \text{Herm}_{k+1} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbb{R}^2 \right) \xrightarrow{\text{sym curl}} \text{CH}_k \left( \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{\text{div div}} \text{DG}_{k-2} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \rightarrow 0.$$

文献 [12] 提出的第一个有限元 div div 复形是在分布意义下的 div div 复形

$$\mathbf{RT} \hookrightarrow \mathbf{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^2) \xrightarrow{\text{sym curl}} \mathbf{H}^{-1}(\text{div div}, \Omega; \mathbb{S}) \xrightarrow{\text{div div}} H^{-1}(\Omega) \rightarrow 0$$

的有限元离散, 并不在本文讨论范围内. 我们将在最新的工作 [19] 中给予详细讨论.

## 参考文献

- 1 Argyris J, Fried I, Scharpf D. The TUBA family of plate elements for the matrix displacement method. *Aero J Roy Aero Soc*, 1968, 72: 701–709
- 2 Arnold D N. *Finite Element Exterior Calculus*. Philadelphia: SIAM, 2018
- 3 Arnold D N, Falk R S, Winther R. Finite element exterior calculus, homological techniques, and applications. *Acta Numer*, 2006, 15: 1–155
- 4 Arnold D N, Falk R S, Winther R. Differential complexes and stability of finite element methods. II. The elasticity complex. In: *Compatible Spatial Discretizations, IMA Volumes in Mathematics and its Applications*, vol. 142. New York: Springer, 2006, 47–67
- 5 Arnold D N, Falk R S, Winther R. Geometric decompositions and local bases for spaces of finite element differential forms. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2009, 198: 1660–1672
- 6 Arnold D N, Falk R S, Winther R. Finite element exterior calculus: From Hodge theory to numerical stability. *Bull Amer Math Soc (NS)*, 2010, 47: 281–354
- 7 Arnold D N, Hu K. Complexes from complexes. *Found Comput Math*, 2021, 21: 1739–1774
- 8 Arnold D N, Winther R. Mixed finite elements for elasticity. *Numer Math*, 2002, 92: 401–419
- 9 Bernštein I N, Gelfand I M, Gelfand S I. Differential operators on the base affine space and a study of  $g$ -modules. In: *Lie Groups and Their Representations*. London: Hilger, 1975, 21–64
- 10 Bramble J H, Zlámal M. Triangular elements in the finite element method. *Math Comp*, 1970, 24: 809–820
- 11 Chen C, Chen L, Huang X, et al. Geometric decomposition and efficient implementation of high order face and edge elements. *arXiv:2309.13843*, 2023

- 12 Chen L, Hu J, Huang X. Multigrid methods for Hellan-Herrmann-Johnson mixed method of Kirchhoff plate bending problems. *J Sci Comput*, 2018, 76: 673–696
- 13 Chen L, Huang X. Decoupling of mixed methods based on generalized Helmholtz decompositions. *SIAM J Numer Anal*, 2018, 56: 2796–2825
- 14 Chen L, Huang X. Finite elements for divdiv-conforming symmetric tensors. arXiv:2005.01271, 2020
- 15 Chen L, Huang X. Finite elements for divdiv conforming symmetric tensors in three dimensions. *Math Comp*, 2022, 91: 1107–1142
- 16 Chen L, Huang X. A finite element elasticity complex in three dimensions. *Math Comp*, 2022, 91: 2095–2127
- 17 Chen L, Huang X. Complexes from complexes: Finite element complexes in three dimensions. arXiv:2211.08656, 2022
- 18 Chen L, Huang X. Finite element de Rham and Stokes complexes in three dimensions. *Math Comp*, 2024, 93: 55–110
- 19 Chen L, Huang X. A new div-div-conforming symmetric tensor finite element space with applications to the biharmonic equation. *Math Comp*, 2025, 94: 33–72
- 20 Chen L, Huang X, Zhang C. Distributional finite element curl div complexes and application to quad curl problems. arXiv:2311.09051, 2023
- 21 Chen M, Huang J, Huang X. A robust lower-order mixed finite element method for a strain gradient elastic model. *SIAM J Numer Anal*, 2023, 61: 2237–2260
- 22 Christiansen S H, Gopalakrishnan J, Guzmán J, et al. A discrete elasticity complex on three-dimensional Alfeld splits. *Numer Math*, 2024, 156: 159–204
- 23 Christiansen S H, Hu J, Hu K. Nodal finite element de Rham complexes. *Numer Math*, 2018, 139: 411–446
- 24 Christiansen S H, Hu K. Finite element systems for vector bundles: Elasticity and curvature. *Found Comput Math*, 2023, 23: 545–596
- 25 Eastwood M. A complex from linear elasticity. In: *The Proceedings of the 19th Winter School “Geometry and Physics”* (Srni, 1999). Palermo: Circolo Matematico di Palermo, 2000, 23–29
- 26 Falk R S, Neilan M. Stokes complexes and the construction of stable finite elements with pointwise mass conservation. *SIAM J Numer Anal*, 2013, 51: 1308–1326
- 27 Fan R, Liu Y, Zhang S. Mixed schemes for fourth-order DIV equations. *Comput Methods Appl Math*, 2019, 19: 341–357
- 28 Guzmán J, Neilan M. A family of nonconforming elements for the Brinkman problem. *IMA J Numer Anal*, 2012, 32: 1484–1508
- 29 Hu J, Liang Y. Conforming discrete Gradgrad-complexes in three dimensions. *Math Comp*, 2021, 90: 1637–1662
- 30 Hu J, Liang Y, Ma R. Conforming finite element divdiv complexes and the application for the linearized Einstein-Bianchi system. *SIAM J Numer Anal*, 2022, 60: 1307–1330
- 31 Hu J, Liang Y, Ma R, et al. New conforming finite element divdiv complexes in three dimensions. arXiv:2204.07895, 2022
- 32 Hu J, Lin T, Wu Q. A construction of  $C^r$  conforming finite element spaces in any dimension. *Found Comput Math*, 2024, in press
- 33 Hu J, Ma R, Zhang M. A family of mixed finite elements for the biharmonic equations on triangular and tetrahedral grids. *Sci China Math*, 2021, 64: 2793–2816
- 34 Hu K, Zhang Q, Zhang Z. Simple curl-curl-conforming finite elements in two dimensions. *SIAM J Sci Comput*, 2020, 42: A3859–A3877
- 35 Lai M J, Schumaker L L. *Spline Functions on Triangulations*. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2007
- 36 Liao Y, Ming P, Xu Y. Taylor-Hood like finite elements for nearly incompressible strain gradient elasticity problems. *J Sci Comput*, 2023, 95: 4
- 37 Mardal K A, Tai X C, Winther R. A robust finite element method for Darcy-Stokes flow. *SIAM J Numer Anal*, 2002, 40: 1605–1631
- 38 Morgan J, Scott R. A nodal basis for  $C^1$  piecewise polynomials of degree  $n \geq 5$ . *Math Comp*, 1975, 29: 736–740
- 39 Nicolaides R A. On a class of finite elements generated by Lagrange interpolation. *SIAM J Numer Anal*, 1972, 9: 435–445
- 40 Ženíšek A. Interpolation polynomials on the triangle. *Numer Math*, 1970, 15: 283–296

## Finite element complexes in two dimensions

Long Chen & Xuehai Huang

**Abstract** In this paper, we construct two-dimensional finite element complexes with various levels of smoothness, including the de Rham complex, the curl div complex, the elasticity complex, the Hessian complex, and the div div complex. We develop smooth scalar finite elements in two dimensions based on a non-overlapping decomposition of the simplicial lattice and the Bernstein basis of the polynomial space, with the order of differentiability at vertices being greater than or equal to twice that at edges. We devise finite element de Rham complexes with different levels of smoothness by using smooth finite elements with smoothness parameters that satisfy certain relations. Finally, we derive finite element elasticity complexes, finite element Hessian complexes, and finite element div div complexes from finite element de Rham complexes by using the Bernstein-Gelfand-Gelfand (BGG) framework. This study is the first work to construct finite element complexes in a systematic way. Moreover, the novel tools developed in this work, such as the non-overlapping decomposition of the simplicial lattice and the discrete BGG construction, can be useful for further research in this field.

**Keywords** finite element complex, Bernstein-Gelfand-Gelfand framework, smooth finite element, geometric decomposition, simplicial lattice, Bernstein basis

MSC(2020) 65N30, 58J10

doi: 10.1360/SCM-2023-0169