

用圆锥曲线求解几何约束问题

高小山 蒋 鲲

(中国科学院系统所, 北京 100080)

摘 要 几何约束求解广泛应用于机械设计, 化学分子形成, 几何定理证明和勘探等诸多领域. 用于求解几何约束问题主要有 3 种方法: 数值方法, 符号方法和构造法. 构造法由于具有简单易行的特点, 因此被大多数的参数化机械设计系统作为求解几何约束问题的基本方法. 针对构造法中只采用直线和圆, 即直尺和圆规, 来作为基本的作图工具, 引进了一种新的作图工具: 圆锥曲线, 并且证明了在引进圆锥曲线以后, 作图的范围明显大于只用直尺和圆规作图的范围; 证明了一个图形能用圆锥曲线作出的充分必要条件是这个图形可以用一个三角化的次数小于等于 4 的方程组来描述. 由于三次和四次方程的解可以显式地表示出来, 所以引进圆锥曲线作为一个新的作图工具仍然可以保持原来尺规作图的简洁性和完整性.

关键词 几何约束问题 圆锥曲线 智能 CAD 全局延拓

中图法分类号: TP391.72 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-8961(2001)06-0563-05

Geometric Constraint Solving with Conics

GAO Xiao-shan, JIANG Kun

(Institute of Systems Science, Academia Sinica, Beijing 100080)

Abstract Geometric constraint solving has applications in a wide variety of fields, such as mechanical engineering, chemical molecular conformation, geometric theorem proving, and surveying. There are mainly three approaches to geometric constraint solving: numerical approach, symbolic approach and constructive approach. Since the constructive approach are simple and practicable, most parametric design take the constructive approach as the basic approach. In the light of the shortage of using only line and circle (rule and compass) as basic drawing tools in constructive approach, in this paper, we introduce a class of new drawing tools: conics. We prove that the class of diagrams within the drawing scope of this new tool is larger than that can be drawn with line and circle. Actually, we prove that a diagram can be drawn with conics if and only if this diagram can be described with a sequence of triangulated equations of degree less than or equal to four. This allows us to maintain the elegance of geometric constraint solving with ruler and compass, because the solutions of cubic and quartic equations can be written explicitly with radicals.

Keywords Geometric constraint solving, Conics, Intelligent CAD, Global propagation

0 引 言

现行的 CAD(Computer Aided Design) 系统对于生成工程图和三维实体模型是十分有效的, 但是在产品的生产阶段, 为了满足产品的最终要求而经常要做一些小的改动, 此时传统的 CAD 系统就不再适合于

概念化的设计方式了, 因此为了适应这种概念化的设计方式, 研究人员开发了参数化的设计系统. 这种参数化的设计系统可以让设计者在无需事先知道确切设计参数的情况下, 来修改设计图形^[1~3].

几何约束求解(GCS)是当今正在发展的智能参数化 CAD 系统的核心问题^[4~8], 用于求解几何约束问题主要有 3 种方法, 即数值方法, 符号方法和构

造法。其中,数值方法是首先将几何约束问题转化成一个代数方程组,然后用数值的方法来求解这个方程组,但它需要一个好的初值;符号方法与数值方法不同的是用符号计算的方法来求解方程组;而构造法则是先将几何约束问题转化成一个容易构造的形式^[2,5,7,8]。如果几何约束问题可以转化成容易构造的形式,那么几何约束问题的所有解都可以简洁有效地计算出来,因此大多数的参数设计系统都采用构造法来作为求解几何约束问题的基本方案,只是当构造法不能求解的时候,才用其他的方法来求解。构造法主要是将几何约束问题转化成一个尺规可构造的形式,即只用直尺和圆规就可构造的图形。本文引进了一种新的且强有力的工具——圆锥曲线。实践证明,利用圆锥曲线可以扩大几何约束问题的可解范围,即用这个新工具不仅可求解尺规可构造的图形,而且还可求解一些尺规不可构造的图形。

1 用二次曲线求解几何约束问题

如果一个几何图形中的点可用下面的3个基本构造,按照一定的次序($P_1, P_2, \dots, P_m$)构造出来,则称这个几何图形可用直尺、圆规和圆锥曲线这3种工具或其轨迹来构造。3个基本构造是:

(1)POINT(P): 在平面上任意取一个点 P 。

(2)ON(P, O): 在一个轨迹 O 上取一个半自由点 P 。

(3)INTER(P, O_1, O_2): 取两个轨迹 O_1 和 O_2 的交点 P 。

在基本构造中, O, O_1 和 O_2 是直线,圆或者圆锥曲线。因为这3种轨迹可以表示为点的函数,所以可以利用这3种基本的构造得到另外一些常用的构造。例如:

LINE(P, Q)是构造一条通过点 P 和 Q 的直线;

PCICLE(O, P)是构造一个以点 O 为圆心且通过点 P 的圆;

RHYPERBOLA(P, Q, d)是构造满足条件 $||RP| - |RQ|| = d$, 由点 R 所形成的双曲线靠近点 Q 的那个分支;

LHYPERBOLA(P, Q, d)是构造满足条件 $||RP| - |RQ|| = d$, 由点 R 所形成的双曲线的靠近点 P 的那个分支。

引入圆锥曲线作为一个新的作图工具后,即可引进3个新的约束:

(1)SUM(A, B, C, s) 即距离 $|AB|$ 和 $|AC|$ 的和是一个固定的值,其中 A, B, C 是3个点。

(2)DIF(A, B, C, d) 即距离 $|AB|$ 和 $|AC|$ 的差是一个固定的值,其中 A, B, C 是3个点。

(3)EQU(A, P, L) 即点 A 到点 P 的距离等于点 A 到直线 L 的距离。

如果假设 B 和 C 是固定点,则满足上面3个约束的点 A 的轨迹分别是椭圆、双曲线和抛物线。利用这3个新的约束就可以用构造法来找到几何约束问题的构造序列。下面的算法是全局延拓法^[5]的一个扩展,以用于处理圆锥曲线问题。

此算法以几何约束问题作为输入,来输出这个几何约束问题的构造序列。具体步骤如下:

(1)对于一个几何约束问题 $\{[Q_1, \dots, Q_m], [P_1, \dots, P_n], [C_1, \dots, C_m]\}$, 令 $CT = [C_1, \dots, C_m]$ 代表约束集, $CS = \emptyset$ 代表构造序列集, $QS = [Q_1, \dots, Q_m]$ 代表给定构造顺序的点的集合; $PS = [P_1, \dots, P_n]$ 代表其余点的集合。同时假设几何约束问题不是过约束问题即 $|CT| \leq 2 \times |PS| - 3$ 。

(2)先对集合 QS 重复执行步骤3~步骤4,然后再对集合 PS 重复执行步骤3~步骤4,直到 QS 和 PS 两个集合变为空集。

(3)从集合 QS 或 PS 中取出一个点 P 。对于集合 CT 中,包含点 P 的约束 T , 决定点 P 的满足约束 T 轨迹 L_c , 假定集合 CS 中的点都是已经构造的,最后得到一个三元数集: $\{(P, T_1, L_{c_1}), \dots, (P, T_s, L_{c_s})\}$ 。下面分3种情况考虑:①如果 $CS = \emptyset$, 且点 P 是一个任意选取的点,则在集合 CS 中加入一个新的构造 POINT(P);②如果存在 $i \neq j$ 使得 $T_i \neq T_j$, 并且 L_{c_i} 和 L_{c_j} 不是两条平行的直线或者不是两个同心圆,或者不是两个没有交点的圆锥曲线,则在集合 CS 中加入一个新的构造 INTER(P, L_{c_i}, L_{c_j}), 并将 T_i 和 T_j 从集合 CT 中去掉;③如果点 P 是一个可以在一条直线(或者一个圆或者一条圆锥曲线)上移动的半自由点,则在集合 CS 中加入一个新的构造 ON(P, L_{c_i}), 并将 T_i 从集合 CT 中去掉。

(4)检查一下剩下的问题是否是过约束的,即是否 $|CT| > 2 \times |PS|$; 如果是,则构造序列是非法的,如果 P 是集合 QS 中的点,则由用户给定的构造顺序是不可能实现的,算法终止,否则退回,从 CT 中去掉约束,并对集合 PS 中的另外一个点重新重复上面的步骤;如果不是,则点 P 是可以构造的。对于一个新点重复上面的步骤。

上述算法的关键是步骤 3 中的如何由约束 T 决定轨迹 Lc . 文献[5]中讨论了轨迹是直线和圆的情形. 圆锥曲线主要由 SUM, DIF, EQU 3 个约束生成, 而其他情形则主要是由圆的相切产生. 下面以 Apollonius 作图问题为例对这种圆锥曲线的产生过程给予介绍总结.

Apollonius 作图问题是: 确定同时满足 3 个约束条件 $(C_i, C_j, C_k), (1 \leq i, j, k \leq 3)$ 的圆. 其中, C_1 表示此圆通过一个给定的点; C_2 表示此圆与一条给定的直线相切; C_3 表示此圆与一个给定的圆相切.

根据这 3 个约束条件的不同组合, 总共有 10 个作图问题. 这 10 个问题都可以采用全局延拓法, 只用直尺和圆规作出[5], 但是在作图的过程中要加入许多的辅助点, 也可以用 Gröbner 基的方法通过符号计算来解决[6]. 利用圆锥曲线给出的解比只用直尺和圆规给出的解要简短得多. 大家知道, 为了作一个圆必须要知道圆心和半径. 对于这个问题, 如果知道了圆心, 则半径很容易得到, 因此圆心的确定是关键. 如果一个圆满足 3 个约束条件 (C_i, C_j, C_k) , 则当只考虑其中两个约束时, 它的圆心将形成一条轨迹, 因此圆心可以通过求其中的两条轨迹的交点而得到. 由 3 个约束条件中的两个所决定的点的轨迹总共有如下 6 种情况: 即 $(C_1, C_1), (C_1, C_2), (C_1, C_3), (C_2, C_2), (C_2, C_3), (C_3, C_3)$, 其中

(C_1, C_1) : 圆心的轨迹是两个给定点所连成线段的垂直平分线.

(C_1, C_2) : 由于从圆心到给定点的距离等于从圆心到给定直线的距离, 因此圆心的轨迹是一条以给定点为焦点, 以给定的直线为准线的抛物线.

(C_1, C_3) : 当给定点在给定的圆外面时, 由于从圆心到给定点的距离与圆心到给定圆圆心的距离差的绝对值是一个固定的值, 因此圆心的轨迹是一个双曲线; 当给定点在给定圆内部时, 由于从圆心到给定点的距离与圆心到给定圆圆心的距离和是一个固定的值, 因此圆心的轨迹是一个椭圆; 当给定点在给定圆上时, 圆心的轨迹是一条通过给定点与给定圆圆心的直线. 请参看图 1 (图中粗线圆 O 和点 P 是给定的, 虚线圆是要作的圆, 细线轨迹是要作的圆的圆心轨迹).

(C_2, C_2) : 如果两条给定的直线平行, 则圆心的轨迹是一条与两条给定的直线平行且等距的直线, 否则是由两条给定直线所形成角的平分线.

(C_2, C_3) : 当给定直线与给定圆和未知圆都相切,

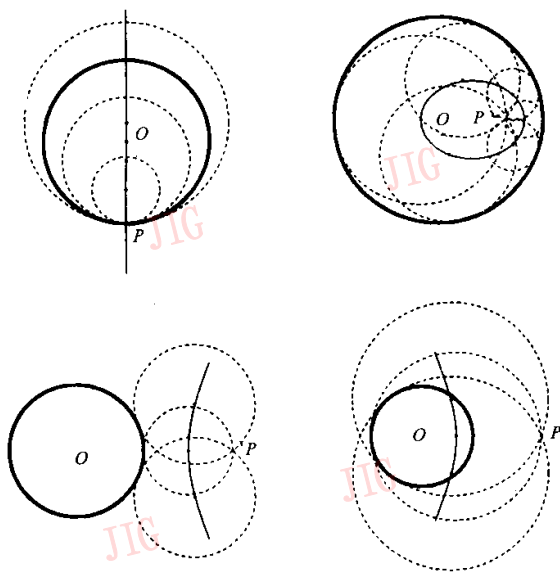


图 1 (C_1, C_3) 的情形

且都切于同一个点时, 其圆心的轨迹是一条通过给定圆圆心, 且垂直于给定直线的直线. 除此之外, 圆心的轨迹还可以是一个以给定圆圆心为焦点, 以与给定的直线有固定距离的一条直线为准线的抛物线.

(C_3, C_3) : 当两个给定圆相切时, 其圆心的轨迹或者是一条通过两个给定圆圆心的直线, 或者是一条抛物线; 当两个给定圆内切时, 其圆心的轨迹是以两个给定圆圆心为焦点的椭圆; 当两个给定的圆相交, 并且未知圆与一个给定圆内切而与另一个给定圆外切时, 其圆心的轨迹是一条以两个给定圆圆心为焦点的椭圆. 除此之外, 圆心的轨迹还可以是一条以两个给定圆圆心为焦点的双曲线.

例 1 Apollonius 作图问题 (C_1, C_3, C_3) (图 2).

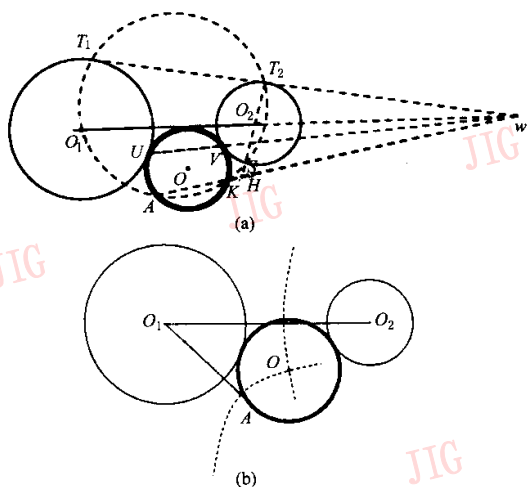


图 2 Apollonius 作图问题的两个解

根据上面的分析,圆心的轨迹是两个双曲线的交点,因此这个问题有4个解.为了与用全局延拓法给出的解做比较,这里只列出其中之一的构造序列,其余的解可以类似地得到,用上述方法,实际上只需要一个构造:

INTER(O , RHYPERBOLA(O_1, A, R_1),
RHYPERBOLA($O_1, O_2, R_1 - R_2$))

就可以找到圆心 O (图 2(b)), 而用全局延拓法却需要十几个构造 (图 2(a))^[5].

2 用二次曲线求解几何约束问题的范围

与几何图形中的点构造顺序相对应的有一个构造序列 $(CS_1, CS_2, \dots, CS_m)$, 其中, CS_i 是3个基本构造中的一个. 从代数的角度看, 由于每一个构造 CS_i 都对应一个代数方程组, 因此一个构造序列就对应一个代数方程组. 因为直线、圆和圆锥曲线都是点的函数, 所以这里只需要考虑点的构造. 如果点 P 是由构造 POINT(P) 引进的, 则点 P 是一个自由点, 没有方程产生; 如果点 P 是由构造 ON(P, O) 引进的, 则需要引进一个代数方程 $f(u, x) = 0$ 来描述点 P , 其中 u 是一个参数, x 是一个变量. 对于一个给定 u , 由方程 $f(u, x) = 0$ 可以计算出 x , 因此 $f(u, x) = 0$ 将产生无穷多个点. 另外, 构造 INTER(P, O_1, O_2) 将产生一个代数方程组:

$$f_1(x_1, x_2) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2) = 0$$

其中, $f_1(x_1, x_2) = 0$ 和 $f_2(x_1, x_2) = 0$ 分别是 O_1 和 O_2 两个轨迹的方程. 下面考虑一下由构造序列 $(CS_1, CS_2, \dots, CS_n)$ 所产生的代数方程组, 很容易看出, 通过适当地选取坐标系, 方程组可以写成如下的形式

$$\begin{cases} f_1(u_1, x_1) = 0 \\ f_2(u_2, x_2) = 0 \\ f_3(u_1, x_1, x_3, x_4) = 0 \\ f_4(u_2, x_2, x_3, x_4) = 0 \\ \vdots \\ f_l(u_1, \dots, u_q, x_1, \dots, x_p) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中, $\text{degree}(f_i) \leq 2 (1 \leq i \leq l)$.

令 FS 代表代数方程组 (1). 根据 Wu-Ritt 零点分解算法, FS 可以转化成如下三角化的代数方程组 TS :

$$\begin{cases} F_1(u_1, \dots, u_q, x_1) = 0 \\ F_2(u_1, \dots, u_q, x_1, x_2) = 0 \\ \vdots \\ F_p(u_1, \dots, u_q, x_1, \dots, x_p) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

由于变量是一个一个或者是两个两个引入的, 根据 Bezout 定理, $\text{degree}(F_i) \leq 4 (1 \leq i \leq l)$. 对于 $u_i (1 \leq i \leq q)$ 给定的一组数值, 则 $F_1(u_1, \dots, u_q, x_1) = 0$ 变成一个单变量的方程, 进而就可从这个方程中找到 x_1 的解, 其他的变量也可以用类似的方法得到.

上面证明了一个由直线、圆和圆锥曲线生成的构造序列与一个次数小于5的三角化代数方程组是对应的. 下面将证明, 每一个次数小于5的三角化代数方程组都可以用一个直线、圆和圆锥曲线生成的构造序列来产生, 因为次数小于3的方程的情况是显然的, 所以这里只考虑三次和四次方程的情况.

引理1 任意一个三次方程的根都可以用两个圆锥曲线来构造.

证明 令三次单变量的方程是

$$p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \quad (3)$$

其中, a, b, c 为数值系数. 构造两个圆锥曲线 $f_1(x, y) = 0$ 和 $f_2(x, y) = 0$, 其中,

$$f_1(x, y) = y - x^2 \quad (4)$$

$$f_2(x, y) = (x + c_1)(y + c_2) + f \quad (5)$$

将式 (4) 中的 y 代入到式 (5) 中, 得

$$\begin{aligned} f_2(x, y) &= (x + c_1)(x^2 + c_2) + f \\ &= x^3 + c_1x^2 + c_2x + f + c_1c_2 \end{aligned} \quad (6)$$

将这个三次方程系数与 $p(x)$ 进行比较, 即可得到 $a = c_1, b = c_2$ 和 $c = f + c_1c_2$. 很明显, 方程 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 的根可以由以上两个给出的圆锥曲线构造出来.

引理2 任意一个四次方程的根都可以用两个圆锥曲线构造.

引理2的证明可以类似地得到, 其中用于构造方程

$$p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (7)$$

的根的两个圆锥曲线分别是 $f_1(x, y) = x^2 + dy^2 + ax + cy + b$ 与 $f_2(x, y) = xy - 1$.

定理 一个几何图形可以由圆锥曲线来构造, 当且仅当该几何图形可以由一组三角化的次数小于、等于4的方程组来描述.

由上述定理, 可得到如下结论:

(1) 由于用尺规作图可以求解所有用次数小于

等于2的三角化方程组描述的几何图形,因此引入圆锥曲线后,作图范围比尺规作图有实质性的扩大.

(2) 由于三、四次方程的解可以用根号给出,而且引入圆锥曲线后,仍可以保持尺规作图的简洁性和完整性.

例2 (Pappus 作图问题)^[1,10] 将一个矩形放入到另外一个矩形中(如图3).

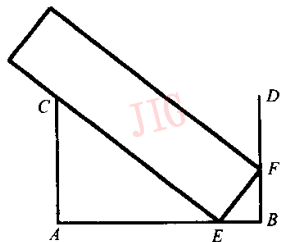


图3 Pappus 作图问题

这里只需要决定 EB 的长度. 假设 $AC = a$, $AB = b$, $EF = h$ 和 $EB = x$. 那么利用 Wu-Ritt 特征列的方法^[10], 则有

$$x^4 - 2bx^3 + (b^2 - a^2)x^2 - a^2b^2 = 0 \quad (8)$$

一般来说,除了当 a, b 和 h 取特定的值外,这个方程的根是不可用尺规作图的^[10],但根据本文提出的方法,却可以用两个圆锥曲线来构造这个方程的根.

3 结 论

通过引进圆锥曲线作为新的作图工具,扩大了利用构造方法求解几何约束问题的求解范围,即利用圆锥曲线不仅解决了所有用全局延拓法可以解决的问题^[5],而且还可以解决用全局延拓法不能解决的问题,包括一些可以用尺规作图的和一些不可以用尺规作图的几何约束问题. 从理论上讲,所有由次数小于5的多项式序列所决定的几何约束问题都可以用本文所提出的方法来解决,包括著名的用尺规不可作图的问题:如角的三等份和倍立方,不仅如此,引进圆锥曲线以后,仍然保持了只用尺规作图的完整性和简洁性.

参 考 文 献

- 1 Lee J Y, Kim K. Geometric reasoning for knowledge-based design using graph representation. *Computer-Aided Design*, 1998,28(10):831~841.
- 2 Sunde G. Specification of shape by dimension and other geometric constraints, geometric modeling for CAD application. North-Holland, 1998:199~213.
- 3 Verroust A, Schonek F, Roller D. Rule-oriented method for parameterized computer-aided design. *Computer-Aided Design*, 1992,24(10):531~540.
- 4 Brüderlin B. Constructing three-dimensional geometric objects defined by constraints. In *Workshop on Interactive 3D Graphics*, ACM,1986:111~129.
- 5 Gao X S, Chou S C. Solving geometric constraint systems I. A Global Propagation Approach, *Computer-Aided Design*, 1998, 30(1):47~54.
- 6 Hoffmann C. Geometric constraint solving in R^2 and R^3 . In: *Computing in Euclidean Geometry*, Du D. Z and Huang (eds) F, Word Scientific, 1995:266~298.
- 7 Kramer G A. Solving geometric constraints systems: A case study in kinematics, MIT Press, 1992.
- 8 Owen J. Algebraic solution for geometry from dimensional constraints. In *ACM Symp., Found of Solid Modeling*, ACM Press, Austin Tx, 1991:397~407.
- 9 Gao X S, Chou S C. Solving geometric constraint systems II. A Symbolic Approach and Decision of Re-constructibility, *Computer-Aided Design*, 1998,30(2):115~122.

高小山 1963年生,1988年获得博士学位,现任中国科学院系统所研究员,博士生导师. 主要研究方向为自动推理、符号计算、智能CAD、CAI、代数几何.

蒋 鲲 1972年生,1994年毕业于黑龙江大学,1996年在哈尔滨工业大学获得硕士学位,现为中国科学院系统所博士研究生. 主要研究方向:智能CAD、CAI.