

关于泛函分析若干问题的进展

程庆进*, 杜拴平, 刘轼波, 张 文

(厦门大学数学科学学院, 福建 厦门 361005)

摘要: 对泛函分析中的若干问题在近年来的进展作一简要介绍, 内容包括 Banach 空间中的球覆盖性质、Banach 空间的保度量(等距)映射、Banach 空间中的超弱紧集合、Banach 空间的非紧性测度、非线性泛函分析和量子信息与算子理论交叉. 主要偏重作者及其合作者在这些方面所做的一点工作.

关键词: Banach 空间理论; Banach 空间非线性几何; 非线性泛函分析; 算子理论

中图分类号: O 177.2

文献标志码: A

文章编号: 0438-0479(2023)06-0897-15

厦门大学数学科学学院前身为厦门大学算学系, 创办于 1923 年, 其泛函分析方向在国内外有着广泛的影响. 当时, 本方向的学术带头人李文清教授和张鸣镛教授, 李先生为中国第一代泛函分析学家, 张先生也是著名的泛函分析学家. 厦门大学于 1998 年获得基础数学专业博士学位授予权, 2002 年获得(一级)数学博士学位授予权, 当时的泛函分析学术带头人为程立新教授和郭铁信教授. 经过二十多年的进一步努力和发展, 厦门大学泛函分析专业取得了丰富而具有影响力的系统性研究成果. 现在的厦门大学泛函分析专业, 则是以程立新教授等人的空间理论、凸分析、非线性泛函分析和算子理论为鲜明特色. 本文就厦门大学泛函分析团队在近些年来工作进行简要介绍, 内容包括 Banach 空间理论、非线性分析理论以及算子理论在量子信息上的应用.

1 Banach 空间中的球覆盖性质

赋范空间中单位球和单位球面的几何性质以及拓扑性质在 Banach 空间几何学中占有非常重要的地位. 一部 Banach 空间几何学, 可以说就是一部与 Banach 空间单位球和单位球面有关的学科. 几乎所有的几何概念都是通过单位球来定义的, 如 Banach 空间的凸性、光滑性、自反性、RNP(Radon-Nikodým)性

质等. 不仅如此, 还有许多研究课题都是与 Banach 空间子集的球表示问题有关的, 如 Mazur 交性质、装球问题、非紧性测度和球拓扑问题等^[1-9]. 这些课题从提出开始就引起了许多数学家的关注, 经过前人孜孜不倦的努力, 这些问题的研究已经取得了许多重要的成果, 这些结果往往又对 Banach 空间几何性质的深入研究有着不可或缺的作用, 可见球族行为的魅力是让人惊叹的.

关于 Mazur 交性质, 最早是 Mazur 注意到欧几里得空间的这一性质: 每个有界闭凸集可以表示成闭球的交, 于是线性赋范空间的这种性质被命名为 Mazur 交性质(或者 MIP). 我们容易知道, 有界闭凸集 C 是闭球的交当且仅当对任意不属于 C 的 x , 存在包含 C 的闭球但不包含 x , 所以 MIP 可以看成是球分离性质, 比经典的超平面分离性要强. 在之后的关于 MIP 的研究中, 人们比较关注的问题则是 MIP 特征的刻画.

装球问题(Spherepacking)是指把不相交的相同大小的球排满整个空间. 一般来说, 这个空间指的是三维空间. 但是装球问题也可以推广到二维空间(此时“球”就是指圆)、 n 维空间(此时“球”是指超球面)及非欧氏空间如双曲空间. 经典的装球问题是寻找一种排列使得球以尽可能多的比例占据整个空间, 这个装满空间的比例称之为排列的密度. 由于排列的密度取

收稿日期: 2023-05-18 录用日期: 2023-11-08

基金项目: 国家自然科学基金(12271453, 12271452, 12071387, 12071388, 12071389)

* 通信作者: qjcheng@xmu.edu.cn

引文格式: 程庆进, 杜拴平, 刘轼波, 等. 关于泛函分析若干问题的进展[J]. 厦门大学学报(自然科学版), 2023, 62(6): 897-911.

Citation: CHENG Q J, DU S P, LIU S B, et al. Some problems and applications in functional analysis[J]. J Xiamen Univ Nat Sci, 2023, 62(6): 897-911. (in Chinese)



决于体积的大小,所以这个问题通常都是在一个充分大体积的立体内,最大化其平均或者渐近密度. 一个正规的排列是指球心都组成一个称之为格的整齐的模式. 如果球心没有排列成一个格,这种排列称之为非正规的排列. 正规排列往往比非正规排列更容易掌握,这是由于对称性使得它们易于分类和测量其密度.

1930 年, Kuratowski 首次引入了非紧性测度的概念, 并且研究了其相关性质以及拓扑结构. 1955 年, Darbo 首次利用 Kuratowski 非紧性测度给出著名的 Darbo 不动点定理. 设 (X, ρ) 为度量空间, $D(X)$ 为 X 上所有非空有界子集全体, 对于任意 $D \in D(X)$, 其 Kuratowski 非紧性测度 $\alpha(D)$ 定义为

$$\inf \{d > 0 : D \subset \bigcup_{j \in F} E_j, F \subset \mathbf{N}, F'' < \infty \text{ 且 } d(E_j) \leq d\},$$

其中 $d(E_j)$ 表示 $E_j \subset X$ 的直径, 即

$$d(E_j) = \sup \{\rho(x, y) : x, y \in E_j\}.$$

由定义可知

$$\alpha(D) \leq d(D).$$

Kuratowski 非紧性测度也称为集合非紧性测度, 用来衡量度量空间中的一个有界集与紧集之间的“距离”. 1957 年, Goldenstein 等在此基础上引入了 Hausdorff 非紧性测度, 也称为球非紧性测度, $\beta(D)$ 的球非紧性测度则定义为

$$\inf \{d > 0 : D \subset \bigcup_{j \in F} \bar{B}(x, r), F \subset \mathbf{N}, F'' < \infty\},$$

其中 $\bar{B}(x, r)$ 表示 X 中以 x 为圆心 r 为半径的闭球. 非紧性测度理论在不动点理论, 算子谱理论, 泛函分析, 常(偏)微分方程以及积分方程等领域具有广泛的应用.

泛函分析团队成员张文在 2005 年师从程立新教授读博时, 就在程老师的指导下开始了 Banach 空间中的球覆盖问题的研究. X 表示 Banach 空间, X^* 则表示 X 的对偶空间. 我们用 B_X 来表示 Banach 空间 X 中的闭单位球, S_X 则表示 Banach 空间 X 中的单位球面. $B(x, r)$ (相应地, $\bar{B}(x, r)$) 为中心在点 x , 半径为 r 的开(相应地, 闭)球. 对于 Banach 空间 X , 其单位球面 S_X 可以被 X 中一族不包含原点的开(相应地, 闭)球族 B 所覆盖. 特别当 X 为可分空间(相应地, 有限维空间)时, 球族 B 可以选取由可数多个(相应地, 有限多个)半径任意小的球所构成. 我们研究了有限维空间的球覆盖问题, 主要讨论了有关最小球覆盖的个数和半径问题, 也介绍了可分性与球覆盖性质之间的联系, 并且利用球覆盖性质所刻画的 Banach 空间几何和拓扑性质, 研究了关于球覆盖性质的稳定性有关内

容. 这个领域的相关研究结果可以参见文献[10-38].

1.1 尚待解决的主要问题

目前为止, 虽然我们已经知道 Banach 空间具有球覆盖性质当且仅当 X^* 在再赋范的意义下 ω^* -可分, 我们还不知道是否存在不可分的 Banach 空间可以在线性同胚的意义下保持球覆盖性质. 所以我们的问题分为两个部分: 一部分问题我们期待肯定解决, 而另一部分我们则倾向否定答案.

1.2 期待肯定解决的问题

我们已经知道球覆盖性质关于线性同胚不保持, 且 Banach 空间的球覆盖性质关于子空间不具有遗传保持性. 然而, 所有与之有关的反例都不是 Asplund 空间, 甚至都不是 Gateaux 可微空间. 所以我们自然有下述问题:

问题 1 除了自反空间外, 对于怎样的 Banach 空间, 其具有的球覆盖性质可以关于线性同胚保持?

问题 2 是否对于 Asplund 空间, 或者更一般的 Gâteaux 可微空间, 其具有的球覆盖性质可以关于线性同胚保持?

问题 3 对于哪一类 Banach 空间, 其具有的球覆盖性质可以关于商映射保持?

问题 4 对于怎样的 Banach 空间, 其具有的球覆盖性质可以关于闭子空间遗传?

注意到对于 Banach 空间 X , 如果我们用 (Ω, ρ) 来表示 X 上所有连续半范数 p , 并且在 X 上面赋予如下定义的度量 ρ : 对于 $p_1, p_2 \in \Omega$ 有

$$\rho(p_1, p_2) = \sup_{x \in B_X} |p_1(x) - p_2(x)|,$$

则 Ω 为完备度量空间, 并且 X^* 的 ω^* -可分性所推导出的 X 所有具有球覆盖性质的等价范数在 Ω 中稠密. 进一步:

问题 5 对于不可分的具有 ω^* -可分对偶的 Banach 空间 X , X 所有具有球覆盖性质的等价范数是否为 Ω 中稠 G_δ 子集?

1.3 倾向否定答案的问题

因为 $\ell_1^*[0, 1] = \ell_\infty[0, 1]$ 是 ω^* -可分且不具有球覆盖性质, 但 $\ell_1[0, 1]$ 又具有 RNP 性质, 所以并不是所有具有 ω^* -可分对偶, 同时满足 RNP 的 Banach 空间都可以使其具有的球覆盖性质关于线性同胚保持不变. 于是我们提出:

问题 6 若具有球覆盖性质的 Banach 空间满足其球覆盖性质关于线性同胚保持不变, 是否 X 一定可分?

最后, 值得我们关注的是, Papini^[23]研究了许多有

关单位球或单位球面的各种覆盖问题,这之中就包含了不含原点的球覆盖.文献[31]对覆盖 L_p 的球族进行了讨论,文献[30]还研究了覆盖特定 Banach 空间的球族和切片族的性质.

2 Banach 空间的保度量(等距)映射

保持度量不变的映射(简称保度量映射,也称等距映射)的研究,自 1932 年 Mazur S 和 Ulam S 开始,已经进行了 80 多年.究其经久不衰的原因,一方面是它反映某些数学,尤其是泛函分析最深刻最本质的内容之一,另一方面来源于数学包括几何学在内的其他分支以及包括物理、信息和量子信息在内的其他学科的需要.等距映射,顾名思义就最大的范围而言,必须在“度量空间”上才能进行的内容,而 Banach 空间是度量空间的一个特例.另一方面,由于每个度量空间都可以保持度量不变地嵌入到一个 Banach 空间(例如,文献[39], Lemma 1.1),因此,在 Banach 空间上研究保度量映射并不丧失一般性.我们称从一个 Banach 空间 X 到另一个 Banach 空间 Y 的一个映射 f 为一个保度量映射(或者叫等距映射)如果对所有 $x, y \in X$ 都满足

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|,$$

即任何两点的距离在这个映射下是保持的.如果 f 还满足

$$f(0) = 0,$$

即把空间的原点 0 映成原点,则称 f 是标准的.为了简洁起见,我们也称保度量映射为“等距”.

说起 Banach 空间等距映射的研究,我们自然要提及 80 年前波兰数学家 Mazur 和 Ulam 开历史研究先河的结果(Mazur-Ulam 定理^[40]):两个赋范空间之间的满等距映射都是仿射等距映射.围绕着这个定理的意义至少有如下 4 点.第一点,这个定理揭示了一个深刻的事实:欲使两个 Banach 空间之间的映射保持度量不变,首先要保持线性结构不变!第二点,等距映射研究有着深刻的理论价值和广泛的实际背景.例如, n -维欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 到其自身的标准等距映射 f 就是 $\mathbf{R}^n$ 上的正交变换,或者说 f 就是 $\mathbf{R}^n$ 上的正交矩阵;再如,“全息摄影”和“信息传输”的数学模型就是一类等距变换.第三点,以此定理为研究出发点,发展了同样具有深刻的理论意义和更广泛应用背景的研究领域,如非满等距、扰动等距(或者, ϵ -等距),扰动等距的稳定性理论以及粗等距等.第四点, Mazur-Ulam 定理的证明中“满等距把度量中点映成度量中点”这

一思想和方法对后来的等距“局部化”以及满 ϵ -等距的研究都起着重要的作用.

等距和扰动等距映射的研究,以时间为序,大致可分为等距(包括满等距和非满等距),扰动等距(包括满扰动和非满扰动等距),粗等距(包括满粗和非满粗等距)研究几个阶段.下面,我们基本按照这一领域研究的时间顺序进行介绍.由于这一领域的研究历史很长,尤其是各种局部化的推广内容也非常多,我们以“整个 Banach 空间”为定义域的等距以及扰动等距研究进展为中心,研究内容包括:等距, ϵ -等距, ϵ -等距的弱稳定性和稳定性, w^* -稳定性和万有稳定性等内容.

2.1 ϵ -等距

扰动等距,或者 ϵ -等距,是等距概念的推广,它是 Hyers 和 Ulam^[41]于 1945 年引入的;对于某个 $\epsilon \geq 0$, 一个映射 $f: X \rightarrow Y$ 被称为一个 ϵ -等距,如果它满足

$$\begin{aligned} & \|f(x) - f(y) - \|x - y\| \| \leq \epsilon, \\ & \forall x, y \in X. \end{aligned}$$

相比等距, ϵ -等距的背景更加广泛.最直观的背景就是测量:我们把测量的点放在一个 Banach 空间 X ,观测结果放在另一个 Banach 空间 Y 进行处理.要测量的两点 x, y 的实际距离为 $\|x - y\|$,而测量的距离为 $\|f(x) - f(y)\|$,测量误差 ϵ 根据测量精度和观测经验往往很容易确定.这就是一个典型的 ϵ -等距模型. Hyers 和 Ulam 还分别研究了与 ϵ -等距类似但稍有不同问题.1945 年 Hyers 和 Ulam^[41]提出了以下问题:

问题 7 是否对于每对 Banach 空间 X 和 Y 都存在一个常数 $\alpha = \alpha(X, Y) > 0$,使得对于任一标准的满 ϵ -等距 f ,都存在一个线性等距 $U: X \rightarrow Y$ 使得

$$\|f(x) - U(x)\| \leq \alpha\epsilon, \forall x \in X.$$

从此以后,在扰动等距这方面的研究便开始了.经过一些泛函分析学家们的努力,在 1983 年, Gevirtz^[42]终于给出了这个问题的完全肯定的答案.一般而言,这儿满射的条件是不能够去掉的.对于非满 ϵ -等距的研究,主要针对的是稳定性.从 Banach 空间 X 到 Y 之间的一个标准的 ϵ -等距 f 称为是稳定的,如果存在一个有界线性算子 T 从像空间 $f(X)$ 的闭线性空间到 X 以及正数 β 使得不等式

$$\|Tf(x) - x\| \leq \beta\epsilon$$

在 X 上总成立.从稳定性的定义不难看出,它的出发点是研究广义的 Figiel 定理,标准的 ϵ -等距 f 是稳定的,等价的说法就是它有一个连续线性的“伪”左逆. Qian^[43]率先研究了一般标准的 ϵ -等距的稳定性,他连

同 Šemrl 和 Väisälä^[44] 证明了 L_p 空间的稳定性. 但 Qian^[43] 的反例表明在一般 Banach 空间, 哪怕是 $f = I + \varepsilon g (g: X \rightarrow B_X)$ 这样简单的映射, 也极有可能是稳定的. 因此是否可以建立一个有普遍适用性的“弱稳定”性概念及其在此框架下带来更普遍的稳定性结果成为重要的问题. 2013 年, Cheng 等^[45] 率先研究了此类问题, 并得到了如下的弱稳定性估计式.

定理 1^[45] 设 $f: X \rightarrow Y$ 是一个标准的 ε -等距, $\forall x^* \in X^*$, 存在 $\varphi \in X^*$ 满足 $\|\varphi\| = r = \|x^*\|$, 使得

$$|\langle x^*, x \rangle - \langle \varepsilon, f(x) \rangle| \leq k r \varepsilon, \forall x \in X,$$

其中 $k=4$.

上面弱稳定性估计式的证明不同于前人的做法, 详见文献[45]. 近年来, 这个弱稳定性估计式在 ε -等距理论和应用中起着核心、不可替代的作用, 例如当 $\varepsilon=0$ 时, 它就是 Figiel 定理; 当 $\varepsilon=0$ 且映射为满射时, 它就是 Mazur-Ulam 定理, 再如 Qian-Šemrl-Väisälä^[43-44] 的结果也是这个弱稳定性估计式的一个直接推论. 在光滑空间、自反空间等上的稳定性估计及其各种版本的稳定性估计可参见文献[45-56]. 特别的, Cheng 等^[53] 于 2019 年引入并率先研究了非满粗等距及其稳定性问题.

2.2 几点注记

无论是在理论上或者是在应用上, 以等距为轴衍生出一系列的研究领域已经形成一个庞大的体系. 下面就前面没有提到的几个重要的方面, 作几点脚注.

2.3 各种同胚问题

从 Banach 空间的等距到 Banach 空间的同胚, 是一种推广. 从数学直观上讲, 这是一个从“几何”视角转向“拓扑”视角. 因此, 在这里不得不谈一下 Banach 空间的同胚问题. “等距”和“同胚”, 或者“等价”以及相关内容的理论研究, 一直以来就是泛函分析及其相关领域数学家们所高度关注的课题, 在内容上构成了经典泛函分析的理论、方法和应用中最重要、最深刻的组成部分之一.

定义 1 定义设 X, Y 为 Banach 空间.

(i) 称 X 与 Y 线性同胚, 如果存在连续的线性满射 $f: X \rightarrow Y$ 使得 $f^{-1}: Y \rightarrow X$ 也连续;

(ii) 称 X 与 Y Lipschitz 同胚, 如果存在连续的 Lipschitz 满射 $f: X \rightarrow Y$ 使得 $f^{-1}: Y \rightarrow X$ 也是 Lipschitz 的;

(iii) 称 X 与 Y 一致(连续)同胚, 如果存在一致连续的满射 $f: X \rightarrow Y$ 使得 $f^{-1}: Y \rightarrow X$ 也是一致连续的;

(iv) 称 X 与 Y 连续同胚, 如果存在连续的满射 $f: X \rightarrow Y$ 使得 $f^{-1}: Y \rightarrow X$ 也是连续的.

Banach-Mazur 定理告诉我们每个可分 Banach 空间(度量空间)都是 $C[0, 1]$ 的一个线性子空间(子集); Dvoretzky 定理^[57-64] 告诉我们每个无限维 Banach 空间都包含任意有限维的 Euclid 空间. Kadec 定理^[65] 告诉我们任何两个可分无限维 Banach 空间都拓扑同胚. 因此, 它也宣布了 Banach 空间的一般意义下的连续同胚研究的终结. Aharoni 定理^[66-67] 告诉我们每个可分度量空间都是 c_0 的 Lipschitz 同胚意义下的一个子集. Aronszajn-Christensen-Mankiewicz-Phelps 定理^[68-70] 告诉我们, 如果 Banach 空间 Y 具有 RNP 性质, 则每个从可分 Banach 空间 X 到 Y 的 Lipschitz 映射都在 X 的一个稠密子集的每一点处 Gâteaux 可微. 而 Johnson-Lindenstrauss^[71] 定理却出人意料地成为了计算理论的最基本定理之一.

粗几何是“非交换几何”和“非交换群论”领域于 20 世纪 90 年代以来发展起来的重要研究方向. 20 世纪 90 年代中期, 人们逐渐发现用以通过几何空间(如非紧完备黎曼流形、有限生成群等)的大尺度几何结构探索指标代数(即 Roe 代数)的 K-理论群的信息, 从而建立几何空间的几何、拓扑与分析之间的联系, 并应用于解决其他重要问题, 如 Novikov 猜测、Gromov-Lawson-Rosenberg 正标量曲率猜测、群 C^* -代数幕等元问题的粗几何, 尤指粗 Baum-Connes 猜想和粗 Novikov 猜想, 与“粗嵌入”到一个 Hilbert 空间或者超自反空间密切相关, 这实质是“嵌入”研究领域的目前国际同行高度关注的一个崭新课程^[72-77].

定义 2 定义设 X, Y 为 Banach 空间. 称 X 与 Y 粗同胚, 如果存在满射 $f: X \rightarrow Y$ 以及两个非负函数 $\rho_1, \rho_2: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ 满足 $\rho_j(t) \rightarrow +\infty (t \rightarrow +\infty)$ 使得

$$\rho_1(\|y - x\|) \leq \|f(y) - f(x)\| \leq \rho_2(\|y - x\|), \forall x, y \in X.$$

2.4 球面等距延拓

1987 年, Tingley^[78] 提出了如下问题: 如果两个 Banach 空间 X, Y 的单位球面 S_X, S_Y 之间存在一个等距满射, 这个映射是否可以延拓成从 X 到 Y 的等距映射? 经定光桂教授和他的研究生们几十年的潜心研究, 几乎对所有的经典 Banach 空间, 这个问题的答案都是肯定的^[79]. 目前这个问题已经发展为国际同行所关注的一个问题, 同时, 一大批研究成果陆续发表出来, 参见文献[80-81].

但我们仍然不知道下面的答案如何.

问题 8 问题设 X, Y 均为二维赋范空间. 如果存

在等距映射 $f: S_X \rightarrow S_Y$, 那么是否有(满)等距映射 $f: X \rightarrow Y$ 使得 $\bar{f}|_{S_X} = f$?

这个问题实质上是低维度量决定高维度量的问题. 这里还应该提到一个有趣的故事: 马玉梅首先在数学期刊 *Geom Dedicata* 发现了 Tingley 提出的这个问题(当时她正在南开大学跟着导师定光桂教授攻读博士学位), 非常感兴趣, 证明了在严格凸空间和 l 上, 这个问题的答案都是肯定的^[82]. 这一问题同时引起了导师定教授的关注, 于是, 这个问题的研究便得以展开.

3 Banach 空间中的超弱紧集合

无穷维 Banach 空间几何自泛函分析诞生就受到数学家们的高度关注, 它构成了泛函分析中最本质最深刻的组成部分. 众所周知, 紧集是泛函分析中最重要的基本概念之一. 特别地, 如果一个 Banach 空间的闭单位球是紧集(即每个序列都有一个收敛子列)的充分必要条件是这个线性空间为有限维. 但对于一般无穷维 Banach 空间而言, Mazur 结果告诉我们这个集类是非常小的, 它的紧集只能“几乎”包含在有限维子空间之中. 因此其应用也受到了极大地限制. 此时, 人们往往考虑用较弱的紧性概念“弱紧性”来代替紧性. 由此不仅可保证一大类 Banach 空间-自反空间的每个有界集是相对弱紧的(即每个序列都有一个在弱拓扑意义下的收敛子列), 同时这一概念也可以适用于一般的(无穷维)Banach 空间. 这样, 弱紧集这一概念可以理解为自反空间概念的局部化. 现在 Banach 空间中的弱紧集理论已经形成了一套相对完善的理论体系并在数学各分支中具有及其重要的应用^[83-84].

超自反空间是自反空间中最重要的一类空间, 其概念是由 James^[85]在 1972 年引入: 一个 Banach 空间 E 为超自反的, 如果每个在 E 中有限表示的空间是自反的. 此概念一经引入, 这类空间的研究便备受关注. James^[85]、Enflo^[86]、Pisier^[87]等著名泛函分析学家对这类空间的研究发现, 这类空间具有良好的拓扑性质以及在重赋范的意义下具有几乎可以和 Hilbert 空间媲美的几何性质. 同时, 这类空间并不“小众”! 例如, 这类空间包括了最经典而常用的 Banach 空间 l_p , L_p 以及 20 世纪末以后才兴起研究的非交换的 Banach 空间 Schatten- ℓ_p 和 $L_p(M)$ ^[88-94] ($1 < p < \infty$).

现在经过近 50 年的研究, 超自反空间理论已经形成了较为完善的理论体系, 并有着广泛的应用. 然而, 一个自然的问题是怎样把超自反空间这一概念局

部化? 这一方面出于理论体系的完善性需要—正像弱紧集概念是自反空间的局部化; 另一方面, 在实际应用上人们往往不需要对整个空间超自反性的假设, 而仅仅需要其局部化的行为, 例如 Kirk^[95]不动点定理表明具有正规结构的弱紧凸集便可保证其上的非扩张映射的不动点成立. 但令人遗憾的是, 30 多年以来这一个局部化概念并未被提出. 究其原因, 可能的困难点在于如何在一般集合上将空间超自反概念中用到的“有限表示”合理的进行局部化.

另一方面, 近 20 年来, 随着粗几何和非交换几何的发展, 尤其粗几何中指标理论的研究, 人们发现 Banach 空间几何理论尤其超自反空间与粗几何领域中一些亟待解决的重要问题(例如粗 Novikov 猜测)密切相关^[76, 96-99], 并由此带来了许多新的有趣的问题. 例如 2006 年郁国梁和 Kasparov^[76]证明了粗 Novikov 猜测对于可粗嵌入进超自反空间的有界几何成立. 由此, 一个自然的问题是是否有界几何均可粗嵌入进某个超自反空间? 但令人遗憾的是, 随后 Lafforgue 以及 Mendel 和 Naor 发现存在几类膨胀图的有界几何不能粗嵌入进任何超自反空间^[97-98]. 在此背景下, 寻求使得有界几何可粗嵌入进超自反空间的条件成为一个自然的问题. 特别地, 目前研究表明膨胀图成为最难嵌入的一类空间, 是否每个膨胀图均不能粗嵌入进任何超自反空间以及每个膨胀图是否是超膨胀的成为此领域的公开问题.

泛函分析团队成员程庆进在 2004 年师从程立新教授读博时, 就在程老师的指导下开始了超自反空间局部化问题的研究. 我们的想法是, 首先将超自反这一概念局部化, 提出合理的超弱紧集概念, 然后研究超弱紧集的嵌入并应用到粗嵌入上. 在 2007 年, 程立新、程庆进等^[100-101]发现, 利用顶点在目标集合中的“单形”代替有限维子空间定义集合的有限表示是“有限表示”的一个非常自然且适用的局部化概念. 由此对 Banach 空间中的有界弱闭集引入了超自反空间的一个局部化概念: 超弱紧集, 并建立了平行于超自反空间中有界子集的一系列性质以及局部化的 James-Enflo 再赋范定理^[102]. 2018 年程立新、程庆进等^[103]系统地研究了一般超弱紧集的性质, 特别有趣的是发现很多关于 Banach 空间特殊集合的概念可以与超弱紧集关联起来(例如 Beauzamy^[104]的一致可凸化算子, Raja^[105]的指标性质和 Fabian, Montesinos, Zizler^[106]的对偶指标性质). 如今, 超弱紧集这一概念已被人们认为是超自反空间的一个合理的局部化概念(参见文献^[107])并被广泛研究. 研究表明超弱紧集广泛存在

于非超自反空间环境中,这类集合很好地遗传了超自反空间的几何和拓扑性质,并于历史上一些经典的概念例如一致 Eberlein 紧^[108]、不动点、Banach-Saks 性质、一致弱零集^[109]等有着密切的关系.最近的一些文献^[103,110-116]表明,超弱紧集理论正成为一个活跃的研究方向.

下面两个尚待问题目前是我们关注的:

1) 刻画一些经典空间,例如 c_0 和 $C(K)$ 空间中超弱紧集的特征.

2) 是否每个超弱紧集可一致嵌入进某个 Hilbert 空间?

问题 2) 中,如果这个超弱紧集的内部不空,例如其为超自反空间的单位球时,是否可一致嵌入进某个 Hilbert 空间是 Banach 空间非线性几何理论中的一个长期公开问题^[39].最近我们证明了 c_0 中一类特殊的超弱紧集合—虫洞集可一致嵌入进 Hilbert 空间.这联合 Ozawa^[117]的结果表明膨胀图不能粗嵌入进这类超自反 Banach 空间—其单位球可一致同胚于 c_0 中的某个虫洞集.研究超弱紧集的一致嵌入并应用于有界几何的粗嵌入,尤其膨胀图向超自反空间的粗嵌入将是我们接下来研究的重点.

4 Banach 空间的非紧性测度

我们知道,非紧性测度的研究自从 Kuratowski 在 1930 年为了解决拓扑学中的问题而提出之后,已经进行了 90 多年,它在非线性分析的各个方面都有着重要的应用.然而,由于这类度量空间 $B(X)$ 属于“超空间”,而超空间系统的理论没有建立起来.这使得非紧性测度长期以来都不能建立像其他经典数学分支一样的基本理论.它的主要困难在于对“嵌入”的要求非常高,要满足保序、等距和紧零化.近几年来,程立新教授带领的厦大泛函团队解决了超空间等距保序和“紧零化”的嵌入问题,建立起非紧性测度的基本理论基础和框架,给出了三重保序等距和紧零化的嵌入定理^[118],应用这一理论建立起非紧性测度的基本理论基础和框架.

4.1 度量空间的嵌入理论

在处理非线性问题时,我们往往遇到由度量空间或 Banach 空间 X 的所有非空有界子集 $B(X)$ 并在其上赋予 Hausdorff 度量构成的“超空间”的问题.例如, Banach 空间(或者,更一般地,度量空间) X 上的非紧性测度就是定义在 $B(X)$ 上的一个满足某些特殊性质的非负函数.下面是三重保序等距和紧零化的嵌入

定理^[118].

定理 2 (三重保序等距紧零化嵌入定理) 设 X 为 Banach 空间.分别用 $B(X)$ 、 $C(X)$ 和 $K(X)$ 表示 X 的所有非空有界集、非空相对紧集和非空有界闭凸子集构成的集族,并赋予它们 Hausdorff 度量,用 Ω 表示 X 的对偶空间 X^* 的闭单位球,用 $C_b(\Omega)$ 表示 Ω 上的所有有界连续函数并赋予绝对值的上确界范数构成的 Banach 空间,用 $J: C(X) \rightarrow C_b(\Omega)$ 表示集合 $A \in C(X)$ 的支撑函数,亦即, $J(A)(x) = \sup_{a \in A} \langle a, x \rangle, x \in \Omega$. 则

1) $J: C(X) \rightarrow C_b(\Omega)$ 是一个保序等距映射;

2) $E_C = J(C(X)) - J(C(X)) \subset C_b(\Omega)$ 是一个 Banach 格;

3) $E_K = J(K(X)) - J(K(X)) \subset E_C$ 也是一个 Banach 格,并且是 E_C 的一个格理想;

4) 商映射 $Q: E_C \rightarrow E_C/E_K$ 是保序映射,并且 E_C/E_K 是一个抽象 M 空间;

5) 存在一个紧 Hausdorff 空间 K 和一个保序等距映射 $T: E_C/E_K \rightarrow C(K)$, 其中, $C(K)$ 为 K 上的所有连续函数构成的 Banach 空间;

6) 三重保序等距映射 TQJ 将 $C(X)$ 映成 $C(K)$ 正锥中的一个子锥,并且将 $K(X)$ 映成 $C(K)$ 的零点.

4.2 嵌入理论在非紧性测度理论中的应用

非紧性测度的表示问题一直是人们关注的一个问题,由于理论工具的缺乏,凸测度是非紧性测度中最广泛的一类测度.我们运用三重保序嵌入定理得到了如下结果:

(i) 建立了非紧性测度的表示定理.非紧性测度的表示问题一直是人们关注的基本问题.由于缺乏“超空间”理论工具,过去人们的研究往往局限于有标准 Schauder 基的具体空间,例如 $l^p, C(K)$ 等,而非紧性测度也往往只是 Hausdorff 非紧性测度,或者为了搞清楚表示问题,构造一些特别非紧性测度,但这些测度往往不具有正则性.针对这一基本问题,我们运用上述三重保序等距紧零化嵌入定理,以及凸分析和凸函数局部化 G -可微性,给出了任意 Banach 空间上的非紧性凸测度的表示定理(凸测度是非紧性测度中最广泛的一类测度).因此,解决了非紧性测度表示这一长期存在的基本问题.

(ii) 运用三重保序等距紧零化嵌入定理,证明了“每个无穷维 Banach 空间都存在不等价的正则非紧性测度”^[119],从而肯定地解决了这一长达 40 年的公开问题.“无穷维 Banach 空间是否都存在不等价的正则非紧性测度”是非紧性测度理论中的一个基本问题,首先由 Goebel K 于 1978 提出.1992 年 Banas J 和

Martinon A 给出第一个不等价正则非紧性测度存在的例子,但是否每个无穷维 Banach 空间都存在着正则非紧性测度便成为一个公开的基本问题. 2011 年, Mallet-Paret J (JDE 主编) 和 Nussbaum R D 从多个领域,包括物理和多个非线性分析的分支的需求以及这个问题的本质难度出发(他们认为这个问题完全得到解决几乎是不可能的),把这个问题弱化成“能否尽可能多的发现存在着不等价的正则非紧性测度的无穷维 Banach 空间?”,并称这个弱化的问题为 Fundamental Question. 因此,“每个无穷维 Banach 空间都存在不等价的正则非紧性测度”这一结论,从根本上解决了这一问题.

(iii) 建立了集合之间(强)有限表示理论,并运用这一理论证明了“Kuratowski 非紧性测度是可分决定的”^[14],从而解决了一个非紧性测度理论中一个长期公开的基本问题. 在非紧性测度中, Kuratowski 非紧性测度(常用 α 表示)是 Kuratowski 于 1930 年提出的,是第一个也是最常用的非紧性测度. 而另一个最常用的是 Hausdorff 非紧性测度(常用 β 表示). 它们是否具有“可数确定性”是一个长期的公开问题. Sadosvskii 经过 5 年的努力(1967—1972 年)证明了 Hausdorff 非紧性测度 β 不是可数确定的,而 Kuratowski 非紧性测度是否具有可数确定性仍然悬而未解. 我们证明了“Kuratowski 非紧性测度是可数决定的”^[14]. 我们为了解决这一问题建立的强局部有限表示理论,对 Banach 空间理论也是一个新的贡献,比如,它的一个直接推论就是“每个 Banach 空间 X 都存在一个可分子空间使得 X 能在这个子空间中作有限表示”.

(iv) 证明了广义 Cantor 交性质是独立于非完全非紧性测度定义中其他条件的假设. 非紧性测度在其 90 多年的发展过程中进行了各种各样的推广,这些推广大体上可分为两个方向,一种是非紧性测度 μ 的零点集严格包含了所有的相对紧集,例如,非弱紧性测度等;另一种是 μ 的零点集严格包含在所有的相对紧集构成的集族中,前者叫非广义紧性测度,后者叫不完全非紧性测度. Cantor 交性质是对广义非广义紧性测度是自动成立的,然而,不完全非紧性测度自 1980 年提出以来,尽管已经成为普遍认同的概念,但人们不知道它是否蕴含了 Cantor 交性质,而这条性质是非紧性测度中最重要的一条性质(例如,它是非紧性测度在不动点理论应用中的核心和关键),因此不得不在定义中另外加上这条性质. 我们证明了 Cantor 交性质是独立于非完全非紧性测度的其他假设条

件的.

(v) 证明了求解非线性发展方程中的一系列基本积分不等式^[14]. 经典的 Peano 定理告诉我们在有限维空间 X 中, Cauchy 问题

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

(其中, $f: [0, a] \times X \rightarrow X$ 是一个连续映射)总有局部解. 而对任何无穷维 Banach 空间 X 仅有 f 的连续性都不能保证它的局部解的存在性. 在诸多保证上述问题有局部解的充分条件中,非紧性测度的方法(亦即,假设 f 是在某个非紧性测度下式凝聚映射)是应用最广泛也是最重要的方法之一. 在这样的条件假设下,方程是否有解就往往归结为下述基本不等式是否成立:

$$\mu \left\{ \int_0^1 f(s, x_n(s)) ds : n = 1, 2, \dots \right\} \leq \int_0^t \mu \{ f(s, x_n(s)) : n = 1, 2, \dots \} ds.$$

因此,寻求保证上述不等式成立的条件就显得十分重要了. 然而,半个多世纪的研究历史和经验告诉我们,这是一个艰辛又复杂的过程,并且上述不等式右端被积函数的可测性问题是最大的困惑之一. 寻求使得上述积分不等式成立的条件成为此 Cauchy 问题最重要的内容. 我们证明了,当映射

$$J(t)(x^*) = \sup_n \langle x^*, w_n(t) \rangle, x^* \in B_{X^*}$$

是可测映射时,上述积分不等式对一切非紧性凸测度成立,其中 $w_n(t) = f(t, x_n(t))$,并且应用于此 Cauchy 问题的求解,其结论得到的不仅仅是局部解,而是在任何有限区间上都有整体解,无论是在结论上还是方法上都是全新的,从而刷新包含和推广了在无穷维空间 Cauchy 问题非紧性测度方法下的所有的经典结论.

5 非线性泛函分析

5.1 概述

解方程是数学的中心问题. 非线性泛函分析的发展是围绕着求解非线性方程展开的. 众所周知,即使对于最简单的非线性方程,即多项式方程 $p(x) = 0$,一般也不可能给出其解的表达式. 因此,我们通常所说的解方程主要是指证明解的存在性. 这虽然不能具体地给出解,但还是能为求近似解或数值解提供理论依据.

在非线性泛函分析中,证明非线性方程(主要是

非线性微分方程)解的存在性主要有两大理论:不动点理论和临界点理论,它们都依赖于拓扑方法.临界点理论是通过寻求适当的非线性泛函的临界点来得到所论非线性方程的解,因此只适合于具有变分结构的非线性问题;这种求解方法就是所谓的变分方法.由于自然科学和工程技术中诸多问题都满足变分原理,所以变分方法具有很广泛的应用,近几十年来临界点理论及其对非线性微分方程的应用得到蓬勃的发展,成为当代数学中非常活跃的重要分支.临界点理论主要有极小极大理论和 Morse 理论两大分支.

5.2 研究成果

非线性分析课题组的主要成员刘轼波在中科院数学所攻读博士学位期间(2000—2003 年),在导师李树杰教授的指导下学习和研究无穷维 Morse 理论,该理论的核心概念是 Banach 空间 X 上的泛函 $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ 在孤立临界点 u 处的临界群 $C_*(f, u)$ 和在无穷远处的临界群 $C_*(f, \infty)$. 它们都是用奇异同调群定义的,分别刻画泛函在临界点 u 附近的局部性质和泛函的整体性质.著名的 Morse 不等式则揭示了泛函在诸临界点处的局部性质与泛函的整体拓扑性质之间的深刻联系.

另一方面,鞍点约化是非线性分析中非常有效的方法,在一定条件下,寻求可微泛函 $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ 的临界点的问题可以转化为寻求子空间 Y 上的约化泛函 $\varphi: Y \rightarrow \mathbf{R}$ 的临界点.很自然,人们希望将鞍点约化与 Morse 理论结合起来,以便更好地研究非线性微分方程解的存在性和多重性,这就需要研究原泛函 f 与约化泛函 φ 的临界群的关系.刘轼波与合作者花了 10 年时间系统地研究并完全解决了这个问题.他在 2003 年的博士论文中证明了 f 与 φ 在无穷远处的临界群是同构的^[120].来厦门大学工作前后,他又研究了孤立临界点的情形,最终证明了 f 与 φ 在孤立临界点处的临界群也是同构的^[121-123].这些抽象结果及其思想被应用于非线性椭圆共振问题多重解的研究,大大改进了前人的相关结果^[120-123].

刘轼波自 2010 年开始研究各种(稳态) Schrödinger 方程问题,包括

(i) 半线性 Schrödinger 方程:

$$-\Delta u + V(x)u = g(u), u \in H^1(\mathbf{R}^N);$$

(ii) 非线性 Schrödinger-Poisson 方程组:

$$-\Delta u + V(x)u + \phi u = g(u),$$

$$-\Delta \phi = u^2, (u, \phi) \in H^1(\mathbf{R}^3) \times D^{1,2}(\mathbf{R}^3);$$

(iii) 拟线性 Schrödinger 方程:

$$-\Delta u + V(x)u - u\Delta(u^2) = g(u), u \in H^1(\mathbf{R}^N);$$

以及相关的 Schrödinger-Kirchhoff 方程.他主要关注 Schrödinger 算子 $S = -\Delta + V(x)$ 具有负空间的不定情形.

在文献[124]中,作者研究具有变号周期位势的半线性 Schrödinger 方程(i),这个问题是强不定的(能量泛函的二次型有无穷维的负空间).运用 Cerami 序列和环绕定理^[125],克服因 Ambrosetti-Rabinowitz 条件缺失而无法获得 Palais-Smale 序列的有界性这一公认的困难,简捷地得到该问题的基态解,改进了国际著名非线性分析专家 Szulkin 等的工作^[126].此文一经发表就引起广泛的注意,据 Google Scholar 统计,已被引用 90 次.

自意大利数学家 Benci 等^[127]提出约化方法以来,非线性 Schrödinger-Poisson 方程组(ii)成为非线性分析领域的热点课题.当 Schrödinger 算子 $S = -\Delta + V(x)$ 具有负空间时,能量泛函 Φ 中的正项 $\int \phi_u u^2$ 破坏了泛函的环绕结构(这里 ϕ_u 是(ii)中第二个方程的解).因此长期以来人们只能研究 Schrödinger 算子为正定,从而可以运用山路定理的情形;除非在耦合项 ϕu 前加一小系数 λ 以维持环绕结构^①.

在与学生合作的文献[128]中,刘轼波发现虽然(ii)的能量泛函 Φ 不满足环绕定理的几何条件,但它满足由他的两位导师李树杰教授、刘嘉荃教授在 20 世纪 80 年代引进的局部环绕条件;从而,运用源自两位导师的局部环绕理论,率先在不限耦合强度(即无需引进额外的小系数 λ)的条件下,获得不定问题(ii)的非平凡解.

由于自然的能量泛函无法在整个 $H^1(\mathbf{R}^N)$ 上定义,拟线性 Schrödinger 方程(iii)的研究是从刘嘉荃等^[129-130]引入那个著名的非线性变换 f 之后才真正开始的:如果 v 是 $\Phi: H^1(\mathbf{R}^N) \rightarrow \mathbf{R}$ 的临界点,则 $u = f(v)$ 是(iii)的解.与问题(i)和(ii)不同,非线性变换 f 使得泛函 Φ 的主部 $Q(v)$ 不再是二次型,从而当 Schrödinger 算子有负空间时,无法将工作空间 X 分解为某个二次型的正定和负定空间的直和并验证环绕或局部环绕.因此,在文献[131]之前所有关于(iii)的工作都要求 Schrödinger 算子是正算子.在与学生合作的文献[131]中,刘轼波注意到 C^1 -泛函 Φ 的主部 Q 是 C^2 的,从而对它进行二阶 Taylor 展开,获得 Φ 在原点的

① $\lambda=0$ 时问题(ii)退化为具有环绕结构的问题(i),所以当 λ 很小时(ii)仍具有环绕结构,可以运用环绕定理.

局部环绕性质,进而运用局部环绕理论和 Morse 理论率先得到不定问题(iii)的非平凡解.

围绕着上述研究思想,刘轼波与他在厦门大学指导的博士生还在相关的问题中取得一系列成果^[132-135].此外,非线性泛函分析可以理解为无穷维空间上的数学分析.在长期为本科生讲授数学分析的过程中,刘轼波对数学分析中关于欧氏空间之间映射的满射性(与求解非线性代数方程有关)、重积分换元公式(与 Brouwer 不动点定理有关)等基本问题进行了研究^[136-137].他在数学分析教学和研究方面的一些想法,可见文献^[138].

6 量子信息与算子理论交叉

量子信息科学是由数学科学、物理科学、信息科学等多个学科交叉融合所形成的一门新兴科学技术领域,本质是将量子力学的基本原理应用到信息科学.由于其在信息传输与信息处理中可以实现诸多经典领域所不能完成的任务,被业界认为是将对未来科学产生重大影响的革命性技术^[139].量子信息在我国也受到了广泛的重视,被写入《中共中央关于制定国民经济和社会发展的第十四个五年规划和二〇三五年远景目标的建议》.

量子信息中有丰富的算子结构,量子信息中主要研究对象量子态可以表示为密度算子,相干态是在某组固定基下的非对角算子,反映量子态演化的量子操作可表示为初等算子等等.丰富的算子结构使得算子论方法对量子信息的研究大有裨益,同时使得量子信息与数学相互融合、相互促进.给定密度算子,人们急切关心其资源的属性的度量与不同量子信息之间的传操控,这两个问题之所以受到关注是因为一定的资源能完成什么样的任务是量子信息科学的基础性问题^[139-144].

6.1 研究成果

算子理论组在量子信息中的操控与度量这两个基础性问题的研究方面取得较大的进展.

1) 在纯态的情形下解决了德国著名学者 Plenio M B 等在物理学顶级学术期刊 *Physical Review Letters*^[142]上提出的关于相干操控的公开问题^[145].该成果已成为相干资源理论的一个基本结果.以此结果作为出发点之一,学者们研究了在多种物理条件下实现相干态的转化.如相干蒸馏、相干催化、相干稀释、逼近非相干操控以及其他物理情形下的非相干变换等,建立了相干操作理论.该论文已成为该领域的高

被引论文,已被引 153 次(科睿唯安).2) 给出了一类相干度量的构造以及纯态操控最大概率的计算公式^[146],此方法已成为相干度量构造的一个重要工具,已被引 57 次(科睿唯安).3) 发现维格纳-詹生偏信息量不满足相干资源理论的度量框架^[147],促使人们进一步研究该信息量的度量化改造,已被引 33 次(科睿唯安).4) 刻画了相对熵度量下极大相干态的结构、次可加等式何时成立以及保持极大相干态不变的量子信道的结构^[148].5) 刻画了有限维量子系统中纯态到混合态、子空间独立态之间的非相干操控以及混合态非相干操控的不可达定理^[149].6) 在严格非相干信道的情形下刻画了二组纯态间的联合相干操控^[150].7) 给出了单比特量子系统上严格非相干双随机信道的仿射表示,在此基础上刻画了该自由信道下相干态的几何特征为长方体,这相当于解决了严格非相干双随机信道作用下的相干操控问题^[151].8) 刻画了单模高斯系统上的相干操控,揭示了高斯系统与有限维量子系统相干操控的本质区别^[152].9) 在非相干操作的框架下对高斯态进行了完全分类,揭示了其与相干冻结物理现象的等价关系^[153].

6.2 展望

课题组已有的成果主要集中量子信息中的操控与度量问题,而在具体的量子计算方面尚没有涉猎.目前课题组已开始学习编程与算法,期望在保持操控与度量问题研究优势的同时也能在量子计算研究方面有所建树.事实上这两个方面有着密切的联系,如著名的杜奇-约瑟算法^[154],每执行一次运算,就相当于执行一次非相干操控.由于量子态退相干,算法的性能会变差,而相干度量能够用来衡量退相干对杜奇-约瑟算法性能的影响.这也对随机形式的杜奇-约瑟算法起着关键作用.

致谢: 本文得益于厦门大学泛函分析团队的探讨和支持,在此表示感谢!

参考文献:

- [1] AKHMEROV R R, KAMENSKII M I, POTAPOV A S, et al. Measures of noncompactness [M] // Measures of Noncompactness and Condensing Operators. Basel: Birkhäuser, 1992: 1-52.
- [2] APPELL J. Recent trends in nonlinear analysis [M]. Basel: Birkhäuser, 2000.
- [3] ENFLO P. Banach spaces which can be given an equivalent uniformly convex norm [J]. Israel Journal of Mathematics, 1972, 13(3): 281-288.

- [4] GODEFROY G, KALTON N J. The ball topology and its applications[J]. Contemp Math Amer Math Soc, 1989, 85:195-237.
- [5] JAMES R C. Uniformly non-square Banach spaces[J]. The Annals of Mathematics, 1964, 80(3):542.
- [6] MAZUR S. Über schwache konvergenz in den Räumen (L_p) [J]. Studia Mathematica, 1933, 4(1):128-133.
- [7] PEŁCZYŃSKI A. All separable Banach space admit for every $\varepsilon > 0$ fundamental total and bounded by $1 + \varepsilon$ biorthogonal sequences[J]. Studia Mathematica, 1976, 55(3):295-304.
- [8] VANDERWERFF J. Mazur intersection properties for compact and weakly compact convex sets[J]. Canadian Mathematical Bulletin, 1998, 41(2):225-230.
- [9] ZIZLER V. Renorming concerning Mazur's intersection property of balls for weakly compact convex sets[J]. Mathematische Annalen, 1986, 276(1):61-66.
- [10] CHENG L X. Ball-covering property of Banach spaces [J]. Israel Journal of Mathematics, 2006, 156(1):111-123.
- [11] 傅瑞瑜, 程立新. Banach 空间单位球面的球覆盖性质 [J]. 数学研究, 2006, 39(1):39-43.
- [12] 施慧华, 张晶晶. R^n 空间中单位球面的极小球覆盖 [J]. 厦门大学学报(自然科学版) 2006, 45(5):621-623.
- [13] 张晶晶. R^n 空间中单位球面的覆盖问题[J]. 数学研究, 2007, 40(1):109-113.
- [14] CHENG L X, CHENG Q J, LIU X Y. Ball-covering property of Banach spaces that is not preserved under linear isomorphisms [J]. Science in China Series A: Mathematics, 2008, 51(1):143-147.
- [15] 林国琛, 沈喜生. 计算球覆盖最小半径的神经网络方法 [J]. 厦门大学学报(自然科学版), 2008, 47(6):797-800.
- [16] 林丽华. 单位球极小球覆盖数为 $n+1$ 的 n -维赋范空间的性质[J]. 淮北师范大学学报(自然科学版), 2008, 29(1):18-22.
- [17] 林丽华, 张风, 张敏. n -维赋范空间单位球极小球覆盖数 $2n-1$ 与包含等距同构于 $(R^{n-1}, \| \cdot \|_\infty)$ 的子空间[J]. 数学研究, 2008, 41(4):407-415.
- [18] 林丽华. 遗传不可分解空间与具有球覆盖性质空间的关系[J]. 华东师范大学学报(自然科学版), 2008, 3:8-11
- [19] FONF V P, ZANCO C. Covering spheres of Banach spaces by balls[J]. Mathematische Annalen, 2009, 344(4):939-945.
- [20] PHELPS R. Convex functions, monotone operators and differentiability[M]. Berlin: Springer, 1989.
- [21] CHENG L X, SHI H H, ZHANG W. Every Banach space with a w^* -separable dual has a $1 + \varepsilon$ -equivalent norm with the ball covering property [J]. Science in China Series A: Mathematics, 2009, 52(9):1869-1874.
- [22] CHENG L X, CHENG Q J, SHI H H. Minimal ball-coverings in Banach spaces and their application [J]. Studia Mathematica, 2009, 192(1):15-27.
- [23] PAPINI P. Covering the sphere and the ball in Banach spaces[J]. Communications in Applied Analysis, 2009, 13(4):579-586.
- [24] CHENG L X, KADETS V, WANG B, et al. A note on ball-covering property of Banach spaces [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2010, 371(1):249-253.
- [25] 王波. 两类赋予 w^* -可分对偶的空间的 BCP [J]. 数学研究, 2010, 43(4):393-396.
- [26] CHENG L X, LUO Z H, LIU X F, et al. Several remarks on ball-coverings of normed spaces [J]. Acta Mathematica Sinica, English Series, 2010, 26(9):1667-1672.
- [27] CHENG L X, WANG B, ZHANG W, et al. Some geometric and topological properties of Banach spaces via ball coverings [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2011, 377(2):874-880.
- [28] ZHANG W. Characterizations of universal finite representability and b-convexity of Banach spaces via ball coverings [J]. Acta Mathematica Sinica, English Series, 2012, 28(7):1369-1374.
- [29] SHANG S Q, CUI Y N. Ball-covering property in uniformly non-Banach spaces and application [J]. Abstract and Applied Analysis, 2013, 2013:1-7.
- [30] FONF V P, ZANCO C. Covering the unit sphere of certain Banach spaces by sequences of slices and balls [J]. Canadian Mathematical Bulletin, 2014, 57(1):42-50.
- [31] FONF V P, LEVIN M, ZANCO C. Covering L^p spaces by balls [J]. The Journal of Geometric Analysis, 2014, 24(4):1891-1897.
- [32] SHANG S Q. Differentiability and ball-covering property in Banach spaces [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2016, 434(1):182-190.
- [33] SHANG S Q, CUI Y N. Locally 2-uniform convexity and ball-covering property in Banach space [J]. Banach Journal of Mathematical Analysis, 2015, 9(1):42-53.
- [34] LUO Z H, LIU J L, WANG B. A remark on the ball-covering property of product spaces [J]. Filomat, 2017, 31(12):3905-3908.
- [35] SHANG S, CUI Y. Dentable point and ball-covering

- property in Banach spaces[J]. *Journal of Convex Analysis*, 2018, 25(3):1045-1058.
- [36] GUIRAO A J, LISSITSIN A, MONTESINOS V. Some remarks on the ball-covering property[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2019, 479(1): 608-620.
- [37] LUO Z H, ZHENG B T. Stability of the ball-covering property[J]. *Studia Mathematica*, 2020, 250(1): 19-34.
- [38] LIU M Z, LIU R, LU J M, et al. Ball covering property from commutative function spaces to non-commutative spaces of operators[J]. *Journal of Functional Analysis*, 2022, 283(1):109502.
- [39] BENYAMINI Y, LINDENSTRAUSS J. *Geometric Non-linear functional analysis*[M]. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1999.
- [40] MAZUR S, ULAM S. Sur les transformations isométriques d'espaces vectoriels normés[J]. *C R Acad Sci Paris*, 1932, 194:946-948.
- [41] HYERS D H, ULAM S M. On approximate isometries [J]. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 2014, 51(4):288-292.
- [42] GEVIRTZ J. Stability of isometries on Banach spaces [J]. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1983, 89(4):633-636.
- [43] QIAN S W. ϵ -isometric embeddings[J]. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1995, 123(6):1797-1803.
- [44] ŠEMRL P, VÄISÄLÄ J. Nonsurjective nearisometries of Banach spaces[J]. *Journal of Functional Analysis*, 2003, 198(1):268-278.
- [45] CHENG L X, DONG Y B, ZHANG W. On stability of nonlinear non-surjective ϵ -isometries of Banach spaces [J]. *Journal of Functional Analysis*, 2013, 264(3):713-734.
- [46] BAO L X, CHENG L X, CHENG Q J, et al. On universally left-stability of ϵ -isometry[J]. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 2013, 29(11):2037-2046.
- [47] CHENG L X, DAI D X, DONG Y B, et al. Universal stability of Banach spaces for ϵ -isometries[J]. *Studia Mathematica*, 2014, 221(2):141-149.
- [48] CHENG L X, ZHOU Y. On perturbed metric-preserved mappings and their stability characterizations [J]. *Journal of Functional Analysis*, 2014, 266(8):4995-5015.
- [49] CHENG L X, CHENG Q J, TU K, et al. A universal theorem for stability of ϵ -isometries of Banach spaces [J]. *Journal of Functional Analysis*, 2015, 269(1):199-214.
- [50] CHENG L X, CHENG Q J, TU K, et al. A universal theorem for stability of ϵ -isometries of Banach spaces [J]. *Journal of Functional Analysis*, 2015, 269(1):199-214.
- [51] CHENG L X, TU K, ZHANG W. On weak stability of ϵ -isometries on wedges and its applications[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2016, 433(2):1673-1689.
- [52] CHENG L X, SHEN Q R, ZHANG W, et al. More on stability of almost surjective ϵ -isometries of Banach spaces[J]. *Science China Mathematics*, 2017, 60(2):277-284.
- [53] CHENG L X, FANG Q Q, LUO S J, et al. On non-surjective coarse isometries between Banach spaces[J]. *Quaestiones Mathematicae*, 2019, 42(3):347-362.
- [54] CHENG L, SUN L. On the symmetrization of ϵ -isometries of Banach spaces [J]. *Funktsional Anal i Prilozhen*, 2019, 53(1):93-97.
- [55] CHENG L X, SUN L. Stability characterizations of ϵ -isometries on certain Banach spaces [J]. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 2019, 35(1):123-134.
- [56] CHENG L X, DONG Y B. A note on the stability of nonsurjective ϵ -isometries of Banach spaces[J]. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2020, 148(11):4837-4844.
- [57] DVORETZKY A. some results on convex bodies and Banach spaces[C]// *Proc Int Symp on Linear Spaces*. Jerusalem: Jerusalem Academic Press, 1961:123-160.
- [58] MILMAN V D. Spectrem of bounded continuou functions on the unit sphere of a Banach space[J]. *Funct Anal Appl*, 1969, 3:67-79.
- [59] MILMAN V D. New proof of the theorem of A. Dvoretzky on intersections of convex bodies[J]. *Functional Analysis and Its Applications*, 1971, 5(4):288-295.
- [60] MILMAN V D. Dvoretzky's theorem—thirty years later [J]. *Geometric & Functional Analysis GAFA*, 1992, 2(4):455-479.
- [61] FIGIEL T, LINDENSTRAUSS J, MILMAN V D. The dimension of almost spherical sections of convex bodies [J]. *Acta Mathematica*, 1977, 139:53-94.
- [62] GORDON Y. Some inequalities for Gaussian processes and applications[J]. *Israel Journal of Mathematics*, 1985, 50(4):265-289.

- [63] GROMOV M. Metric structures for Riemannian and non-Riemannian Spaces[C]//Modern Birkhäuser Classics. Boston :Birkhäuser,1999:606.
- [64] LINDENSTRAUSS J. Almost spherical sections; their existence and their applications[J]. Jber d Dt Math Verein Jubiläumstagung,1990(1):39-61.
- [65] KADETS M I. Proof of the topological equivalence of all separable infinite-dimensional Banach spaces[J]. Functional Analysis and Its Applications,1967,1(1):53-62.
- [66] AHARONI I. Every separable metric space is Lipschitz equivalent to a subset of c_0 [J]. Israel Journal of Mathematics,1974,19(3):284-291.
- [67] ASSOUAD P. Remarques sur un article de Israel Aharoni sur les prolongements lipschitziens dans c_0 [J]. Israel Journal of Mathematics,1978,31(1):97-100.
- [68] ARONSZAJN N. Differentiability of lipschitzian mappings between Banach spaces[J]. Studia Mathematica,1976,57(2):147-190.
- [69] MANKIEWICZ P. On the differentiability of lipschitz mappings in Fréchet spaces [J]. Studia Mathematica,1973,45(1):15-29.
- [70] PHELPS R R. Convex functions, monotone operators and differentiability[M]. Berlin:Springer,1989.
- [71] JOHNSON W B, LINDENSTRAUSS J. Extensions of Lipschitz mappings into a Hilbert space[C]//Conference in modern analysis and probability. New Haven:Conn,1982:189-206.
- [72] YU G L. Higher index theory of elliptic operators and geometry of groups[M]//Proceedings of the International Congress of Mathematicians Madrid, Zuerich, Switzerland; European Mathematical Society Publishing House,2009:1623-1639.
- [73] YU G L. The coarse Baum-Connes conjecture for spaces which admit a uniform embedding into Hilbert space [J]. Inventiones Mathematicae,2000,139(1):201-240.
- [74] YU G L. The Novikov conjecture for groups with finite asymptotic dimension[J]. The Annals of Mathematics,1998,147(2):325.
- [75] YU G L. Higher index theory of elliptic operators and geometry of groups[M]//Proceedings of the International Congress of Mathematicians Madrid, Zuerich, Switzerland; European Mathematical Society Publishing House,2009:1623-1639.
- [76] KASPAROV G, YU G L. The coarse geometric Novikov conjecture and uniform convexity [J]. Advances in Mathematics,2006,206(1):1-56.
- [77] MINEYEV I, YU G L. The Baum-Connes conjecture for hyperbolic groups[J]. Inventiones Mathematicae,2002,149(1):97-122.
- [78] TINGLEY D. Isometries of the unit sphere[J]. Geometriae Dedicata,1987,22(3):371-378.
- [79] DING G G. On isometric extension problem between two unit spheres[J]. Science in China Series A: Mathematics,2009,52(10):2069-2083.
- [80] FERNÁNDEZ-POLO F J, PERALTA A M. Low rank compact operators and Tingley's problem[J]. Advances in Mathematics,2018,338:1-40.
- [81] FERNÁNDEZ-POLO F, PERALTA A M. On the extension of isometries between the unit spheres of a C^* -algebra and $B(H)$ [J]. Transactions of the American Mathematical Society, Series B,2018,5(3):63-80.
- [82] MA Y M. Isometries of the unite sphere [J]. Acta Mathematica Scientia,1992,12(4):366-373.
- [83] FLORET K K. Weakly compact sets[M]. Berlin:Springer,1980.
- [84] ZIZLER V. Nonseparable Banach spaces[J]. Handbook of the Geometry of Banach Spaces,2003,2:1743-1816.
- [85] JAMES R C. Super-reflexive Banach spaces[J]. Canadian Journal of Mathematics,1972,24(5):896-904.
- [86] ENFLO P. Banach spaces which can be given an equivalent uniformly convex norm[J]. Israel Journal of Mathematics,1972,13(3):281-288.
- [87] PISIER G. Martingales with values in uniformly convex spaces[J]. Israel Journal of Mathematics,1975,20(3):326-350.
- [88] PISIER G, XU Q H. Non-commutative martingale inequalities[J]. Communications in Mathematical Physics,1997,189(3):667-698.
- [89] XU Q H. Littlewood-Paley theory for functions with values in uniformly convex spaces[J]. Journal Für Die Reine Und Angewandte Mathematik (Crelles Journal),1998,1998(504):195-226.
- [90] RAYNAUD Y, XU Q H. On subspaces of non-commutative l_p -spaces[J]. Journal of Functional Analysis,2003,203(1):149-196.
- [91] JUNG M, NIELSEN N J, RUAN Z J, et al. COL_p spaces—the local structure of non-commutative L_p spaces[J]. Advances in Mathematics,2004,187(2):257-319.
- [92] XU Q H. Operator-space Grothendieck inequalities for noncommutative L_p -spaces[J]. Duke Mathematical Journal,2006,131(3):525-574.

- [93] JUNGE M, XU Q H. Noncommutative maximal ergodic theorems [J]. *Journal of the American Mathematical Society*, 2007, 20(2): 385-439.
- [94] JUNGE M, XU Q H. Representation of certain homogeneous Hilbertian operator spaces and applications [J]. *Inventiones Mathematicae*, 2010, 179(1): 75-118.
- [95] KIRK W A. A fixed point theorem for mappings which do not increase distances [J]. *The American Mathematical Monthly*, 1965, 72(9): 1004.
- [96] YU G. Higher index theory of elliptic operators and geometry of groups [M] // *Proceedings of the International Congress of Mathematicians Madrid, Zuerich, Switzerland; European Mathematical Society Publishing House*, 2009: 1623-1639.
- [97] LAFFORGUE Vincent. Un renforcement de la propriété (T) [J]. *Duke Math J*, 2008, 143: 559-602.
- [98] MENDEL M, NAOR A. Nonlinear spectral calculus and super-expanders [J]. *Publications Mathématiques De L'IHÉS*, 2014, 119(1): 1-95.
- [99] YU G. The Novikov conjecture [J]. *Uspekhi Mat Nauk*, 2019, 74: 167-184.
- [100] 程庆进. Banach 空间的局部嵌入 [D]. 厦门: 厦门大学, 2007.
- [101] CHENG L X. On super-weakly compact sets and generalized renormings [EB/OL]. [2023-05-01]. www.ims.cuhk.edu.hk/publications/reports/2008-01.pdf.
- [102] CHENG L X, CHENG Q J, WANG B, et al. On super-weakly compact sets and uniformly convexifiable sets [J]. *Studia Mathematica*, 2010, 199(2): 145-169.
- [103] CHENG L, CHENG Q J, LUO L. On super weak compactness and its equivalences [J]. *J Convex Anal*, 2018, 25: 899-926.
- [104] BEAUZAMY B. Opérateurs uniformément convexifiants [J]. *Studia Mathematica*, 1976, 57(2): 103-139.
- [105] RAJA M. Finitely dentable functions, operators and sets [J]. *Journal of Convex Analysis*, 2008, 15(2): 219-233.
- [106] FABIAN M, MONTESINOS V, ZIZLER V. Sigma-finite dual dentability indices [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2009, 350(2): 498-507.
- [107] RAJA M. Super WCG Banach spaces [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2016, 439(1): 183-196.
- [108] BENYAMINI Y, STARBIRD T. Embedding weakly compact sets into Hilbert space [J]. *Israel Journal of Mathematics*, 1976, 23(2): 137-141.
- [109] MERCOURAKIS S. On Cesaro summable sequences of continuous functions [J]. *Mathematika*, 1995, 42(1): 87-104.
- [110] CHENG L X, LUO Z H, ZHOU Y. On super weakly compact convex sets and representation of the dual of the normed semigroup they generate [J]. *Canadian Mathematical Bulletin*, 2013, 56(2): 272-282.
- [111] CHENG L X, CHENG Q J, ZHANG J C. On super fixed point property and super weak compactness of convex subsets in Banach spaces [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2015, 428(2): 1209-1224.
- [112] 程庆进. Banach 空间中的超弱紧集 [J]. *中国科学(数学)*, 2020, 50(12): 1695-1720.
- [113] CHENG L X, CHENG Q J, WANG J J. On absolute uniform retracts, uniform approximation property and super weakly compact sets of Banach spaces [J]. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 2021, 37(5): 731-739.
- [114] CHEN X L, CHENG L X. On countable determination of the Kuratowski measure of noncompactness [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2021, 504(1): 125370.
- [115] LANCIEN G, RAJA M. Nonlinear aspects of super weakly compact sets [J]. *Annales De L'Institut Fourier*, 2022, 72(3): 1305-1328.
- [116] GARCÍA-LIROLA L C, GRELLIER G, RUEDA ZOCA A. Extremal structure in ultrapowers of Banach spaces [J]. *Revista De La Real Academia De Ciencias Exactas, Físicas Naturales Serie A Matemáticas*, 2022, 116(4): 1-25.
- [117] OZAWA N. A note on non-amenability of $B(\ell_p)$ for $p=1, 2$ [J]. *International Journal of Mathematics*, 2004, 15(6): 557-565.
- [118] CHENG L X, CHENG Q J, LUO S J, et al. On super weak compactness of subsets and its equivalences in Banach spaces [J]. *J Convex Anal*, 2018, 25(3): 899-926.
- [119] ABLET E, CHENG L X, CHENG Q J, et al. Every Banach space admits a homogenous measure of non-compactness not equivalent to the Hausdorff measure [J]. *Science China Mathematics*, 2019, 62(1): 147-156.
- [120] LIU S B, LI S J. Critical groups at infinity, saddle point reduction and elliptic resonant problems [J]. *Communications in Contemporary Mathematics*, 2003, 5(5): 761-773.

- [121] LIU S B. Remarks on multiple solutions for elliptic resonant problems[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2007, 336(1): 498-505.
- [122] LIU S B. Multiple solutions for elliptic resonant problems[J]. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, 2008, 138(6): 1281-1289.
- [123] LI C, LIU S B. Homology of saddle point reduction and applications to resonant elliptic systems[J]. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2013, 81: 236-246.
- [124] LIU S B. On superlinear Schrödinger equations with periodic potential[J]. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 2012, 45(1/2): 1-9.
- [125] LI G B, SZULKIN A. An asymptotically periodic Schrödinger equation with indefinite linear part[J]. *Communications in Contemporary Mathematics*, 2002, 4(4): 763-776.
- [126] SZULKIN A, WETH T. Ground state solutions for some indefinite variational problems[J]. *Journal of Functional Analysis*, 2009, 257(12): 3802-3822.
- [127] BENCI V, FORTUNATO D. An eigenvalue problem for the Schrödinger-Maxwell equations[J]. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, 1998, 11(2): 283-293.
- [128] CHEN H Y, LIU S B. Standing waves with large frequency for 4-superlinear Schrödinger-Poisson systems[J]. *Annali Di Matematica Pura Ed Applicata*, 2015, 194(1): 43-53.
- [129] LIU J Q, WANG Y Q, WANG Z Q. Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations, II[J]. *Journal of Differential Equations*, 2003, 187(2): 473-493.
- [130] COLIN M, JEANJEAN L. Solutions for a quasilinear Schrödinger equation: a dual approach[J]. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2004, 56(2): 213-226.
- [131] LIU S B, ZHOU J A. Standing waves for quasilinear Schrödinger equations with indefinite potentials[J]. *Journal of Differential Equations*, 2018, 265(9): 3970-3987.
- [132] LIU S B, WU Y. Standing waves for 4-superlinear Schrödinger-Poisson systems with indefinite potentials[J]. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 2017, 49(2): 226-234.
- [133] LIU S B, ZHAO Z H. Solutions for fourth order elliptic equations on $\mathbb{R}^N$ involving $u\Delta(u^2)$ and sign-changing potentials[J]. *Journal of Differential Equations*, 2019, 267(3): 1581-1599.
- [134] LIU S B, MOSCONI S. On the Schrödinger-Poisson system with indefinite potential and 3-sublinear nonlinearity[J]. *Journal of Differential Equations*, 2020, 269(1): 689-712.
- [135] LIU S B, YIN L F. Quasilinear Schrödinger equations with concave and convex nonlinearities[J]. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 2023, 62(3): 1-14.
- [136] LIU P, LIU S B. On the surjectivity of smooth maps into euclidean spaces and the fundamental theorem of algebra[J]. *The American Mathematical Monthly*, 2018, 125(10): 941-943.
- [137] LIU S, ZHANG Y. On the change of variables formula for multiple integrals[J]. *Journal of Mathematical Study*, 2018, 50(3): 268-276.
- [138] 刘轼波. 数学专业多元微积分教学的几点体会[J]. *大学数学*, 2021, 37: 84-92.
- [139] NIELSEN M A, CHUANG I L. *Quantum computation and quantum information*[M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2012.
- [140] VEDRAL V, PLENIO M B, RIPPIN M A, et al. Quantifying entanglement[J]. *Physical Review Letters*, 1997, 78(12): 2275-2279.
- [141] NIELSEN M A. Conditions for a class of entanglement transformations[J]. *Physical Review Letters*, 1999, 83(2): 436-439.
- [142] BAUMGRATZ T, CRAMER M, PLENIO M. Quantifying coherence[J]. *Physical Review Letters*, 2014, 113(14): 140401.
- [143] STRELTISOV A, ADESSO G, PLENIO M B. Colloquium: quantum coherence as a resource[J]. *Reviews of Modern Physics*, 2017, 89(4): 041003.
- [144] CHITAMBAR E, GOUR G. Quantum resource theories[J]. *Reviews of Modern Physics*, 2019, 91(2): 025001.
- [145] DU S P, BAI Z F, GUO Y. Conditions for coherence transformations under incoherent operations[J]. *Physical Review A*, 2015, 91(5): 052120.
- [146] DU S P, BAI Z F, QI X F. Coherence measures and optimal conversion for coherent states[J]. *Quantum Information and Computation*, 2015, 15(15&16): 1307-1316.
- [147] DU S P, BAI Z F. The Wigner-Yanase information can increase under phase sensitive incoherent operations[J]. *Annals of Physics*, 2015, 359: 136-140.
- [148] BAI Z F, DU S P. Maximally coherent states[J]. *Quantum Information and Computation*, 2015, 15(15/

16):1355-1364.

[149] DU S P, BAI Z F, QI X F. Coherence manipulation under incoherent operations[J]. Physical Review A, 2019,100(3):032313.

[150] BAI Z F, SHUANPING DU S. Coherent preorder of quantum states[J]. Quantum Information and Computation, 2020,20(13/14):1124-1137.

[151] DU S P, BAI Z F. Strictly incoherent operations for one-qubit systems [J]. Physics Letters A, 2021, 394: 127203.

[152] DU S P, BAI Z F. Conversion of Gaussian states under incoherent Gaussian operations[J]. Physical Review A, 2022,105(2):022412.

[153] DU S P, BAI Z F. Incoherent Gaussian equivalence of m-mode Gaussian states[J]. Physical Review A, 2023, 107:012407.

[154] HILLERY M. Coherence as a resource in decision problems: the Deutsch-Jozsa algorithm and a variation [J]. Physical Review A, 2016,93:012111.

Some problems and applications in functional analysis

CHENG Qingjin^{*}, DU Shuanping, LIU Shibo, ZHANG Wen
(School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: In this paper, we present a brief survey on the recent progress of some problems in functional analyses, including ball-covering property, metric preserving mapping, super weakly compact sets of Banach spaces, measure of non-compactness of Banach spaces, nonlinear functional analyses, intersection of quantum information and operator theory. Results obtained by authors and their collaborators on this topic are stressed.

Keywords: Banach spaces theory; nonlinear geometry in Banach spaces; nonlinear functional analysis; operator theory
(责任编辑:汪 军)