

关于具有质量的杨-米尔斯方程

胡 和 生

(复旦大学数学研究所)

一、引 言

关于四维时空中杨-米尔斯方程是否存在具有有限能量又无奇点,且场强在无限远处为0的静态解,是规范场研究中大家关心的一个问题^[1]. 到1976年,Deser^[2]得出:除 $n=5$ 外, n 维时空(指度规为 $ds^2 = -dx^0 + dx^1 + dx^2 + \cdots + dx^{n-1}$)中紧致群规范场方程不存在具有有限能量又无奇点,且场强在无穷远处适当地趋于0的静态解. 这里,特别令人注意的是四维时空中紧致群规范场不存在满足要求的静态解. 另一方面,由于近年来人们对四维欧氏空间规范场的自对偶解(瞬子解)给予极大的注意,而这些瞬子解都可以看作是五维时空中的静态解,所以 $n=5$ 这个例外情形就显得更为重要^[3,4].

在过去的规范场理论体系中,规范势所表示的矢量粒子无质量,但物理中往往需要有质量的规范粒子(如传播弱相互作用的中间玻色子),为使规范粒子获得质量,物理学家通常是从规范场体系之外加进其它粒子(如 Higgs 粒子)^[5]. 最近谷超豪对规范场的概念作了一些分析,把规范场的拉氏密度作了适当的增补,得出规范不变的拉氏密度函数,并且能够从此导出质量项^[6]. 这样,就从理论上证明了在规范场体系之内,规范粒子是可以有质量的.

本文研究这种具有质量的杨-米尔斯方程的静态解问题,我们仍然考虑无外源的情形. 我们发现,与无质量的规范场时不同,实质量的紧致群的杨-米尔斯方程在 $n \neq 4$ 时都不存在无奇点、有限能量、强度及势在 ∞ 处适当地趋于0的静态解,因此,只有 $n=4$ 时有待继续研究. 我们也举例说明在 $n > 2$ 时虚质量的杨-米尔斯方程存在满足无限远边界条件 $r \rightarrow \infty$ 时规范势 $\rightarrow 0$ 场强 $\rightarrow 0$ 的正则解(即无奇点的解).

二、场方程和能量动量张量

在谷超豪的一文中已经证明, r 参数紧致群 G 的规范场 $\mathcal{S}$ 可以有如下的规范不变的拉氏密度函数,

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{4} G_{ab} f_{\lambda\mu}^a f^{b\lambda\mu} + \frac{m^2}{2} G_{ab} (b^a - \omega_a^a)(b^{b\lambda} - \omega^{b\lambda}) \\ &= \frac{1}{4} (f_{\lambda\mu}^a, f^{a\lambda\mu}) + \frac{m^2}{2} (b_a - \omega_a, b^{\lambda} - \omega^{\lambda}) \\ &(\lambda, \mu = 0, 1, \cdots, n-1; \quad a, b = 1, 2, \cdots, r),\end{aligned}\tag{1}$$

式中 $b_\lambda = b_\lambda^a X_a$ 表示规范势(X_a 是 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 的一组基), $f_{\lambda\mu} = f_{\lambda\mu}^a X_a$ 表示场强, $G_{ab} = (X_a,$

本文1979年1月9日收到.

1) 见谷超豪的《关于规范粒子的质量》一文.

X_b), 这里(,)表示 g 的伴随不变内积, m 为代表质量的偶合常数, ω_μ^a 由

$$U^{-1}(\partial_\mu U) = \omega_\mu^a X_a \quad (2)$$

定义, $U = U(x)$ 为规范势的“参考截面”.

$$f^{\lambda\mu} = \eta^{\lambda\alpha} \eta^{\mu\beta} f_{\alpha\beta}, \quad (3)$$

$$\eta^{\lambda\mu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{L}$ 关于 U 及 b 作变分, 可以得出场方程和规范条件, 如果就利用这个 U 作规范变换

$$b'_\lambda = (adU)b_\lambda - (\partial_\lambda U)U^{-1}, \quad (4)$$

又再把 b'_λ 重记为 b_λ , 那末 $\mathcal{L}$ 化为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} (f_{\lambda\mu}, f^{\lambda\mu}) + \frac{m^2}{2} (b_\lambda, b^\lambda), \quad (5)$$

场方程可以直接从这个 $\mathcal{L}$ 出发关于 b 变分得出:

$$J_\alpha - m^2 b_\alpha = 0, \quad (6)$$

这里

$$J_\alpha = \eta^{\lambda\mu} f_{\alpha\lambda|\mu} = \eta^{\lambda\mu} (f_{\alpha\lambda, \mu} + [b_\mu, f_{\alpha\lambda}]), \quad (7)$$

这时 b_α 自然地满足 Lorentz 规范条件¹⁾

$$\eta^{\lambda\mu} \frac{\partial b_\lambda}{\partial x^\mu} = 0 \quad (8)$$

这样做, 在经典理论范围之内是完全严格的.

由于能量动量张量与规范无关, 因而在这一特殊规范下仍然可采取普通的方法进行推导^[6], 我们得出其具体表达式为

$$T_{\alpha\beta} = (f_{\alpha\nu}, f_\beta^\nu) - \frac{1}{4} \eta_{\alpha\beta} (f_{\mu\nu}, f^{\mu\nu}) + m^2 (b_\alpha, b_\beta) - \frac{m^2}{2} \eta_{\alpha\beta} (b_\lambda, b^\lambda). \quad (9)$$

由于 Noether 定理, 成立守恒定律

$$\frac{\partial T_\alpha^\beta}{\partial x^\alpha} = 0. \quad (10)$$

由 $T_{\alpha\beta}$ 的 (9) 式即得

$$T_\alpha^\alpha = \eta^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} (4-n) (f_{\lambda\mu}, f^{\lambda\mu}) - \frac{m^2}{2} (n-2) (b_\lambda, b^\lambda), \quad (11)$$

$$T_0^0 = \eta^{0\beta} T_{\beta 0} = -T_{00} = \frac{1}{2} [(f_{0i}, f^{0i}) - \frac{1}{2} (f_{ij}, f^{ij})] - m^2 (b_0, b_0) - \frac{m^2}{2} (b_\lambda, b^\lambda), \quad (12)$$

$$T_i^i = -\frac{1}{2} (n-3) (f_{0i}, f^{0i}) + \frac{1}{4} (5-n) (f_{ij}, f^{ij})$$

$$+ \frac{m^2}{2} (3-n) (b_\lambda, b^\lambda) + m^2 (b_0, b_0). \quad (13)$$

1) 谷超豪一文已证明, 这样做法和原来的 $\mathcal{L}$ 出发所得场方程一致.

三、 $m^2 > 0$ 时静态解的讨论

这里的静态解是指 b_λ 和 x_0 无关的解。现设 $m^2 > 0$ ，我们要求的是 $r = \sqrt{(x^1)^2 + \cdots + (x^{n-1})^2} \rightarrow 0$ 时， $b_\lambda^a, f_{\lambda\mu}^a \rightarrow 0$ 适当快的静态解。

先注意到，由于 b_λ^a 和 x^0 无关，就有

$$(b_0, J_0) = (b_0, f_{0i}) = \partial_i(b_0, f_{0i}) - (f_{0i}, f_{0i}). \quad (14)$$

因此

$$0 = \int (b_0, J_0 - m^2 b_0) d^{n-1}x = - \int [(f_{0i}, f_{0i}) + m^2(b_0, b_0)] d^{n-1}x \quad (15)$$

这里积分是沿 $x^0 = \text{const.}$ 所作。由 $m^2 > 0$ 得出

$$f_{0i} = 0, \quad b_0 = 0. \quad (16)$$

由此就得出

$$T_{i0} = 0, \quad \frac{\partial T_{ij}}{\partial x^j} = 0 \quad (17)$$

因而积分

$$\int T^i d^{n-1}x = \int \partial_i(x^i T^i) d^{n-1}x, \quad (18)$$

利用 $r \rightarrow \infty$ 处的条件，可知此积分为 0。利用 (13)，(16) 式得

$$\int \left[\frac{1}{4} (5-n)(f_{ij}, f^{ij}) + \frac{m^2}{2} (3-n)(b_i, b^i) \right] d^{n-1}x = 0. \quad (19)$$

由此可见

1) $n = 3$ 时， $f_{ij} = 0$ ，连同 $f_{0i} = 0$ 得出规范场强度 $f_{\lambda\mu} = 0$ ，由场方程就有 $b_\lambda = 0$ ，所以只是平凡解。

2) $n = 5$ 时，有 $b_0 = b_i = 0$ ，所以也只是平凡解。

3) $n > 5$ 或 $n < 3$ 时，仍然只有平凡解。

因此得到

定理 除 $n = 4$ 外， n 维时空中具有实质量的紧致群规范场不存在具有有限能量、无奇点且场强及势在无限远处适当地趋近于 0 的静态解。

剩下来是 $n = 4$ 的情形，此时是否有满足这些条件的静态解的问题尚未解决，这样的解的存在估计还是有可能的。

与四维欧氏空间的瞬子解相比较，从上述定理我们得到

推论 四维欧氏空间中实质量的杨-米尔斯场没有具有有限能量又无奇点且在无限远处强度与势趋于 0 相当快的无源解。

注 1 由定理的证明可见，如果 $r \rightarrow \infty$ 时

$$f_{\lambda\mu} = O(r^{-\frac{n+1}{2}-\epsilon}), \quad b_\lambda = O(r^{-\frac{n+1}{2}-\epsilon}) \quad (\epsilon > 0, \text{任意小}),$$

那末能量有限及 $r \rightarrow \infty$ 时强度及势适当地趋于 0，这两项条件就得到了保证，而

$$f_{\lambda\mu} = O(r^{-\frac{n-1}{2}-\epsilon}), \quad b_\lambda = O(r^{-\frac{n-1}{2}-\epsilon}),$$

只能保证能量为有限。

注 2 显然，四维欧氏空间的自对偶和反自对偶场都是没有质量的。

四、 $m^2 < 0$ 时静态解的讨论

对于虚质量时与前节的情况不同, 我们可以证明在 $n > 2$ 时, 场方程有满足条件 $r \rightarrow \infty$ 时 $b_\lambda \rightarrow 0$, $f_{\lambda\mu} \rightarrow 0$ 且无奇点的静态解。为此记 $m^2 = -\lambda^2 < 0$, λ 为实, 我们先置

$$b'_\lambda = 0 (a \neq 1), \quad b'_t = 0, \quad (20)$$

这时

$$f'_{0i} = -f'_{i0} = \frac{\partial b'_0}{\partial x^i}, \quad (21)$$

其余 $f_{\lambda\mu}$ 均为 0, 代入无源方程 (6), 只留下一个方程

$$\Delta b'_0 + \lambda^2 b'_0 = 0. \quad (22)$$

设 b'_0 只依赖于 $r = \sqrt{(x^1)^2 + \cdots + (x^{n-1})^2}$, 置 $b'_0 = u$, $R = \lambda r$, 那末 $u(R)$ 满足

$$R \frac{d^2 u}{dR^2} + (n-2) \frac{du}{dR} + Ru = 0. \quad (23)$$

令

$$u = R^{-p} v \quad \left(p = \frac{n-3}{2} \geq 0 \right), \quad (24)$$

那末 v 就满足 p 阶的 Bessel 方程

$$v'' + \frac{v'}{R} + \left(1 - \frac{p^2}{R^2} \right) v = 0. \quad (25)$$

利用此方程的性质可见, 在 origin 和在 ∞ 处均正则的解

$$b'_0(r) = Cr^{-p} J_p(\lambda r). \quad (26)$$

因此, 对任何 $n > 2$, 具虚质量的杨-米尔斯方程必有 $r \rightarrow \infty$ 时 $b_\lambda \rightarrow 0$, $f_{\lambda\mu} \rightarrow 0$ 的正则解。特别, 在 $n = 4$ 时此解即为

$$b'_0(r) = C \frac{\sin \lambda r}{r}.$$

致谢: 作者在此对苏步青教授的鼓励与帮助, 表示感谢。

参 考 文 献

- [1] Wu, T. T. & Yang, C. N., in *Properties of Matter under Unusual Conditions*, 1968, 349.
- [2] Deser, S., *Ref. TH. 2314 CERN*, 1976.
- [3] Belavin, A., Polyakov, A., Schwarz, A. & Tyupkin, X., *Phys. Lett.*, **59B**(1975), 85.
- [4] Jackiw, R., Nohl, C. & Rebbi, C., *Phys. Rev.*, **D15**(1977), 1642.
- [5] 't Hooft, G., *Nucl. Phys.*, **B79**(1974), 276.
- [6] Л. Д. 朗道, E. M. 栗弗席兹, 场论 (中译本), 1959.