泛函微分方程稳定性的李雅普诺夫泛函方法

温　立　志
(湖南大学数学系，长沙)

关于滞后型泛函微分方程的稳定性的判别方法中，有两种重要的思想方法，一种是基于李雅普诺夫泛函，另一种是运用拉什密辛条件．文献[1]中的定理 2.1、4.1、4.2 是这两种思想方法的最重要的经典结果．本文把这两种思想方法统一起来，得到了更为广泛的结果．为精简起见，如无特别声明，本文所用的概念和符号主要引自文献 [1]．

考察滞后型泛函微分方程

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \tag{1}$$

其中 $f(t, \phi)$ 是 $R^+ \times C \to R^n$ 的连续泛函，$f(t, 0) \equiv 0$．

设 $V(t, \phi)$ 是 $R^+ \times C \to R^+$ 的连续泛函，它沿 (1) 式的解的右上导数定义为

$$\dot{V}(t, \phi) = \overline{\lim_{h \to 0^+}} \{V(t + h, x_{t+h}(t, \phi)) - V(t, \phi)\}/h.$$

又设 u, v 为 $R^+ \to R^+$ 的连续非减函数，当 $s > 0$ 时，$u(s) > 0, v(s) > 0$, $u(0) = 0$, $v(0) = 0$．

设 $G(t, s)$ 为 $R^+ \times R^+ \to R^+$ 的连续函数，$G(t, 0) \equiv 0$，又设方程 $\dot{y}(t) = G(t, y(t))$ 的零解为一致稳定．

定理 1　若存在上述的函数 u、v、V、G 满足下列的条件:

(i) 对任何的 $t \geqslant 0$ 及 $\phi \in C$，有

$$u(|\phi(0)|) \leqslant V(t, \phi) \leqslant v(|\phi|).$$

(ii) 对任何的 $\sigma \geqslant 0$ 及 $\phi \in C$，存在 $r_0 \in (0, r]$ 及 $\lambda \geqslant 1$，使得当 $t \in [\sigma, \sigma + r_0)$ 且 $V(t, x_t(\sigma, \phi)) \geqslant \lambda v(|\phi|)$ 以及当 $t \geqslant \sigma + r_0$ 且 $V(t, x_t(\sigma, \phi)) \geqslant V(\xi, x_\xi(\sigma, \phi))$, $\sigma \leqslant \xi \leqslant t$ 时，有 $\dot{V}(t, x_t(\sigma, \phi)) \leqslant G(t, V(t, x_t(\sigma, \phi)))$，则方程 (1) 的零解为一致稳定．

设 $h(t)$, $H(V)$ 均为 $R^+ \to R^+$ 的连续函数，当 $V > 0$ 时 $H(V) > 0$, $H(0) = 0$，并且满足

$$\int^{\infty} h(t)dt < \infty, \quad \lim_{b \to 0^+} \int_b^a \frac{dV}{H(V)} = \infty, \quad (a > 0).$$

定理 2　若存在上述的函数 u、v、V、G 满足定理 1 的条件，其中 $G(t, V(t, x_t(\sigma, \phi)))$ 改为 $h(t)H(V(t, x_t(\sigma, \phi)))$，则方程 (1) 的零解为一致稳定．

以上两个定理均改进了文献 [1] 中定理 2.1 的相应结果．

推论　若存在上述的函数满足下列的条件:

(i)　对任何的 $t \geqslant 0$ 及 $x \in R^n$，有

$$u(|x|) \leqslant V(t, x) \leqslant v(|x|);$$

本文 1982 年 7 月 20 日收到，1983 年 5 月 31 日收到修改稿．

(ii) 对任何的 $\sigma \geqslant 0$ 及 $\phi \in C$, 存在 $r_0 \in (0, r]$ 及 $\lambda \geqslant 1$, 使得当 $t \in [\sigma, \sigma + r_0)$ 且 $V(t, x(\sigma, \phi)(t)) \geqslant \lambda v(|\phi|)$, 以及当 $t \geqslant \sigma + r_0$ 且 $V(t, x(\sigma, \phi)(t)) \geqslant V(\xi, x(\sigma, \phi)(\xi))$, $\sigma \leqslant \xi \leqslant t$ 时,有 $\dot{V}(t, x(\sigma, \phi)(t)) \leqslant h(t)H(V(t, x(\sigma, \phi)(t)))$. 则方程 (1) 的零解为一致稳定.

这个推论改进了文献 [1] 中定理 4.1 的结果.

定义 设 $f(t, \phi)$ 为 $R^+ \times C_H \to R^n$ 的连续泛函, $C_H = \{\phi : \phi \in C, |\phi| \leqslant H\}$, 如果 $\phi(0)^T f(t, \phi)$ 在 $R^+ \times C_H$ 上有上界(或有下界),则称 $f(t, \phi)$ 为第一类半有界(或第二类半有界). 如果 $f(t, \phi)$ 是第一类半有界或第二类半有界,则称 $f(t, \phi)$ 为半有界.

设 $P(t, \phi)$ 为 $R^+ \times C_H \to R^+$ 的连续泛函,对给定的 $V(t, \phi)$ 及任何的 $b > a > 0$, 有 $\inf\limits_{a \leqslant V(t, \phi) \leqslant b} [P(t, \phi) - V(t, \phi)] > 0$. 设 w 为 $R^+ \to R^+$ 的连续非减函数,当 $s > 0$ 时 $w(s) > 0$.

定理 3 若存在上述的函数 u、v、V、P 及 w 满足下列的条件:

(i) 对任何的 $t \geqslant 0$ 及 $\phi \in C_H$, 有

$$u(|\phi(0)|) \leqslant V(t, \phi) \leqslant v(|\phi|);$$

(ii) 对任何的 $\sigma \geqslant 0$ 及 $\phi \in C_H$, 存在 $r_0 \in [0, r]$ 及 $\lambda \geqslant 1$, 使得当 $t \in [\sigma, \sigma + r_0)$ 且 $V(t, x_t(\sigma, \phi)) \geqslant \lambda v(|\phi|)$ 时有 $\dot{V}(t, x_t(\sigma, \phi)) \leqslant 0$; 当 $t \geqslant \sigma + r_0$ 且 $P(t, x_t(\sigma, \phi)) > V(\xi, x_\xi(\sigma, \phi))$, $t - r_0 \leqslant \xi \leqslant t$ 时,有 $\dot{V}(t, x_t(\sigma, \phi)) \leqslant -w(|x(\sigma, \phi)(t)|)$;

(iii) $f(t, \phi)$ 为半有界. 则方程 (1) 的零解为一致渐近稳定.

设 $F(t, s)$ 是 $R^+ \times R^+ \to R^+$ 的连续函数,关于 s 是非减的,当 $s > 0$ 时 $F(t, s) > 0$.

对给定的 $a > 0$, 设 $M(a) = \max\left\{\sup\limits_{\substack{t \geqslant 0 \\ |\phi(0)| \leqslant H}} \phi(0)^T f(t, \phi), \frac{a^2}{r}\right\}$, $-m(a) = \min\left\{\inf\limits_{\substack{t \geqslant 0 \\ |\phi(0)| \leqslant H}} \cdot \phi(0)^T f(t, \phi), -\frac{a^2}{r}\right\}$.

定理 4 若存在上述的函数 u、v、V、P 及 F 满足下列的条件:

(i) 对任何的 $t \geqslant 0$ 及 $\phi \in C_H$, 有

$$u(|\phi(0)|) \leqslant V(t, \phi) \leqslant v(|\phi(0)|);$$

(ii) 对任何的 $\sigma \geqslant 0$ 及 $\phi \in C_H$, 存在 $r_0 \in [0, r]$ 及 $\lambda \geqslant 1$, 使得当 $t \in [\sigma, \sigma + r_0)$ 且 $V(t, x_t(\sigma, \phi)) \geqslant \lambda v(|\phi|)$ 时, 有 $\dot{V}(t, x_t(\sigma, \phi)) \leqslant 0$, 当 $t \geqslant \sigma + r_0$ 且 $P(t, x_t(\sigma, \phi)) > V(\xi, x_\xi(\sigma, \phi))$, $t - r_0 \leqslant \xi \leqslant t$ 时,有 $\dot{V}(t, x_t(\sigma, \phi)) \leqslant -F(t, |x(\sigma, \phi)(t)|)$;

(iii) 对 $a > 0$, 存在正整数 K, 使得对任何 $\bar{t} \geqslant 0$ 及任何 $t_i \in [\bar{t} + (2i-1)r, \bar{t} + 2ir]$, $i = 1, 2, \cdots\cdots$, 有下列两种情形之一成立:

(a) 当 $f(t, \phi)$ 为第一类半有界时, $\sum\limits_{i=1}^{k} \int_{t_i - \frac{a}{2M(a)}}^{t_i} F(t, a)dt \geqslant v(H)$,

(b) 当 $f(t, \phi)$ 为第二类半有界时, $\sum\limits_{i=1}^{k} \int_{t_i}^{t_i + \frac{a}{2m(a)}} F(t, a)dt \geqslant v(H)$.

则方程 (1) 的零解为一致渐近稳定.

定理 3 和定理 4 均改进了文献 [1] 中定理 2.1 的相应结果.

下面的定理 5 把定理 3 中的条件 (i) 略为加强,便可去掉定理 3 中的条件 (iii), 这是文献 [2]中的结果的推广.

设 $W_1, W_2, W_3, W : [0, \infty) \to [0, \infty)$ 为连续非减函数,当 $s > 0$ 时 $W_i(s) > 0$, $W(s) >$

0; $W_i(0)=0$, $(i=1,2,3)$, 对 $\phi\in C$, 定义 $|||\phi|||=\left(\sum_{i=1}^{n}\int_{-r}^{0}\phi_i^2(s)ds\right)^{\frac{1}{2}}$, ϕ_i 表示ϕ的分量.

定理 5 如果存在上述的函数 W_1, W_2, W_3, W, P 及 V 满足下列条件:

(i) $W_1(|\phi(0)|)\leqslant V(t,\phi)\leqslant W_2(|\phi(0)|)+W_3(|||\phi|||)$, $t\geqslant 0$, $\phi\in C_H$;

(ii) 对任何的 $\sigma\geqslant 0$ 及 $\phi\in C_H$, 存在 $r_0\in[0,r]$ 及 $\lambda\geqslant 1$, 使得当 $t\in[\sigma,\sigma+r_0)$ 且 $V(t,x_t(\sigma,\phi))\geqslant\lambda[W_2(|\phi|)+W_3(|||\phi|||)]$ 时, 有 $\dot V(t,x_t(\sigma,\phi))\leqslant 0$; 当 $t\geqslant\sigma+r_0$ 且 $P(t,x_t(\sigma,\phi))>V(\xi,x_\xi(\sigma,\phi))$, $t-r_0\leqslant\xi\leqslant t$ 时, 有 $\dot V(t,x_t(\sigma,\phi))\leqslant -W(|x(\sigma,\phi)(t)|)$. 则方程 (1) 的零解为一致渐近稳定.

例 1 考察纯量方程

$$\dot x(t)=-a(t)x(t)+b(t)x(t-r),\tag{2}$$

其中 $a(t)$、$b(t)$ 为连续函数, $a(t)\geqslant\delta>0$, 且在 $[0,\infty)$ 上无界, $|b(t)|\leqslant M$, $0<M<\delta$.

由于 $f(t,\phi)=-a(t)\phi(0)+b(t)\phi(-r)$ 在 $[0,\infty)$ 上无界, 故用文献 [1] 中的定理 2.1 不能判定其稳定性, 但 $f(t,\phi)$ 是半有界的, 用定理 3 可判定方程 (2) 的零解是一致渐近稳定的.

例 2 考察纯量方程

$$\dot x(t)=-ax^3(t)+bx^3(t-1)+\frac{g(x(t))}{1+t^2}\Big[-\frac{1}{4}x^4(t)-\frac{a}{2}\int_{-1}^{0}x^6(t+\theta)d\theta$$
$$+\frac{1}{2}x^4\left(t-\frac{1}{2}\right)+a\int_{-\frac{1}{2}}^{0}x^6\left(t-\frac{1}{2}+\theta\right)d\theta\Big],\tag{3}$$

其中 a 和 b 为正常数, $a>b$, $g(x)$为连续函数, 当 $x\neq 0$ 时 $xg(x)>0$, $g(0)=0$, 又存在 $M>0$ 使 $xg(x)<M$.

方程 (3) 用过去的李雅普诺夫泛函型定理或拉什密辛型定理都无法判定其稳定性. 但若用本文的定理 2, 并取 $V(\phi)=\frac{1}{4}\phi^4(0)+\frac{a}{2}\int_{-1}^{0}\phi^6(\theta)d\theta$, $u(s)=\frac{1}{4}s^4$, $v(s)=\frac{1}{4}s^4+\frac{a}{2}\cdot s^6$, $h(t)=\frac{1}{1+t^2}$, $H(V)=MV$, 则不难知道方程 (3) 的零解是稳定的.

参 考 文 献

[1] Hale, J. K., *Theory of Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1977.

[2] 温立志, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 85(1982), 4: 533—538.