



可数交换群作用的描述组合学

高速

南开大学数学科学学院, 天津 300071

E-mail: sgao@nankai.edu.cn

收稿日期: 2023-05-04; 接受日期: 2023-12-07; 网络出版日期: 2024-01-30

国家自然科学基金 (批准号: 12250710128) 资助项目

摘要 本文介绍描述集合论中的超有穷性问题与描述组合理论之间的关系, 综述用描述集合论的方法研究可数交换群作用产生的 Schreier 图的组合性质所得到的结果. 这些性质既包括 Borel 或连续染色数、边染色数和完全匹配等图论性质, 也包括一般 Borel 作用下 Borel 标记集的动力系统性质. 本文也介绍证明结论所采用的方法, 这些方法涉及拓扑学、遍历论、几何群论和力迫法等不同数学分支.

关键词 描述集合论 Borel 归约 超有穷 染色数 完全匹配 标记结构 超非周期元 轨道力迫

MSC (2020) 主题分类 03E15, 05C15, 37B99

1 背景

描述集合论研究实数集 $\mathbb{R}$ 的可定义子集的性质. 这里可定义子集的典型情形就是 Borel 集, 即包含所有开集的最小 σ -代数中的集合. 一个 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的 Borel 函数 f 也是描述集合论的研究对象. 这是因为 f 的图像是 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 的 Borel 子集, 而 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 与 $\mathbb{R}$ 之间则存在保持 Borel 集的一一对应 (称为 Borel 同构), 因此 f 也可以看成是 $\mathbb{R}$ 的 Borel 子集.

一般地, 描述集合论也研究波兰空间, 即可分的可完备度量化化的拓扑空间, 或者标准 Borel 空间, 即形如 $(X, \mathcal{B})$ 的空间, 其中 $\mathcal{B}$ 为 X 上某波兰空间拓扑生成的 σ -代数. 可以证明 (参见文献 [17, 推论 15.2]), 任意两个不可数的标准 Borel 空间之间都存在 Borel 同构. 因此, 本质上 $\mathbb{R}$ 是唯一的不可数标准 Borel 空间.

波兰空间和标准 Borel 空间的概念具有很好的封闭性质. 例如, 它们都对可数乘积封闭, 波兰空间的任意 G_δ 子集仍是波兰空间, 标准 Borel 空间的任意 Borel 子集仍是标准 Borel 空间, 等等. 这样, 描述集合论的研究对象就大大拓展了. 在描述集合论的诸多应用中, 并不直接研究 $\mathbb{R}$ 或者它的子集, 但仍可以套用描述集合论的理论成果.

20 世纪 80 年代末, 出现了等价关系的描述集合论, 也称为不变量描述集合论, 它的主要研究对象是实数集 $\mathbb{R}$ 上的可定义等价关系, 如作为 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 的 Borel 子集的 Borel 等价关系. 这个理论的中心概

英文引用格式: Gao S. Descriptive combinatorics of countable abelian group actions (in Chinese). Sci Sin Math, 2024, 54: 575–592, doi: 10.1360/SSM-2023-0112

念是等价关系之间的 Borel 归约. 设 X 和 Y 为标准 Borel 空间, E 和 F 分别为 X 上和 Y 上的等价关系. 若 $f: X \rightarrow Y$ 为 Borel 函数, 满足对于任意 $x_1, x_2 \in X$, 都有

$$(x_1, x_2) \in E \Leftrightarrow (f(x_1), f(x_2)) \in F,$$

则称 f 为 E 到 F 的 Borel 归约, 此时也称 E Borel 归约到 F , 并记为 $E \leq_B F$. 若 $E \leq_B F$ 而 $F \not\leq_B E$, 记为 $E <_B F$, 并称 E Borel 真归约到 F . 若 $E \leq_B F$ 且 $F \leq_B E$, 记为 $E \sim_B F$, 并称 E Borel 双归约到 F .

Borel 归约的概念提供了等价关系相对复杂度的一种分层. 直观上, 若 $E \leq_B F$, 则可以认为 E 的复杂度不高于 F 的复杂度; 若 $E <_B F$, 则 E 的复杂度严格低于 F 的复杂度; 而若 $E \sim_B F$, 则 E 和 F 具有相同的复杂度. 经过 30 多年的发展, 这一复杂度理论取得了巨大的成功. 一方面, 对于偏序 $\leq_B$ 的研究得到了大量理论结果 (参见文献 [7]); 另一方面, 通过 Borel 双归约的概念, 对于数学多个分支中的分类问题, 研究者们完全刻画了它们作为等价关系的复杂度.

现在知道, Borel 等价关系可以有各种各样不同的复杂度. 以下是两个与本综述相关的等价关系的例子. 首先是 $\mathbb{R}$ 上的恒等关系, 用 $=$ 或 $E_=\text{表示, 即 } (x, y) \in E_=\text{ 当且仅当 } x = y$. 第二个例子是 } \mathbb{R} 上的 Vitali 等价关系 E_V , 定义为

$$(x, y) \in E_V \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

恒等关系虽然简单, 但在不变量描述集合论的应用中十分重要. 这是因为, 如果 X 是某些数学对象的全体组成的标准 Borel 空间, E 是对 X 中元素进行某种分类所对应的等价关系, 而 f 是 E 到 $E_=\text{的 Borel 归约, 则对于任意 } x \in X, f(x)\text{ 就给出了 } x\text{ 所在的 } E\text{-等价类 (记为 } [x]_E\text{) 的完全不变量. 不难证明, 如果一个 Borel 等价关系 } E\text{ 的每个等价类有穷 (这样的 } E\text{ 称为有穷等价关系), 则 } E \leq_B E_=\text{. 也可以完全刻画所有 Borel 归约到 } E_=\text{的等价关系 } E\text{ (} E\text{ 必为 Borel 等价关系) 的复杂度如下. 要么 } E\text{ 只有有穷多个等价类, 要么 } E\text{ 有可数无穷多个等价类, 要么 } E \sim_B E_=\text{; } E\text{ 的复杂度与它等价类的个数相对应. Silver}^{[22]}\text{ 证明了, 对于任意含不可数多个等价类的 Borel 等价关系 } E, \text{ 都有 } E_=\leq_B E$.

Vitali 等价关系 E_V 的得名源于测度论中 Vitali 集的概念. Vitali 集就是从每个 E_V -等价类中选出恰好一点所组成的集合, 它不是 Lebesgue 可测的, 因而也不可能是 Borel 集. 在 Borel 归约分层中, E_V 是第一个复杂度严格高于 $E_=\text{的等价关系的例子. Harrington 等}^{[15]}\text{ 的二分定理指出, 对于任意 Borel 等价关系 } E, \text{ 要么 } E \leq_B E_=\text{, 要么 } E_V \leq_B E, \text{ 二者必居其一也仅居其一. 这说明 } E_V\text{ 在 Borel 归约分层中的地位是极为特殊的: 可以认为它是所有含不可数多个等价类的 Borel 等价关系中具有第一个不平凡复杂度的等价关系.}$

到目前为止, 对于哪些等价关系与 E_V Borel 双归约这个问题, 还没有彻底的答案. 本综述中所研究的问题与这个问题密切相关.

2 超有穷等价关系

具有与 Vitali 等价关系 E_V 相同复杂度的等价关系的例子很多, 其中最常用的例子是下面的 E_0 . 它的定义域是 Cantor 空间 $2^{\mathbb{N}} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, 即全体可数无穷 0, 1- 序列所组成的波兰空间. 对 $x, y \in 2^{\mathbb{N}}$, 定义

$$(x, y) \in E_0 \Leftrightarrow \exists N, \forall n \geq N, x(n) = y(n).$$

可以证明 $E_V \sim_B E_0$.

从 E_0 的定义可以很容易看出, 如果考虑 $2^{\mathbb{N}}$ 上定义的等价关系

$$(x, y) \in F_N \Leftrightarrow \forall n \geq N, \quad x(n) = y(n),$$

则 F_N 是一列单调递增的有穷等价关系, 并且 $E_0 = \bigcup_N F_N$. 一般地, 若存在一列单调递增的 Borel 有穷等价关系 F_n 使得 $E = \bigcup_n F_n$, 则称等价关系 E 为超有穷的 (hyperfinite).

Dougherty 等^[5] 证明了 Borel 等价关系 E 超有穷当且仅当 $E \leq_B E_0$ (或等价地, $E \leq_B E_V$). 这样, 对等价关系超有穷性的研究就等同于研究它在 Borel 归约分层中的复杂度.

超有穷性的概念, 以及 E_0 这个例子本身, 最初都见于二十世纪六七十年代对遍历论、拓扑动力系统及 C^* -代数的研究, 而在无测度的情形的超有穷等价关系的概念则最早由 Weiss 于 1984 年在文献 [26] 中定义. 在之前在遍历论中, Connes 等^[4] 已经考虑了可数群作用所生成的轨道等价关系, 并证明了任意可数顺从群 (amenable group) 的 Borel 作用所生成的轨道等价关系在一个零测集外是超有穷的. 这启发 Weiss^[26] 提出了著名的超有穷性问题.

问题 2.1 (超有穷性问题) 是否任意可数顺从群的 Borel 作用所生成的轨道等价关系都是超有穷的?

该问题至今未解决, 对它的研究是本综述中研究的很多问题的出发点. 超有穷性问题考虑的是可数群的 Borel 作用所生成的轨道等价关系, 先来回顾这些概念. 设 Γ 为可数离散群, X 为标准 Borel 空间, $a: \Gamma \curvearrowright X$ 为 Borel 作用, 定义轨道等价关系

$$E_\Gamma^X = \{(x, y) \in X^2: \exists g \in \Gamma, a(g, x) = y\},$$

习惯上也用 $g \cdot x$ 来记 $a(g, x)$. 当 X 不言自明时, 也简记 E_Γ^X 为 E_Γ . 每一个 E_Γ -等价类也称为轨道. 不难看出, 每一个这样的轨道等价关系都是 Borel 等价关系, 并且它的每个等价类都至多可数. 我们将这样的 Borel 等价关系称为可数等价关系. Feldman 和 Moore^[6] 的定理说明反过来也成立, 即任意可数 Borel 等价关系也一定是某个可数群的 Borel 作用所生成的轨道等价关系. 因为超有穷等价关系必定也是可数等价关系, 所以在研究等价关系的超有穷性时可以不失一般性地只考虑轨道等价关系. 当作用群 Γ 不是顺从群时, 如当 Γ 是非交换可数自由群时, 已知它可以产生非超有穷的轨道等价关系 (参见文献 [7, 定理 7.4.8]).

Weiss^[26] 及 Slaman 和 Steel^[23] 独立证明了作用群为 $\mathbb{Z}$ 的轨道等价关系必为超有穷. 后来 Weiss 将它推广到一般的 $\mathbb{Z}^n$. Jackson 等^[16] 又推广到所有有限生成的具有多项式增长率的群, 由 Gromov 定理知它们恰好是所有有限生成的实质幂零群 (virtually nilpotent group). 此外, 他们也证明了所有有理数的加法群 $(\mathbb{Q}, +)$ 的作用也生成超有穷等价关系. 为了说明超有穷性问题对作用群的微妙依赖, Kechris 定义了毕达哥拉斯等价关系: 对正实数 x 和 y , 定义

$$(x, y) \in E_P \Leftrightarrow x/y \in \mathbb{Q}.$$

E_P 的命名源于古希腊毕达哥拉斯学派“万物皆数”的信条 (这里的“数”特指有理数). 而 E_P 则是所有正有理数的乘法群 $(\mathbb{Q}_+, \times)$ 在正实数集 $\mathbb{R}_+$ 上的作用所生成的轨道等价关系. 尽管 E_P 和 E_V 有相似之处, 但证明 E_V 超有穷的方法无法应用于 E_P .

Gao 和 Jackson^[8] 证明了所有可数交换群的轨道等价关系都是超有穷的. 作为推论, 他们得到 E_P 超有穷. 其后, Schneider 和 Seward^[21] 将这一结果推广到所有可数局部幂零群 (locally nilpotent group). 最近, Conley 等^[3] 又对可数多循环群 (polycyclic group) 建立了这一结果. 他们的方法还可以用于一些其他的零星群, 如 Baumslag-Solitar 群 $BS(1, n)$ 等.

到目前为止, 对超有穷性问题的研究还未超出可数可解群的范畴, 而所有可数可解群都是顺从群. 下一节将分析证明超有穷性的基本方法, 并说明它与描述组合理论的关系. 在结束本节之前, 再陈述一个关于超有穷性的公开问题. 它本身就是一个极有趣的问题, 而它的正面解决将极大推动超有穷性问题的研究.

问题 2.2 (单增并问题) 若 E_n 为一列单调递增的超有穷等价关系, 且 $E = \bigcup_n E_n$, 是否 E 仍然超有穷?

3 标记结构与描述组合问题

对描述组合问题的系统研究始于 Kechris 等 [18]. 一般地, 考虑图 $G = (X, R)$, 其中, X 是标准 Borel 空间, 边关系 $R \subseteq X \times X$ 是 Borel 集. 可以定义图论中很多概念的描述集合论版本. 例如, 一个适当染色 (proper coloring) 是从 X 到某个集合 C 的函数 c , 满足对于任意 $x, y \in X$, 若 $R(x, y)$ 成立, 则 $c(x) \neq c(y)$. 若 C 也是标准 Borel 空间且 c 是 Borel 函数, 则称这里的 c 为 Borel 适当染色. 当 X 是波兰空间时也可以定义连续适当染色, 即 C 也是波兰空间且 c 是连续函数. 在图论中, G 的染色数 (chromatic number) 定义为

$$\chi(G) = \min\{|C| : \text{存在适当染色 } c : X \rightarrow C\},$$

其中 $|C|$ 是集合 C 的基数. 在描述图论中, 可以相应地定义 G 的 Borel 染色数 $\chi_B(G)$ 以及当 X 是波兰空间时 G 的连续染色数 $\chi_c(G)$. 若一个 Borel 图的 Borel 染色数或连续染色数无穷, 则它的可能取值只有 $\aleph_0$ (可数无穷) 和 $2^{\aleph_0}$ (连续统势) 两种选择, 这是因为一个不可数的标准 Borel 空间或波兰空间必有连续统的势 (参见文献 [17, 推论 6.5]).

本文主要研究有限生成群作用的 Schreier 图. 当 Γ 是有限生成群时, 若 S 为 Γ 的有限生成集, 则称 (Γ, S) 为标记群 (marked group). 通常假定 S 是一个极小生成集; 特别地, $e_\Gamma \notin S$, 也有 $s \in S$ 蕴含 $s^{-1} \notin S$. 标记群 (Γ, S) 上的 Cayley 图定义为 $G(\Gamma, S) = (\Gamma, R)$, 其中

$$R(g, h) \Leftrightarrow \exists s \in S (sg = h \text{ 或 } sh = g).$$

进一步地, 若 Γ Borel 作用在标准 Borel 空间 X 上, 则可以推导出 X 上的 Schreier 图 $G(X, \Gamma, S) = (X, Q)$, 其中

$$Q(x, y) \Leftrightarrow \exists s \in S (s \cdot x = y \text{ 或 } s \cdot y = x).$$

Cayley 图是 Schreier 图的特殊情形. 此时 Γ 作为可数离散空间是标准 Borel 空间, 群作用是 Γ 在它自身上的左乘作用. 而我们所关心的 Schreier 图一般都是不可数的. Schreier 图的每个连通分支恰为轨道等价关系 E_Γ 的一个等价类或轨道. 当 $\Gamma \curvearrowright X$ 是自由作用时 (即对于任意 $x \in X$ 及 $e_\Gamma \neq g \in G$ 都有 $g \cdot x \neq x$), Schreier 图的每个连通分支都同构于 (Γ, S) 的 Cayley 图, 此时有

$$\chi(G(\Gamma, S)) = \chi(G(X, \Gamma, S)) \leq \chi_B(G(X, \Gamma, S)).$$

若 X 是波兰空间, 也考虑 $\chi_c(G(X, \Gamma, S))$ 并且注意到

$$\chi_B(G(X, \Gamma, S)) \leq \chi_c(G(X, \Gamma, S)).$$

虽然可以在描述图论中毫无困难地定义图论中的概念, 但它们的性质和取值可以有很大差别. 下面详细分析一个简单例子. 考虑标记群 $(\mathbb{Z}, \{+1\})$ 及 $\mathbb{Z}$ 在 $2^{\mathbb{Z}}$ 上的推移作用:

$$(n \cdot x)(m) = x(m+n).$$

这一作用是连续的. 令 X 为这一作用的自由部分, 即

$$X = \{x \in 2^{\mathbb{Z}} : \forall n \in \mathbb{Z} (n \neq 0 \rightarrow n \cdot x \neq x)\}.$$

则 X 是波兰空间 $2^{\mathbb{Z}}$ 的 G_δ 子集, 因此 X 仍是波兰空间; X 在上述推移作用下是不变子空间, 因此 $\mathbb{Z}$ 在 X 上的推移作用成为一个连续的自由作用. 用 $G(\mathbb{Z})$ 简记 $\mathbb{Z}$ 上的 Cayley 图, 用 $G(X)$ 简记 X 上的 Schreier 图. 则显然有

$$\chi(G(\mathbb{Z})) = \chi(G(X)) = 2.$$

下面说明 $\chi_B(G(X)) > 2$. 假设 $c: X \rightarrow \{\text{黑}, \text{白}\}$ 是一个 Borel 适当染色. 不难看出 $c^{-1}(\{\text{黑}\}) = +1 \cdot c^{-1}(\{\text{白}\})$ 且两者都是 X 的 Borel 子集. 考虑 $2\mathbb{Z}$ 在 X 上的作用, 则 $c^{-1}(\{\text{黑}\})$ 和 $c^{-1}(\{\text{白}\})$ 在该作用下是不变子集. 又考虑到空间 $2^{\mathbb{Z}}$ 上的 Bernoulli 测度 μ , 则有 $\mu(X) = 1$. 相对于作用 $2\mathbb{Z} \curvearrowright X$, μ 是一个不变的遍历测度, 即对于任意 X 的不变 Borel 子集 B 都有 $\mu(B) = 0$ 或 $\mu(B) = 1$. 但又有 $\mu(c^{-1}(\{\text{黑}\})) = \mu(c^{-1}(\{\text{白}\}))$ 且它们构成 X 的划分, 这就推导出矛盾.

在上面的证明中可以将测度换成贝尔纲, 零测集用贫集 (meager set) 代替, 满测集用余贫集 (comeager set) 代替, 得出同样的矛盾. 因此这里测度的使用不是不可替代的. 这种用测度遍历性质或用贝尔纲遍历性质来证明 (通常是负面) 结论的方法称为遍历论证 (ergodicity argument).

为证明 $\chi_B(G(X)) = 3$, 下面陈述 Slaman 和 Steel^[23] 的标记引理. 这里先介绍一个概念. 若 E 为 X 上的等价关系, A 为 X 的子集, 并且 A 与任意 E -等价类有非空的交, 则称 A 为全截集 (complete section). 通常也称 A 为标记集 (marker set), 称 A 中的元素为标记点 (marker point).

引理 3.1 (Slaman-Steel 标记引理^[23]) 设 X 为标准 Borel 空间, E 为 X 上的可数 Borel 等价关系, 满足对于任意 $x \in X$, $[x]_E$ 无穷. 则存在一列单调递减的 Borel 全截集 A_n 使得 $\bigcap_n A_n = \emptyset$.

下面给出一个 $G(X)$ 的一个 Borel 适当 3-染色. 设 A_n 为一列单调递减的 Borel 全截集, 满足 $\bigcap_n A_n = \emptyset$. 不妨设 $A_0 = X$. 给定任意 $x \in X$. 定义 n_x 为唯一的 n 使得 $x \in A_n \setminus A_{n+1}$, 也定义

$$m_x = \min\{n_y : y \in [x]_E\} \quad \text{和} \quad S_x = \{y \in [x]_E : n_y = m_x\}.$$

注意到每个 A_n 都是 E 的全截集, 因此 $S_x \neq [x]_E$. 定义 $T_x = T_x^1 \cup T_x^2$, 其中

$$T_x^1 = \{y \in [x]_E : y \in S_x \text{ 但 } +1 \cdot y \notin S_x\},$$

$$T_x^2 = \{y \in [x]_E : y \notin S_x \text{ 但 } +1 \cdot y \in S_x\}.$$

则 $T_x \neq \emptyset$. 在 $C = [x]_E$ 上考虑线性序 $<_C: y <_C z$ 当且仅当存在 $n > 0$ 使得 $n \cdot y = z$. 考虑两种情形. 第一种情形是 T_x 有 $<_C$ -最大元或 $<_C$ -最小元. 不妨假设 T_x 有最小元 x_0 . 注意到 $T_x = T_y$ 对所有 $y \in [x]_E$ 成立, 因此 x_0 的定义是唯一的. 因此可以定义

$$c(x) = \begin{cases} \text{红}, & \text{若存在偶数 } n \text{ 使得 } n \cdot x_0 = x, \\ \text{黄}, & \text{若存在奇数 } n \text{ 使得 } n \cdot x_0 = x. \end{cases}$$

第二种情形是 T_x 既没有 $<_C$ -最大元也没有 $<_C$ -最小元. 这时 T_x^1 也满足既没有 $<_C$ -最大元也没有 $<_C$ -最小元. 设 $k_x \geq 0$ 为最小的 k 使得 $k \cdot x \in T_x^1$, $\ell_x > 0$ 为最小的 ℓ 使得 $(-\ell) \cdot x \in T_x^1$. 由 T_x^1 的定义知 $k_x + \ell_x > 1$. 定义

$$c(x) = \begin{cases} \text{红, 若 } k_x \text{ 是偶数且 } \ell_x > 1, \\ \text{黄, 若 } k_x \text{ 是奇数,} \\ \text{蓝, 若 } k_x \text{ 是偶数且 } \ell_x = 1. \end{cases}$$

不难验证 c 是一个 Borel 适当染色, 因此 $\chi_B(G(X)) = 3$.

为研究 $G(X)$ 的连续适当染色, 引入下面的闭开标记引理 [8].

引理 3.2 (闭开标记引理 [8]) 设 ρ 是图 $G(X)$ 上的最短路径距离函数. 给定任意正整数 d , 都存在 X 中的闭开集 A , 使得

- (i) 若 $x, y \in A$, 则 $\rho(x, y) > d$;
- (ii) 对于任意 $x \in X$ 都存在 $y \in A$ 使得 $\rho(x, y) \leq d$.

条件 (ii) 蕴含 A 是一个全截集. 不难看出, 条件 (i) 说明 A 具有类似于上面证明中 T_x^1 的性质. 因此, 可以利用 A 类似地定义一个适当 3-染色, 而这个染色是连续的. 因此得到 $\chi_c(G(X)) = 3$.

在上述组合问题的讨论中, 我们所使用的标记集, 或者更准确地说是标记结构 (多个具有某种关联性的标记集), 也恰恰是证明超有穷性所使用的工具. 在 Slaman 和 Steel [23] 对所有 $\mathbb{Z}$ 的 Borel 作用都生成超有穷轨道等价关系的原始证明中, 可以沿用上面证明中所使用的记号, 考虑 X 的 Borel 子空间

$$Y = \{x \in X : \text{在 } E\text{-等价类 } C = [x]_E \text{ 上, } B_n \cap C \text{ 没有 } <_C\text{-最大元或 } <_C\text{-最小元}\}.$$

这样, 在 Y 上可以定义有穷等价关系 F_n 如下:

$$(x, y) \in F_n \Leftrightarrow k_x \cdot x = k_y \cdot y.$$

不难验证 F_n 是一列单调递增的有穷 Borel 等价关系, 且 $E_{\mathbb{Z}} \upharpoonright Y = \bigcup_n F_n$, 因此 $E_{\mathbb{Z}} \upharpoonright Y$ 超有穷. 而在 $X \setminus Y$ 上, $<_C$ -最大元或 $<_C$ -最小元的存在性给出 $E_{\mathbb{Z}} \upharpoonright (X \setminus Y) \leq_B E_{\mathbb{Z}}$, 从而 $E_{\mathbb{Z}} \upharpoonright (X \setminus Y)$ 超有穷. 这推导出 $E_{\mathbb{Z}}$ 超有穷.

这种用标记结构来证明 (通常是正面) 结论的方法称为标记论证 (marker argument).

4 闭开标记与超非周期论证

本节研究具有各种特殊性质的标记结构的存在性及证明方法. 与上一节的例子相似, 这些方法也可以推导出各种描述组合结论.

首先考虑一个一般问题. 设 Γ 是可数无穷离散群, 2^Γ 是所有 $x: \Gamma \rightarrow \{0, 1\}$ 所组成的波兰空间 (它与 Cantor 空间 $2^{\mathbb{N}}$ 同胚), $\Gamma \curvearrowright 2^\Gamma$ 是 Γ 在 2^Γ 上的 Bernoulli (右) 推移作用:

$$(g \cdot x)(h) = x(hg).$$

令 $F(2^\Gamma)$ 为 Bernoulli 推移作用的自由部分, 即

$$F(2^\Gamma) = \{x \in 2^\Gamma : \forall g \in \Gamma (g \neq e_\Gamma \rightarrow g \cdot x \neq x)\}.$$

则 $F(2^\Gamma)$ 是 2^Γ 的不变 G_δ 子集, 因此 $\Gamma \curvearrowright F(2^\Gamma)$ 是 Γ 在波兰空间 $F(2^\Gamma)$ 上的连续作用, 生成可数 Borel 的轨道等价关系 E_Γ . 由 Slaman-Steel 标记引理知, $F(2^\Gamma)$ 上存在一列单调递减的 Borel 全截集 A_n 使得 $\bigcap_n A_n = \emptyset$. 那么是否可以将这些 Borel 集 A_n 改进为闭开集?

从 Gao 等^[12,13]的工作知答案是否定的. 为此定义一个新概念. 若对于任意 $g \in \Gamma$, 存在有限集 $D \subseteq \Gamma$ 使得对于任意 $h \in \Gamma$, 存在 $k \in D$ 使得 $x(kh) \neq x(kgh)$, 则称一个 2^Γ 的元素 x 是超非周期的 (hyperaperiodic). 已知 x 是超非周期的当且仅当 $[x]_{E_\Gamma}$ 在 2^Γ 中的闭包含于 $F(2^\Gamma)$. Gao 等^[12,13]的一个主要定理指出, 对于任意可数无穷群 Γ 都存在 2^Γ 中的超非周期元. 有以下推论.

定理 4.1^[12] 设 Γ 是可数无穷群, A_n 是 $F(2^\Gamma)$ 中一列单调递减的闭开全截集. 则 $\bigcap_n A_n \neq \emptyset$.

证明很简单: 设 x 是 2^Γ 中的超非周期元, 且令 X 为 $[x]_{E_\Gamma}$ 在 2^Γ 中的闭包. 则 X 是不变紧空间, $A_n \cap X$ 是 X 上一列单调递减的非空闭集, 因此 $\bigcap_n (A_n \cap X) \neq \emptyset$.

这种利用超非周期元的存在性与紧性结合的证明方法称为超非周期论证 (hyperaperiodic argument). 超非周期论证一般用于某种闭开标记结构不存在的证明.

下面考虑一些特殊的标记结构. 设 (Γ, S) 是标记群, $X = F(2^\Gamma)$, $\Gamma \curvearrowright X$ 是 Bernoulli 推移作用, H 是 $G(X, \Gamma, S)$ 的子图. 若 H 的顶点集为 X 的闭开子集且 H 的边集为 $G(X, \Gamma, S)$ 的边集的相对闭开子集, 则称 H 为闭开的. 若 H 的顶点集是全截集且 H 的每个顶点的度为 2, 则称 H 为截线图 (line section). 当 H 是截线图时, 称每个 H 的连通分支为一条 H -线. 若 x 和 y 为同一条 H -线上的两点, 则记 $\rho_H(x, y)$ 为 x 到 y 沿该 H -线的路径距离. 若 H 为截线图且每个 $G(X, \Gamma, S)$ 的连通分支只包含一条 H -线, 则称 H 为单截线图 (single line section). 若 H 为单截线图且 H 的顶点集为 X , 则称 H 为线化图 (lining).

当 $\Gamma = \mathbb{Z}^2$ 且 $S = \{(1, 0), (0, 1)\}$ 时, 还可以考虑以下更为特殊的标记结构. 若 H 的每个连通分支在 $(1, 0)$ 的作用下封闭, 即每条 H -线是水平的, 则称 H 为水平截线图 (horizontal line section). 若 H 为截线图, 称 H 有有界粗斜率 (bounded coarse slope), 若存在 $D, M > 0$ 使得对于任意同一 H -线上两点 x 和 y , 如果 $\rho_H(x, y) > D$, 则对唯一使得 $(u, v) \cdot x = y$ 的 $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$, 都有 $|v| \leq M|u|$.

定理 4.2 (参见文献 [10, 第 1.6 小节]) 在 $F(2^{\mathbb{Z}^2})$ 中不存在以下标记结构:

- (1) Borel 水平截线图 H 使得 H 的顶点集的补集也是全截集;
- (2) 有有界粗斜率的闭开截线图 H 使得 H 的顶点集的补集也是全截集;
- (3) 闭开单截线图;
- (4) 闭开线化图.

这里 (1) 的证明是遍历论证, (2)–(4) 的证明是超非周期论证, 它们依赖于构造具有特殊性质的超非周期点. 以下问题还是公开的.

问题 4.1 在 $F(2^{\mathbb{Z}^2})$ 中是否存在如下标记结构:

- (1) 闭开截线图 H 使得 H 的顶点集的补集也是全截集?
- (2) 闭开截线图 H 使得每个等价类只包含有限条 H -线?

5 Borel 标记与力迫论证

本节介绍一般 Borel 标记集的一些动力系统性质.

设 Γ 是可数群, T 是 Γ 的有限子集. 若 $A \subseteq \Gamma$ 且 $TA = \Gamma$, 则称 A 是一个 (右) T -网. 若存在有限 $T \subseteq \Gamma$ 使得 A 是 T -网, 则称 A 为连结集 (syndetic set).

定理 5.1 ^[9] 设 Γ 为可数无穷群, $B \subseteq F(2^\Gamma)$ 为 Borel 全截集, 则存在 $x \in F(2^\Gamma)$ 使得 $\{g \in \Gamma: g \cdot x \in B\}$ 为连结集.

如果这里的 B 是闭开集, 则这个定理可以用拓扑方法给出证明. 若可数群 Γ 在紧波兰空间 X 上有一个连续作用, 若 x 的轨道闭包 Y 是极小动力系统, 即 Y 中所有轨道都稠密, 则称 $x \in X$ 为极小点 (minimal point). 2^Γ 中的极小点可以刻画如下 (参见文献 [13, 引理 2.4.5]): $x \in 2^\Gamma$ 是极小点当且仅当对于任意有限 $F \subseteq \Gamma$ 都存在有限 $T \subseteq \Gamma$ 使得

$$\forall g \in \Gamma, \exists t \in T, \forall h \in F, x(htg) = x(h).$$

由文献 [13, 定理 5.3.6] 知, 对于任意可数无穷群 Γ 都有 $\{x \in F(2^\Gamma): x \text{ 是 } 2^\Gamma \text{ 中的极小点}\}$ 在 $F(2^\Gamma)$ 中稠密. 用这一结果可以给出上面定理在 B 是闭开集的假定下的拓扑证明如下. 设 V 是 2^Γ 中满足 $V \cap F(2^\Gamma) \subseteq B$ 的基本开集. 令 $x \in F(2^\Gamma) \cap V$ 为 2^Γ 中的极小点. 则有有限 $F \subseteq \Gamma$ 使得对于任意 $y \in 2^\Gamma$, 若 $y(h) = x(h)$ 对于所有 $h \in F$ 成立, 则有 $y \in V$. 由 x 的极小性得到有限集 $T \subseteq \Gamma$ 使得 $\{g \in \Gamma: g \cdot x \in V\}$ 为 T -网, 因而定理得证.

当 B 推广为 Borel 集时有两种方法证明上面的定理. 这两种方法逻辑上是等价的, 但他们的表现形式很不同. 一种方法是力迫法. 给定一个波兰空间 X 上的可数 Borel 等价关系 E 及轨道 $C = [x_0]_E$, 其中 $x_0 \in X$, 可以定义一个轨道力迫 (orbit forcing) 概念

$$\mathbb{P}_C = \{U \subseteq X: U \text{ 是开集且 } U \cap C \neq \emptyset\}$$

以及偏序 $U \leq U'$ 定义为 $U' \subseteq U$. 这时若取 x_0 为 $F(2^\Gamma)$ 中的极小点, 则轨道力迫 $\mathbb{P}_C$ 的泛型点 (generic element) x_G 在泛型扩张 (generic extension) $V[G]$ 中就有满足定理结论的性质. 因为定理结论是一个解析命题, 由 Shoenfield 绝对性得到定理在原集合论域 V 中成立. 这样的论证方式称为力迫论证 (forcing argument).

这个定理也可以不用力迫法而通过修改原空间上的拓扑 (但保持标准 Borel 结构不变) 来论证, 证明的细节参见文献 [9, 定理 3.7 至推论 3.10]. 比较上述两种方法可以看出, 力迫法的证明步骤更接近在闭开情形的拓扑证明的步骤, 因此力迫法更适合用于发现新的定理.

用力迫论证可以证明 Borel 标记结构有很多意想不到的规则性质. 以下是一些例子.

定理 5.2 ^[9] 设 $n \geq 1$, $B \subseteq F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 为 Borel 全截集. 则存在 $x \in F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 及

$$T \subseteq \left\{ (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n: \sum_{i=1}^n a_i \text{ 是奇数} \right\}$$

使得 $\{g \in \mathbb{Z}^n: g \cdot x \in B\}$ 是 T -网.

一个 $\mathbb{Z}^n$ 中的格 (lattice) 是形如

$$(a_1, \dots, a_n) + \prod_{i=1}^n b_i \mathbb{Z}$$

的 $\mathbb{Z}^n$ 的子集.

定理 5.3 ^[9] 设 $n \geq 1$, $B \subseteq F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 为 Borel 全截集. 则存在 $x \in F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 及 $\mathbb{Z}^n$ 中的格 L 使得

$$L \cdot x \subseteq B.$$

Marks^[19] 对作用群为有限生成的自由群的情形证明了类似定理 5.3 的结果. 之后又推广到所有可数余部有限群 (residually finite group). 这些证明采用了决定性论证 (determinacy argument), 即利用 Borel 博弈的决定性论证的方法.

Borel 博弈的决定性是描述集合论中重要的结果. 给定集合 $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, 考虑二人博弈 G_A : 甲乙二人轮番选取自然数 $a_0, b_0, a_1, b_1, \dots$, 形成可数无穷序列

$$x = (a_0, b_0, a_1, b_1, \dots) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}};$$

在这一轮对局中, 若 $x \in A$ 则判甲赢, 而若 $x \notin A$ 则判乙赢. 在这个博弈中, 甲的策略是指函数 $\sigma: \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^{2k} \rightarrow \mathbb{N}$; 如果甲完全按策略 σ 对局, 则在乙选取 $b_0, b_1, \dots$ 时甲选取

$$a_0 = \sigma(\emptyset) \text{ 及对于任意 } n \geq 0, \text{ 都有 } a_{n+1} = \sigma(a_0, b_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n).$$

若无论乙如何对局, 只要甲按策略 σ 对局, 甲就必赢, 则称 σ 为甲的稳赢策略. 类似地可以定义乙的策略和稳赢策略的概念. 若在博弈 G_A 中甲乙两方中有一方有稳赢策略, 则称 A 有决定性. Martin^[20] 证明了所有 Borel 集 $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 都有决定性. Marks^[19] 定义了一类在可数无穷群的自由乘积上对局的博弈, 即给定可数无穷群 Γ, Δ 及 Borel 集 $A \subseteq F(\mathbb{N}^{\Gamma * \Delta})$, 甲乙两方按照某种规则轮番选取自然数形成 $\mathbb{N}^{\Gamma * \Delta}$ 中的元素. 由 Borel 博弈的决定性知这些 $\mathbb{N}^{\Gamma * \Delta}$ 上的博弈也有决定性, 从而推导出一系列有趣的二分性质.

回到关于 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 中标记结构的讨论, 对于多个标记集组成的标记结构, 有以下结果.

定理 5.4^[9] 设 $n \geq 1$, $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 满足 $\limsup_k f(k) = +\infty$, A_k 是一列 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 中的 Borel 全截集. 令 ρ 为 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 的 Schreier 图上的最短路径距离. 则存在 $x \in X$ 使得 $\rho(x, A_k) < f(k)$ 对无穷多个 k 成立.

将这一结果推广到一般情形, 有以下结果.

定理 5.5^[9] 设 Γ 是可数群, X 是紧波兰空间, $\Gamma \curvearrowright X$ 是连续作用. 设 F_n 是一列 Γ 的有限子集, 满足任意 Γ 的有限子集都含于某个 F_n . 设 A_n 是一列 Borel 全截集. 则存在 $x \in X$ 使得 $F_n \cdot x \cap A_n \neq \emptyset$ 对无穷多个 n 成立.

6 标记区域与正交标记分解

本节介绍从标记集延伸出来的标记区域和标记分解的概念. 这些构造是超有穷性证明和正面组合性质的证明的基础. 当讨论标记区域和标记分解时, 为凸显所讨论的构造的几何特色, 称全截集为标记集.

在第 3 节的讨论中已经看到了标记区域和标记分解的简单形式. 事实上, 在 $\mathbb{Z}$ 的自由作用下, 每个轨道上有一个自然的线性序, 又假定有一列单调递减的 Borel 标记集 B_n 满足 B_n 在每个轨道上都没有最大元或最小元. 这时定义两个相邻的标记点之间的区间为标记区域 (对于端点, 本文的处理方法是规定每个端点属于它左边的区域), 这样, 每个 B_n 就诱导一个标记分解, 对应一个有穷等价关系 F_n . 而对于 $n < m$, B_n 所对应的分解细于 B_m 所对应的分解, 从而有 $F_n \subseteq F_m$. 在这种情形, 称这些标记分解是连贯的 (coherent). 一般而言, 连贯的标记分解对应一些单调递增的有穷等价关系, 从而直接推导出这些等价关系的并超有穷.

然而, 当试图将 $\mathbb{Z}$ 的作用替换为 $\mathbb{Z}^n$ ($n > 1$) 的作用时, 需要克服一些困难. 首先, 对单个标记集所诱导的标记区域分解, 可以得到如下正面结果.

定理 6.1 ^[8] 设 $n, d \geq 1$ 为正整数. 则存在 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 上的闭开子等价关系 F_d^n 使得每个 F_d^n 等价类都形如 $R \cdot x$, 其中 R 是 $\mathbb{Z}^n$ 中的 n 维长方体, 满足 R 的每条边长恰为 d 或 $d+1$.

对这个定理作一些偏离我们讨论主线的说明. 由一个简单的遍历论证可以看出, 定理 6.1 中的边长不能取成常数, 在这个意义下定理 6.1 是最优的. 当 $n=2$ 时, 可以将定理 6.1 看成是一个关于连续平铺的定理, 即用以下尺寸的整点格可以完整地连续平铺 $F(2^{\mathbb{Z}^2})$:

$$d \times d, \quad d \times (d+1), \quad (d+1) \times d, \quad (d+1) \times (d+1).$$

用一个超非周期论证可以得到, 在上述 4 个图形中, 如果去掉 $d \times d$ 图形或去掉 $(d+1) \times (d+1)$ 图形, 则定理 6.1 的结论不再成立 (参见文献 [10, 定理 3.1.9]). 但如果保留 $d \times d$ 和 $(d+1) \times (d+1)$ 图形, 去掉另外两个图形中至少一个, 定理 6.1 的结论是否成立? 这个有趣的组合问题还未解决.

回到关于标记区域分解的讨论, 我们将在 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 上希望得到的连贯标记结构抽象为以下概念. 设 R_n 为一列 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 上的部分子等价关系, 即 R_n 的定义域 $\text{dom}(R_n)$ 为 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 的子集. 若每个 R_n 为有穷等价关系, 且满足

- (1) $\bigcup_n \text{dom}(R_n) = F(2^{\mathbb{Z}^n})$;
- (2) 对于任意 $n < m$, 若 C 为 R_n -等价类, C' 为 R_m -等价类, 且 $C \cap C' \neq \emptyset$, 则 $C \subseteq C'$;
- (3) 对于任意 n 及 R_n -等价类 C , 都存在 $m > n$ 及 R_m -等价类 C' 使得 $C \subseteq C' \setminus \partial C'$, 其中, $\partial C' = \{x \in C' : \rho(x, F(2^{\mathbb{Z}^n}) \setminus C') = 1\}$ 是 C' 的边界, ρ 是 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 上的 Schreier 图中的最短路径距离, 则称 R_n 为吐司 (toast).

若上面的条件 (3) 替换为以下更强的条件:

- (3') 对于任意 n 及 R_n -等价类 C , 都存在 R_{n+1} -等价类 C' 使得 $C \subseteq C' \setminus \partial C'$,
- 则称 R_n 为层状吐司 (layered toast).

设 R_n 为 (层状) 吐司, 若每个 R_n 是 Borel 等价关系, 则称它为 Borel (层状) 吐司; 若对于任意 $g \in \mathbb{Z}^n$, 集合 $\{x \in F(2^{\mathbb{Z}^n}) : (x, g \cdot x) \in R_n\}$ 是 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 中的闭开集, 则称它为连续 (层状) 吐司. 从一个吐司结构可以推导出所考虑的轨道等价关系超有穷. 然而, 有以下负面结果.

定理 6.2 (参见文献 [10, 定理 1.3.2]) 对于任意 $n \geq 1$, 不存在 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 上的连续吐司.

定理 6.3 ^[9] 对于任意 $n \geq 1$, 不存在 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 上的 Borel 层状吐司.

最后, 得到以下定理.

定理 6.4 ^[11] 对于任意 $n \geq 1$, 存在 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 上的 Borel 吐司.

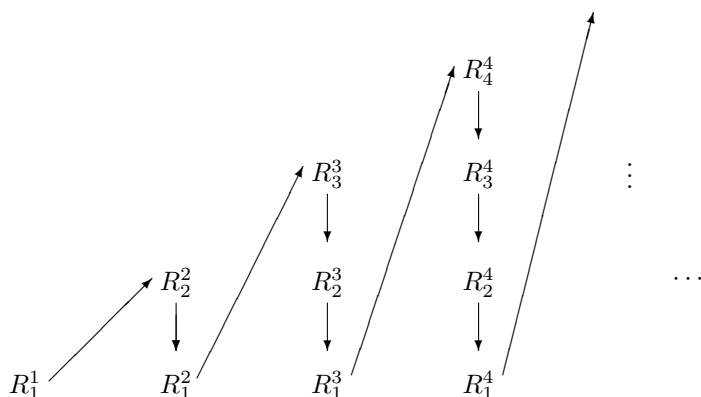
以下的结果对任意一个 Borel 吐司中标记区域的形状和尺寸等几何特征都提出了要求.

定理 6.5 ^[9] 在 $F(2^{\mathbb{Z}^2})$ 上不存在 Borel 有穷部分子等价关系 R_n 满足以下所有条件:

- (i) (规则形状) 对于任意 n , 每个 R_n -等价类形如 $R \cdot x$, 其中 R 是 $\mathbb{Z}^2$ 中的长方形;
- (ii) (尺寸上界) 对于任意 n , 所有 R_n -等价类的边长都有上界 $w(n)$;
- (iii) (尺寸下界) 对于任意 n , 设 $v(n)$ 是所有 R_n -等价类的最小边长, 则 $\lim_n v(n) = +\infty$;
- (iv) (边界消失) 对于任意 $x \in F(2^{\mathbb{Z}^2})$, 都有 $\lim_n \rho(x, \partial R_n) = +\infty$, 其中

$$\partial R_n = \bigcup \{\partial C : C \text{ 是 } R_n \text{ 等价类}\}.$$

这个定理可以推广到其他规则形状的标记区域, 如边数有界的直角多边形等. 这个定理暗示 Borel 吐司中的标记区域必有某种类似分形的性质.

图 1 R_k^m 的递归构造

为做出定理 6.4 中的 Borel 吐司, 从定理 6.1 开始, 定义一系列具有双指标的闭开标记分解 R_k^m ($k \leq m$). 对每个 m 选取一个标记尺度 d_m 使得 d_m 远大于 d_{m-1} . 我们的 R_m^m 来自定理 6.1, d_m 对应定理 6.1 中的 d . 采用图 1 所示的顺序递归地定义 R_k^m ($k < m$).

假设 R_1^{m-1} 已经定义好, 下面要定义 R_m^m . 这时对 R_m^m 的标记区域的边界面进行修正, 使得每一个尺度约为 d_m 的边界面被一些连续的尺度约为 d_{m-1} 的直边界面所取代. 对这些尺度约为 d_{m-1} 的直边界面中的每一个 M , 要求任何 R_{m-1}^{m-1} 中出现的与 M 平行的边界面都要与 M 有一个足够大的距离. 这个条件称为正交条件. 一般地, R_k^m 的标记区域的边界面是对 R_{k+1}^m 区域的边界面进行类似修正的结果, 它们的尺度约为 d_k , 并且它们满足与所有 R_k^ℓ ($k \leq \ell \leq m-1$) 之间的正交条件. 这样, 一个一般的 R_1^m 的标记区域就有分形的特征, 并且所有 R_1^m 的边界面都彼此正交. 称这个构造的结果为正交标记分解 (orthogonal marker decomposition). 注意到这时得到的所有 R_k^m 仍是闭开的.

最后, 对每个 k , 定义 R_k 为所有 R_1^m ($m \geq k$) 的最粗共同细化, 即 R_k 所对应的等价关系为所有 R_1^m ($m \geq k$) 所对应的等价关系的交. 这样的一系列 R_k 是 Borel 吐司.

虽然 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 上 Borel 吐司的存在性只推导出 $\mathbb{Z}^n$ 的自由作用产生超有穷轨道等价关系 (早在 20 世纪 80 年代 Weiss 已经证明了这个结果), 但上述构造的一个变体可以推导出 $\mathbb{Z}^{<\omega}$ (有可数无穷多个生成元的自由交换群) 的任意自由作用产生超有穷轨道等价关系, 因而克服了研究一般可数交换群作用的情形中最本质的困难. 对于这个超有穷性证明的其他细节的讨论详见文献 [8].

7 Borel 组合性质

本节对于所有已知的 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 的 Borel 组合性质进行总结, 在下两节中聚焦连续组合性质, 因此本节中不涉及连续组合性质. 首先是 Borel 染色数的计算.

定理 7.1 ^[11] 对于任意 $n \geq 1$ 都有 $\chi_B(F(2^{\mathbb{Z}^n})) = 3$.

由简单的遍历论证知 $\chi_B(F(2^{\mathbb{Z}^n})) > 2$. 为构造 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$ ($n > 1$) 上的 Borel 适当 3-染色, 需要构造比 Borel 吐司强一些的结构. 特别地, 得到以下的定理.

定理 7.2 ^[11] 对于任意 $n \geq 1$, 存在 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 上的 Borel 吐司使得每个标记区域都是连通的并且 (在适当的意义下) 拓扑同胚于 n 维方体. 进一步地, 对于任意正整数 d 都存在这样的 Borel 吐司使得所有标记区域的 d -内部所组成的标记区域仍然拓扑同胚于 n 维方体, 并且它们的全体仍然是 Borel

吐司.

以定理 7.2 为基础, 可以构造具有更规则的几何性质的 Borel 吐司, 从而证明以下结果.

定理 7.3 ^[11] 对于任意 $n > 1$, 都存在 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 上的 Borel 完全匹配.

在图论中, 一个图 $G = (V, R)$ 的完全匹配 (perfect matching) 是指一个函数 $p: V \rightarrow V$ 使得 $p^2(x) = x$ 及 $R(x, p(x))$ 对于任意 $x \in V$ 成立. 由一个遍历论证知 $F(2^{\mathbb{Z}})$ 上不存在 Borel 完全匹配.

定理 7.4 ^[11] $F(2^{\mathbb{Z}^2})$ 上存在 Borel 线化图.

这个结果与定理 4.2 形成对比, 特别是定理 4.2(4) 断言不存在 $F(2^{\mathbb{Z}^2})$ 上的闭开线化图.

最近, Chandgotia 和 Unger ^[2] 用不同的方法将这一结果推广到所有的 $n \geq 2$.

定理 7.5 ^[2] 对于任意 $n \geq 2$ 都存在 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 上的 Borel 线化图.

用力迫论证还可以知道对 $F(2^{\mathbb{Z}^2})$ 的某种染色不存在.

定理 7.6 ^[9] 设 $k \geq 2$. 不存在 $F(2^{\mathbb{Z}^2})$ 上的 Borel 适当 k -染色满足对于任意 $x \in F(2^{\mathbb{Z}^2})$ 都存在 $\mathbb{Z}^2$ 中任意大的正方形 R 使得该染色在 $R \cdot x$ 上只使用两种颜色.

本节最后考虑边染色数. 若图 $G = (V, R)$ 的两条边有且仅有一个共同顶点, 则称它们相邻 (incident). $G = (V, R)$ 的适当边染色 (proper edge coloring) 是指从 R 到某个集合 C 的函数 $c: R \rightarrow C$ 使得若 $e, f \in R$ 为相邻的两条边, 则 $c(e) \neq c(f)$. G 的边染色数 (edge chromatic number) 定义为

$$\chi'(G) = \{|C|: \text{存在适当边染色 } c: R \rightarrow C\}.$$

类似地可以定义 Borel 边染色数 $\chi'_B(G)$ 以及连续边染色数 $\chi'_c(G)$.

经典的 Vizing 定理提出, 若一个图的最大度为有限整数 d , 则 $\chi'(G) \leq d + 1$. 然而容易验证

$$\chi'(\mathbb{Z}^n) = \chi'(F(2^{\mathbb{Z}^n})) = 2n.$$

也容易验证 $\chi'_B(F(2^{\mathbb{Z}})) = \chi'_c(F(2^{\mathbb{Z}})) = 3$. Chandgotia 和 Unger ^[2]、Weilacher ^[25]、Grebík 和 Rozhón ^[14] 以及 Bencs 等 ^[1] 分别独立研究了 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 的 Borel 边染色数, 得到了以下结果.

定理 7.7 (参见文献 [2, 14, 25], 对 $n = 2$ 的情形参见文献 [1]) 对于任意 $n \geq 2$, 都有

$$\chi'_B(F(2^{\mathbb{Z}^n})) = 2n.$$

Weilacher ^[25] 还研究了一般生成集的情形.

定理 7.8 ^[25] 设 $\Gamma = \mathbb{Z}^n \times \Delta$, 其中 Δ 为有限交换群. 设 S 为不包含 e_Γ 的有限对称生成集, 即 $S^{-1} = S$. 设 X 为 Bernoulli 推移作用 $\Gamma \curvearrowright 2^\Gamma$ 的自由部分. 设 $G = G(X, \Gamma, S)$ 为 X 上的 Schreier 图. 则以下结论成立:

- (1) 若 $n = 0$ 则 $\chi'(G) = \chi'_B(G) = |S|$ 当且仅当 $|\Delta|$ 是偶数 (否则 $\chi'(G) = \chi'_B(G) = |S| + 1$);
- (2) 若 $n = 1$ 则 $\chi'(G) = |S|$, 且 $\chi'_B(G) = |S|$ 当且仅当 $|\Delta|$ 是偶数 (否则 $\chi'_B(G) = |S| + 1$);
- (3) 若 $n \geq 2$ 则 $\chi'(G) = \chi'_B(G) = |S|$.

8 连续组合性质

在本节和下一节中总结 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 的连续组合性质.

定理 8.1 (参见文献 [10, 推论 1.5.2]) 对于任意 $n \geq 2$ 都有 $\chi_c(F(2^{\mathbb{Z}^n})) = 4$.

对比定理 7.1, 这是首例连续染色数与 Borel 染色数不同的情形. 另外, 这个定理的结论也与 $\chi_c(F(2^{\mathbb{Z}})) = 3$ 形成反差. 这里的连续适当 4-染色已于文献 [8] 中通过正交标记分解构造出来. 证明没有连续适当 3-染色是一个超非周期论证.

定理 8.2 (参见文献 [10, 定理 3.1.3]) 对于任意 $n \geq 1$ 都不存在连续完全匹配.

这也与定理 7.3 形成反差.

定理 8.3 (参见文献 [10, 定理 3.1.4]) 对于 $n = 2$, 有 $\chi'_c(F(2^{\mathbb{Z}^2})) = 5$.

对比定理 7.7, 这也是首例连续边染色数与 Borel 边染色数不同的情形. 容易得到 $\chi'_c(F(2^{\mathbb{Z}})) = 3$. 作为定理 8.2 的推论, 对于任意 $n \geq 1$, 有 $\chi'_c(F(2^{\mathbb{Z}^n})) > 2n$. 因此猜想对 $n \geq 3$ 都有 $\chi'_c(F(2^{\mathbb{Z}^n})) = 2n+1$.

Marks^[19] 曾用决定性方法证明了如下定理.

定理 8.4^[19] 设 $\Gamma = \mathbb{F}_2$ 是两个生成元的自由群, S 为 Γ 的标准生成集, X 是 Bernoulli 推移作用 $\Gamma \curvearrowright \mathbb{N}^\Gamma$ 的自由部分, $G = G(X, \Gamma, S)$ 是 X 上的 Schreier 图. 对于任意 Borel 函数 $f: X \rightarrow \{\text{黑}, \text{白}\}$ 都存在一个无穷连通子集 A 使得 $f(A)$ 为单点集.

在 $F(2^{\mathbb{Z}^2})$ 中有非常不同的结论.

定理 8.5 (参见文献 [10, 定理 3.1.6]) 存在一个连续函数 $f: F(2^{\mathbb{Z}^2}) \rightarrow \{\text{黑}, \text{白}\}$ 使得 $f^{-1}(\{\text{黑}\})$ 和 $f^{-1}(\{\text{白}\})$ 的每个连通分支都有至多 3 个点.

9 十二瓦片定理与图同态问题

本节继续介绍连续组合的其他结果. 本节所有的结果都来自文献 [10], 因此不再一一标注.

事实上, 上一节中多个结果都是一个关于连续组合的元定理的推论, 这个元定理称为十二瓦片定理. 为陈述这个定理, 需要一些定义. 设 $S = \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$ 为 $\mathbb{Z}^2$ 上的标准对称生成集. 一个 $\mathbb{Z}^2$ -图是一个有序对 (G, γ) , 其中, $G = (V, R)$ 是图, $\gamma: R \rightarrow S$ 满足对 G 中任意相邻的顶点 $x, y \in V$ (即若 $R(x, y)$ 成立) 都有 $\gamma(x, y) = -\gamma(y, x)$. 给定 $\mathbb{Z}^2$ -图 (G_1, γ_1) 和 (G_2, γ_2) , 从 (G_1, γ_1) 到 (G_2, γ_2) 的 $\mathbb{Z}^2$ -同态是 G_1 到 G_2 的图同态 h , 满足对于任意 G_1 中相邻的顶点 x 和 y 都有 $\gamma(h(x), h(y)) = \gamma(x, y)$. 当 $\mathbb{Z}^2$ -图 (G, γ) 中的 γ 部分不言自明时, 简称 G 为 $\mathbb{Z}^2$ -图. 例如, 设 $G(\mathbb{Z}^2)$ 为 $\mathbb{Z}^2$ 上的标准 Cayley 图, 则 $G(\mathbb{Z}^2)$ 就是一个 $\mathbb{Z}^2$ -图. 定义整点格图 (grid graph) 为同构于 $G(\mathbb{Z}^2)$ 在某个形如 $\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$ ($m, n > 0$) 的集合上的限制的 $\mathbb{Z}^2$ -图, 这时称它为一个 $m \times n$ 整点格图.

下面给出十二个瓦片的定义. 给定正整数 n, p 和 q , 假设 $n < p, q$, 考虑以下 5 个整点格图:

$$\begin{aligned} \times : & \quad n \times n \\ a : & \quad n \times (p-n) \\ b : & \quad n \times (q-n) \\ c : & \quad (p-n) \times n \\ d : & \quad (q-n) \times n. \end{aligned}$$

为了容易辨识, 给它们分别赋予标签 $\times, a, b, c$ 和 d . 以下用图 2 来定义十二个瓦片, 每一个瓦片都是部分带标签的整点格图.

例如, 左上角第一个瓦片的尺寸为 $(p+n) \times (p+n)$, 它有 9 个组成部分: 它的四角上是标签为 $\times$ 的 $n \times n$ 整点格图, 左右边缘是标签为 a 的 $n \times (p-n)$ 整点格图, 上下边缘是标签为 c 的 $(p-n) \times n$ 整点格图, 中间的 $(p-n) \times (p-n)$ 整点格图没有标签. 又如, 右下角最后一个瓦片的尺寸为 $(p+n) \times (pq+n)$,

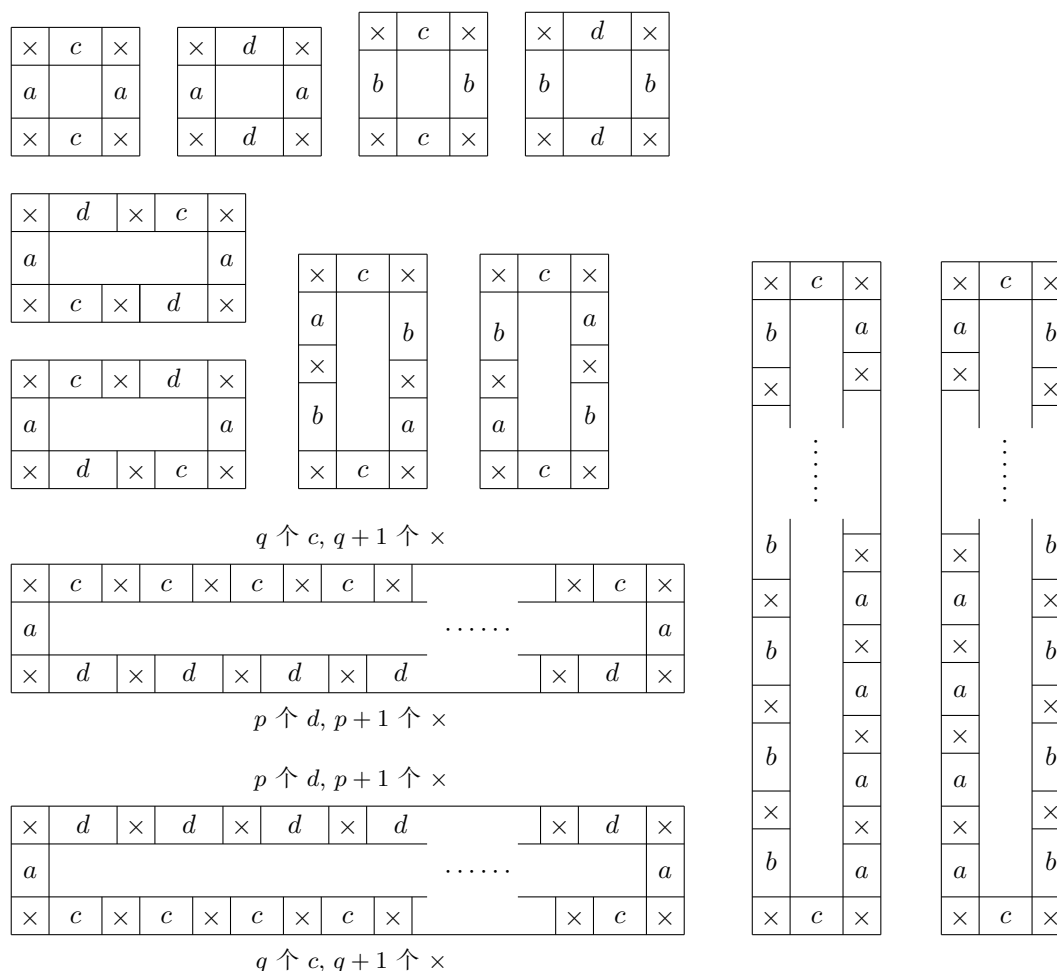


图 2 十二瓦片图

它由 $2p + 2q + 5$ 个部分组成; 左边缘上有 q 个标签为 a 的整点格图以及 $q + 1$ 个标签为 $\times$ 的整点格图, 右边缘上有 p 个标签为 b 的整点格图以及 $p + 1$ 个标签为 $\times$ 的整点格图, 等等. 之所以称它们为瓦片是因为在我们的证明中要用这些整点格图 (无旋转地) 平铺成 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, 并且相邻的整点格图之间标签相同的部分要重叠.

记 $\Gamma_{n,p,q}$ 为所有十二个瓦片组成的 $\mathbb{Z}^2$ - 图, 标签相同的所有部分看成一个子图, 即 $\Gamma_{n,p,q}$ 中恰有一个标签分别为 $\times$ 、 a 、 b 、 c 和 d 的子图.

十二瓦片定理的主要研究对象是 $\mathbb{Z}^2$ 上有限类型的子推移. 设 $k \geq 1$ 为正整数. 一个 $\mathbb{Z}^2$ 上的 k -图案 (k -pattern) 是从某个整点格图 G 到 $\{1, \dots, k\}$ 的函数 p ; 若 G 是 $m \times n$ 整点格图, 则 p 的定义域为 $\text{dom}(p) = \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$. 设 p 是 k -图案, $x \in k^{\mathbb{Z}^2}$. 若存在 $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ 使得对于任意 $(i, j) \in \text{dom}(p)$ 都有 $x(u + i, v + j) = p(i, j)$, 则称 x 包含 p . 一个 $k^{\mathbb{Z}^2}$ 的有限类型的子推移 (subshift of finite type) 是动力系统 (X, σ) , 满足存在有限多个 k -图案 $p_1, \dots, p_N$, 使得

$$X = \{x \in k^{\mathbb{Z}^2} : x \text{ 不包含 } p_1, \dots, p_N\},$$

其中 σ 是 $\mathbb{Z}^2$ 在 $k^{\mathbb{Z}^2}$ 上的 Bernoulli 推移作用在 X 上的限制. 若上述 p_i 的定义域为 $m_i \times n_i$ 整点格

图, 则称 $\max\{m_i, n_i: 1 \leq i \leq N\}$ 为 X 的宽度. 最后, 若 $f: \Gamma_{n,p,q} \rightarrow \{1, \dots, k\}$, X 如上定义且对于每个 $1 \leq i \leq N$ 及任意从 $\text{dom}(p_i)$ 到 $\Gamma_{n,p,q}$ 的 $\mathbb{Z}^2$ -同态 φ , 都有 $f \circ \varphi: \text{dom}(p_i) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ 不等于 p_i , 则称 f 尊重 (respect) (X, σ) .

定理 9.1 (十二瓦片定理) 设 $k \geq 1$ 是正整数, (X, σ) 是 $k^{\mathbb{Z}^2}$ 上的有限类型子推移. 则以下结论等价:

- (1) 存在一个从 $F(2^{\mathbb{Z}^2})$ 到 X 的连续等变映射, 即连续映射 $f: F(2^{\mathbb{Z}^2}) \rightarrow X$ 使得对于任意 $x \in F(2^{\mathbb{Z}^2})$ 及 $g \in \mathbb{Z}^2$ 都有 $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$;
- (2) 存在正整数 n, p 和 q 满足 $n < p, q, \gcd(p, q) = 1$ 及 n 不小于 X 的宽度, 以及尊重 (X, σ) 的函数 $f: \Gamma_{n,p,q} \rightarrow \{1, \dots, k\}$;
- (3) 对所有不小于 X 的宽度的 n 以及所有足够大的 p 和 q , 都存在尊重 (X, σ) 的函数 $f: \Gamma_{n,p,q} \rightarrow \{1, \dots, k\}$.

上一节中考虑的 $F(2^{\mathbb{Z}^2})$ 上的顶点染色问题、边染色问题和完全匹配问题等组合问题都可以看成从 $F(2^{\mathbb{Z}^2})$ 到某个有限类型的子推移的连续等变映射问题. 因此, 十二瓦片定理将它们统统转化成关于 $\Gamma_{n,p,q}$ 的染色问题. 对于确定的 n, p 和 q , 该问题是有穷的, 因此理论上可以穷尽搜索答案.

尽管十二瓦片定理的陈述是关于 $\mathbb{Z}^2$ -图及 $\mathbb{Z}^2$ -同态的, 但是它仍可以应用于下面关于无向图同态问题的研究.

问题 9.1 (图同态问题) 对哪些有穷图 Γ 存在从 $F(2^{\mathbb{Z}^2})$ 上的 Schreier 图到 Γ 的连续图同态?

十二瓦片定理有以下推论.

推论 9.1 设 Γ 为有穷图. 则以下结论等价:

- (1) 存在从 $F(2^{\mathbb{Z}^2})$ 到 Γ 的连续图同态;
- (2) 存在从 $F(2^{\mathbb{Z}^2})$ 到 Γ 的某一连通分支的连续图同态;
- (3) 存在 n, p 和 q 满足 $n < p, q$ 和 $\gcd(p, q) = 1$ 以及从 $\Gamma_{n,p,q}$ 到 Γ 的图同态;
- (4) 对于所有 $n \geq 1$ 及足够大的 p 和 q 都存在从 $\Gamma_{n,p,q}$ 到 Γ 的图同态.

对所有有穷图进行编码, 可以得到一个自然数集 A 对应于对图同态问题有正面回答的有穷图的全体. 由推论 9.1 容易得到 A 是一个递归可枚举集, 或称半可计算集, 用描述集合论的符号也可称为 Σ_1^0 集. 一个自然数集是 Σ_1^0 集当且仅当它是某个部分可计算函数的定义域, 可计算性理论中的一个熟知结果断言存在 Σ_1^0 集 (如著名的图灵停机问题) 在所有 Σ_1^0 集中在一归约的意义下有最大的复杂度, 这样的集合称为 Σ_1^0 完全集 (自然数上可计算性理论的基本定义和结果参见文献 [24]). 可以证明上面的集合 A 有这样的复杂度.

定理 9.2 所有正面回答图同态问题的有穷图全体构成一个 Σ_1^0 完全集.

理论上推论 9.1 对图同态问题给出了完全答案, 但在实际应用中很难判断是否对给定的 n, p 和 q 存在从 $\Gamma_{n,p,q}$ 到给定图的图同态, 因此我们仍希望找到判断图同态问题对给定图是否成立的充分或必要条件.

在以下的讨论中假设 Γ 是连通图. 从推论 9.1(2) 知这样假设不失一般性. 用 $\pi_1(\Gamma)$ 表示 Γ 的基本群 (第一同伦群), 设 N 为 Γ 中所有 4-圈 (长度为 4 的闭路径) 生成的正规子群. 称 $\pi_1(\Gamma)/N$ 为 Γ 的约化同伦群 (reduced homotopy group), 并记为 $\pi_1^*(\Gamma)$. 对于 Γ 中任意圈 α , 都可以计算它作为 $\pi_1^*(\Gamma)$ 中的元素所在的等价类, 记为 $\pi_1^*(\alpha)$. 对于任意满足 $n < p, q$ 及 $\gcd(p, q) = 1$ 的 n, p 和 q , 都有 $\pi_1^*(\Gamma_{n,p,q}) = \mathbb{Z}^2$.

下面的定理给出图同态问题的基于同伦的充分条件和必要条件.

定理 9.3 设 Γ 为连通图. 假设 Γ 中有长度为奇数的圈 α 使得 $\pi_1^*(\alpha)$ 在 $\pi_1^*(\Gamma)$ 中的阶有限. 则存在从 $F(2^{\mathbb{Z}^2})$ 到 Γ 的连续图同态.

定理 9.4 设 Γ 为连通图. 假设对所有正整数 n 都存在互素的 $p, q > n$ 使得对每个 Γ 中的 p -圈 α , $\pi_1^*(\alpha^q)$ 在 $\pi_1^*(\Gamma)$ 中不为 p 次幂. 则不存在从 $F(2^{\mathbb{Z}^2})$ 到 Γ 的连续同态.

进一步具体化定理 9.4 中的同伦条件, 可以考虑以下概念. 一个图 $\Gamma = (V, R)$ 上的权重函数是 $w: R \rightarrow \mathbb{Z}$, 满足对所有 Γ 中相邻的顶点 $x, y \in V$ (即满足 $R(x, y)$) 都有 $w(x, y) = -w(y, x)$. 若 w 是 Γ 上的权重函数, $\alpha = (v_0, \dots, v_n)$ 是 Γ 中的路径, 则可以扩展 w 的定义为

$$w(\alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} w(v_i, v_{i+1}).$$

定理 9.5 设 Γ 为连通图. 假设对无穷多个正整数 p 及每个 p -圈 α 都存在 Γ 上的权重函数 w 使得 $w(\sigma) = 0$ 对于所有 4-圈 σ 成立, 但 $w(\alpha)$ 不能被 p 整除. 则不存在从 $F(2^{\mathbb{Z}^2})$ 到 Γ 的连续同态.

最后, 也有以下的简单判断条件.

定理 9.6 若连通图 Γ 满足以下条件之一, 则不存在从 $F(2^{\mathbb{Z}^2})$ 到 Γ 的连续同态:

- (i) Γ 可以适当 3-染色;
- (ii) Γ 不包含非平凡的 4-圈.

10 展望

本文介绍了一些可数交换群作用的描述组合结果以及主要证明方法. 仍有大量未解决的有趣问题留待研究者们深入探讨. 这里陈述一些问题.

首先, 有关所研究的最简单的 Schreier 图, 即 $F(2^{\mathbb{Z}^2})$ 上的 Schreier 图, 仍然留有一些未解决的问题.

问题 10.1 (Borel 图同态问题) 对哪些有穷图 Γ 存在从 $F(2^{\mathbb{Z}^2})$ 上的 Schreier 图到 Γ 的 Borel 图同态?

设 $T_1, \dots, T_N$ 为 $\mathbb{Z}^2$ 的有限子集, 并记 $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_N\}$. 一个 $F(2^{\mathbb{Z}^2})$ 的连续 (Borel) $\mathcal{T}$ -平铺是 $F(2^{\mathbb{Z}^2})$ 的一个闭开 (Borel) 有穷子等价关系 P , 满足对于每个 P -等价类 C , 都存在 $R \in \mathcal{T}$ 使得 $C = R \cdot x$.

问题 10.2 (平铺问题) 对哪些 $\mathbb{Z}^2$ 的有限子集的有限集 $\mathcal{T}$ 存在 $F(2^{\mathbb{Z}^2})$ 的连续 (Borel) $\mathcal{T}$ -平铺?

我们可以将 $\mathcal{T}$ 用一个自然数编码, 从而得到一个自然数集对应上述连续平铺问题的正面回答. 由十二瓦片定理知, 这个集合也是 Σ_1^0 集. 我们不知道这个集合是否是 Σ_1^0 完全的.

前面综述中很多结果都是针对 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$ ($n = 2$) 的情形, 如十二瓦片定理本身就只是针对二维的情形. 如何将这结果推广到高维的情形仍然没有彻底解决. 这里特别提一下连续边染色数的问题.

问题 10.3 (连续边染色数问题) $F(2^{\mathbb{Z}^n})$ ($n > 2$) 的连续边染色数是多少?

我们猜测答案是 $2n + 1$.

另外, 同样是考虑 $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ 在 $F(2^{\mathbb{Z}^n})$ 上的作用, 当生成集 S 为任意不包含单位元的对称集时, 所得到的 Schreier 图的组合性质还没有得到深入研究. 到目前为止, 只有 Weilacher^[25] 计算了这种一般条件下的 Borel 边染色数, 其他如染色数、完全匹配和线化图等问题还有待研究.

进一步地, 对有限生成的自由交换群之外的可数群作用的组合性质研究, 我们的结果十分有限. Marks^[19] 用决定性方法研究了有限生成自由群作用的一些染色性质, 得到了出色的结果. 但是, 非交

换自由群的 Bernoulli 推移所对应的轨道等价关系必定不是超有穷的, 因此也预期它们的组合性质和顺从群作用的组合性质会有很大的不同. 因此, 可数群作用的描述组合学仍是大有可为的.

我们探讨描述组合学的初衷是发展一些细化的方法来应对超有穷性问题. 既然这一问题还未解决, 也还有类似单增并问题等其他重要而有趣的问题需要研究. 我们预期还会不断出现新方法来解决相关问题, 而这些新方法也有望对描述组合问题提供新思路.

总之, 描述组合理论仍然是一个十分年轻而充满活力的新方向. 我们不能确定我们已经找到了所有解决问题的基本工具和关键引理, 因此仍有必要对一般的 Borel 局部有限图的基本性质继续研究. 十分期待中国数学家在这一新方向上作出成绩.

致谢 作者衷心感谢美国 University of North Texas 大学 Steve Jackson 教授、南开大学丁龙云教授、肖鸣博士及杨博能同学在本文成稿过程中予以的帮助, 同时也感谢审稿人提出的宝贵意见和建议.

参考文献

- 1 Bencs F, Hrušková A, Tóth L M. Factor-of-iid Schreier decorations of lattices in Euclidean spaces. arXiv:2101.12577, 2021
- 2 Chandgotia N, Unger S. Borel factors and embeddings of systems in subshifts. Israel J Math, 2024, in press
- 3 Conley C T, Jackson S, Marks A S, et al. Borel asymptotic dimension and hyperfinite equivalence relations. Duke Math J, 2023, 172: 3175–3226
- 4 Connes A, Feldman J, Weiss B. An amenable equivalence relation is generated by a single transformation. Ergodic Theory Dynam Systems, 1981, 1: 431–450
- 5 Dougherty R, Jackson S, Kechris A S. The structure of hyperfinite Borel equivalence relations. Trans Amer Math Soc, 1994, 341: 193–225
- 6 Feldman J, Moore C C. Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras. I. Trans Amer Math Soc, 1977, 234: 289–324
- 7 Gao S. Invariant Descriptive Set Theory. Baton Rouge: CRC Press, 2009
- 8 Gao S, Jackson S. Countable abelian group actions and hyperfinite equivalence relations. Invent Math, 2015, 201: 309–383
- 9 Gao S, Jackson S, Krohne E, et al. Forcing constructions and countable Borel equivalence relations. J Symb Log, 2022, 87: 873–893
- 10 Gao S, Jackson S, Krohne E, et al. Continuous Combinatorics of Abelian Group Actions. Memoirs of the American Mathematical Society. Providence: Amer Math Soc, 2024, in press
- 11 Gao S, Jackson S, Krohne E, et al. Borel combinatorics of abelian group actions. arXiv:2401.13866, 2024
- 12 Gao S, Jackson S, Seward B. A coloring property for countable groups. Math Proc Cambridge Philos Soc, 2009, 147: 579–592
- 13 Gao S, Jackson S, Seward B. Group Colorings and Bernoulli Subflows. Memoirs of the American Mathematical Society, vol. 1141. Providence: Amer Math Soc, 2016
- 14 Grebík J, Rozhoň V. Local problems on grids from the perspective of distributed algorithms, finitary factors, and descriptive combinatorics. Adv Math, 2023, 431: 109241
- 15 Harrington L A, Kechris A S, Louveau A. A Glimm-Effros dichotomy for Borel equivalence relations. J Amer Math Soc, 1990, 3: 903–928
- 16 Jackson S, Kechris A S, Louveau A. Countable Borel equivalence relations. J Math Log, 2002, 2: 1–80
- 17 Kechris A S. Classical Descriptive Set Theory. New York: Springer-Verlag, 1995
- 18 Kechris A S, Solecki S, Todorcevic S. Borel chromatic numbers. Adv Math, 1999, 141: 1–44
- 19 Marks A. A determinacy approach to Borel combinatorics. J Amer Math Soc, 2016, 29: 579–600
- 20 Martin D A. Borel determinacy. Ann of Math (2), 1975, 102: 363–371
- 21 Schneider S, Seward B. Locally nilpotent groups and hyperfinite equivalence relations. Math Res Lett, 2024, in press
- 22 Silver J H. Counting the number of equivalence classes of Borel and coanalytic equivalence relations. Ann Math Logic, 1980, 18: 1–28
- 23 Slaman T, Steel J. Definable functions on degrees. In: Cabal Seminar. Berlin: Springer, 1988, 37–55
- 24 Soare R I. Recursively Enumerable Sets and Degrees. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1987
- 25 Weilacher F. Borel edge colorings for finite dimensional groups. Israel J Math, 2024, in press

- 26 Weiss B. Measurable dynamics. In: Conference in Modern Analysis and Probability. Providence: Amer Math Soc, 1984, 395–421

Descriptive combinatorics of countable abelian group actions

Su Gao

Abstract In this paper, we describe the connection between the hyperfiniteness problem in descriptive set theory and descriptive combinatorics and survey the results obtained using descriptive set theoretic methods on combinatorial properties of the Schreier graphs generated by countable abelian group actions. The properties considered in the survey include not only graph theoretic characteristics such as Borel or continuous chromatic numbers, edge chromatic numbers, and perfect matchings but also dynamic properties of Borel marker sets under Borel actions. We also summarize the methods used in our proofs, which are relevant to different branches of mathematics including topology, ergodic theory, geometric group theory, and forcing.

Keywords descriptive set theory, Borel reducible, hyperfinite, chromatic number, perfect matching, marker structure, hyperaperiodic, orbit forcing

MSC(2020) 03E15, 05C15, 37B99

doi: 10.1360/SSM-2023-0112