中 国 科 学

1983 年 9 月　　A 辑　　第 9 期

一个避免奇点的振荡式反弹宇宙模型

许殷彦

(北京大学计算机科学技术系)

刘辽

(北京师范大学物理系)

摘　　要

对于$K>0$的经典 Friedmann 时空(有奇点)，求其共形不变的能动张量的反常迹(相应于背景时空真空涨落的单圈项)和经典作用量Γ_0的量子修正项Γ_1，从而导出了一个半经典的 Einstein 场方程. 选用合理的边界条件,解此方程,得到了一个能够避免奇点的、时间对称的振荡式反弹的宇宙解.

一、引　　言

按照奇异性的边界理论,奇异性是一切非类空测地线不可扩展的边界. 因此,宇宙奇点应表示宇宙演化在时间上有一个开始或终结. 一切事物的因果序列性在这里被割断了. 显然,这在物理学上是难以被人们接受的,宇宙的奇点是否可以避免? 按奇点定理[1],这涉及在宇宙的早期(或叫尺寸很小时期)经典的 Einstein 重力场方程和强能条件等等是否成立. Bekenstein 曾指出[2],即使在经典理论的范围内,强能条件也可能受到破坏,本文指出,若考虑到早期宇宙物质场真空的量子单圈效应对经典 Einstein 场方程的修正,宇宙奇点是可以避免的. 并且的确存在一个满足一切合理要求的无奇点的、时间对称的、振荡式反弹的宇宙解.

二、反　常　迹

经典的 $K>0$, $K=0$ 和$K<0$ 的 Friedmann 度规(有奇点)依次为:

$$ds^2=a^2(\eta)(d\eta^2-d\chi^2-\sin^2\chi d\theta^2-\sin^2\chi\sin^2\theta d\phi^2),$$
$$ds^2=a^2(\eta)(d\eta^2-dx^2-dy^2-dz^2),$$
$$ds^2=a^2(\eta)(d\eta^2-d\chi^2-\sinh^2\chi d\theta^2-\sinh^2\chi\sin^2\theta d\phi^2). \tag{2.1}$$

认为 $a(\eta)$ 的量纲为长度,则η, χ, θ, ϕ 为无量纲的实参数. 由 (2.1) 式得

$$R_0^0=-\frac{3}{a^4}(a\ddot{a}-\dot{a}^2),$$

本文 1982 年 3 月 26 日收到，1983 年 5 月 30 日收到修改稿.

$$R_1^1 = R_2^2 = R_3^3 = -\frac{1}{a^4}(a\ddot{a} + \dot{a}^2 + 2a^2\epsilon),$$

$$R = -\frac{6}{a^3}(\ddot{a} + a\epsilon), \qquad C_{\mu\nu\lambda\tau} = 0, \tag{2.2}$$

式中 R_0^0, R_1^1 等是 Ricci 张量，R 是标量曲率，$C_{\mu\nu\lambda\tau}$ 是 Weyl 张量 $\epsilon = +1, 0, -1$ 依次对应于 $K > 0$, $K = 0$, $K < 0$ 的 Friedmann 时空.

共形不变物质场的能动张量 $T_{\mu\nu}$ 的真空平均值的反常迹为[3][4][5]:

$$T = \alpha\Box R + \beta\left(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - \frac{1}{3}R^2\right) + \gamma C_{\mu\nu\lambda\tau}C^{\mu\nu\lambda\tau}, \tag{2.3}$$

式中 α, β, γ 为无量纲常数. 满足关系

$$3\alpha - \beta - 2\gamma = 0, \tag{2.4}$$

对于标量场、中微子场和电磁场依次为:

$$\frac{1}{2880\pi^2}\left\{\begin{array}{lll} \alpha & \beta & \\ 1 & 1 & \text{标量场} \\ 6 & 11 & \text{中微子场} \\ 12 & 62 & \text{电磁场} \end{array}\right. \tag{2.5}$$

将 (2.2) 式代入 (2.3) 式,可得 Friedmann 时空的反常迹

$$T = -\frac{6\alpha}{a^6}\left[aa^{(4)} - 4\dot{a}a^{(3)} + \frac{6}{a}\dot{a}^2\ddot{a} - 3\ddot{a}^2 + (2\dot{a}^2 - 2a\ddot{a})\epsilon\right]$$

$$- \frac{12\beta}{a^6}\left[\frac{1}{a}\dot{a}^2\ddot{a} - \frac{1}{a^2}\dot{a}^4 + (\dot{a}^2 - a\ddot{a})\epsilon\right]. \tag{2.6}$$

当 $\epsilon = 0$ 时, (2.6) 式化为文献 [5] 的 (3.9) 式.

三、作 用 量

设宇宙中充满着共形不变的辐射场，对于辐射场能量密度 $\rho_r = \bar{\rho}_r/a^4$，其中 $\bar{\rho}_r$ 是一个常数. 辐射场的作用量为:

$$-\int\rho_r\sqrt{-g}d^4x = -\int(\bar{\rho}_r a^{-4})\sqrt{-g}d^4x = -V\int\bar{\rho}_r d\eta. \tag{3.1}$$

对于 $K > 0$ 的 Friedmann 时空,

$$V = \int_0^\pi d\chi\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi}d\phi\sin\theta\sin^2\chi = 2\pi^2. \tag{3.2}$$

总的经典作用量(总的零圈有效作用量)为:

$$\Gamma_0 = \frac{1}{l^2}\int R\sqrt{-g}d^4x - \int\rho_r\sqrt{-g}\,d^4x$$

$$= -V\int d\eta\left[\frac{6}{l^2}(\dot{a}^2 - a^2\epsilon) + \bar{\rho}_r\right], \tag{3.3}$$

式中 l 是 Planck 长度，$l = \left(\frac{16\pi\hbar G}{C^3}\right)^{1/2} = 1.2 \times 10^{-32}$ 厘米.

考虑了单圈项的贡献以后,总的有效作用量可表示为:

$$\Gamma(g) = \Gamma_0(g) + \Gamma_1(g), \tag{3.4}$$

其中 $\Gamma_1(g)$ 为单圈项对作用量的贡献，Γ_1 与反常迹的关系为：

$$T = \frac{2}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \frac{\delta \Gamma_1}{\delta g_{\mu\nu}}. \tag{3.5}$$

利用 (2.6) 式，解 (3.5) 式可得 Γ_1

$$\Gamma_1(a) = V\int d\eta \left[-3\alpha\left(\frac{\ddot a}{a}\right)^2 - 6\alpha\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 \epsilon + \beta\left(\frac{\dot a}{a}\right)^4 - 6\beta\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 \epsilon\right]. \tag{3.6}$$

当 $\epsilon = 0$ 时，(3.6) 式化简为文献 [5] 的 (3.10) 式.

将 (3.3) 和 (3.6) 式代入 (3.4) 式可得

$$\Gamma(a) = V\int d\eta \left[-\frac{6}{l^2}(\dot a^2 - a^2\epsilon) - \bar\rho_r - 3\alpha\left(\frac{\ddot a}{a}\right)^2 - 6\alpha\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2\epsilon \right.$$
$$\left. + \beta\left(\frac{\dot a}{a}\right)^4 - 6\beta\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2\epsilon\right]. \tag{3.7}$$

在 CGS 单位制中 $\bar\rho_r$ 应改写为 $\frac{1}{c\hbar}\bar\rho_r$，$\Gamma(a)$ 是一个无量纲的量.

四、场 方 程

令

$$a = lb, \tag{4.1}$$

l 是 Planck 长度，b 是一个无量纲的实参数，则 (3.7) 式可以改写为：

$$\Gamma(b) = V\int d\eta \mathscr{L}(b, \dot b, \ddot b), \tag{4.2}$$

其中

$$\dot b = \frac{db}{d\eta}, \qquad \ddot b = \frac{d^2 b}{d\eta^2},$$

等等，

$$\mathscr{L}(b, \dot b, \ddot b) = -6(\dot b^2 - b^2\epsilon) - \bar\rho_r - 3\alpha\left(\frac{\ddot b}{b}\right)^2 - 6\alpha\left(\frac{\dot b}{b}\right)^2\epsilon$$
$$+ \beta\left(\frac{\dot b}{b}\right)^4 - 6\beta\left(\frac{\dot b}{b}\right)^2\epsilon. \tag{4.3}$$

经典几何应满足

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta b} = 0. \tag{4.4}$$

由于 $\mathscr{L}(b, \dot b, \ddot b)$ 和 η 无关，一次积分后可得：

$$E = -\dot b \frac{d}{db}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ddot b}\right) + \ddot b \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ddot b} + \dot b \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot b} - \mathscr{L}, \tag{4.5}$$

E 是积分常数. 将 (4.3) 式代入 (4.5) 式可得：

$$E = -6\dot b^2 - 6b^2\epsilon + \bar\rho_r + 6\alpha\frac{\dot b b^{(3)}}{b^2} - 12\alpha\frac{\dot b^2 \ddot b}{b^3} - 3\alpha\left(\frac{\ddot b}{b}\right)^2$$
$$- 6\alpha\left(\frac{\dot b}{b}\right)^2\epsilon + 3\beta\left(\frac{\dot b}{b}\right)^4 - 6\beta\left(\frac{\dot b}{b}\right)^2\epsilon. \tag{4.6}$$

(4.6) 式是计及量子单圈效应以后半经典的 Einstein 重力场方程;这是一个关于 $b(\eta)$ 的三阶四次非线性常微分方程.

五、边界条件和解

现在我们主要研究 (4.6) 式在 $\epsilon=+1$ 情形下的解. 纯经典的 $K>0$ 的 Friedmann 宇宙是一个自奇点膨胀至极大尺寸，然后又收缩为奇点的宇宙模型. 奇点表示宇宙在演化的过程中有一个时间的开始和终结. 这在物理学上和哲学上是难以被人们接受的. 宇宙论中的奇点是否可以避免呢? 以及如何去避免它. 这是一个值得探讨的问题.

本节我们将具体地研究如何避免奇点的问题.

一个没有奇点、时间对称、振荡式反弹的宇宙解,应该满足下述的边界条件.

1. 反弹点(或叫极小尺寸)的边界条件

$$b(0)=b_0>0,\qquad \dot{b}(0)=0,\qquad \ddot{b}(0)>0, \tag{5.1a}$$

b_0 是宇宙的最小尺寸，$b_0>0$ 就避免了奇点，在反弹点 $\dot{b}(0)$ 应该等于零，$\ddot{b}(0)$ 应该大于零.

在反弹点 $b(\eta)$ 可以展成 Taylar 级数,

$$b(\eta)=b_0+\dot{b}(0)\eta+\frac{1}{2}\ddot{b}(0)\eta^2+\frac{1}{3!}b^{(3)}(0)\eta^3+\cdots.$$

为了使解对于时间对称,进一步应该要求

$$b^{(3)}(0)=0. \tag{5.1b}$$

2. 极大尺寸的边界条件

$$b(\eta_m)=b_m,\qquad \dot{b}(\eta_m)=0,\qquad \ddot{b}(\eta_m)<0. \tag{5.2}$$

宇宙处于较大尺寸或极大尺寸，量子单圈效应可以忽略不计. 这从 (4.6) 式可以直接看出. 所有包含 α 和 β 的项可以忽略不计. 这时 (4.6) 式化简为:

$$E-\bar{\rho}_r=-6\dot{b}^2-6b^2\epsilon. \tag{5.3}$$

将 (5.3) 式与文献 [6] 的经典 Friedmann 时空的 Einstein 重力场方程比较，可知不论 ϵ 取值 $+1$, 0, 或 -1, 积分常数 E 应该等于零.

显然,在较大尺寸 ($\epsilon=+1,0,-1$) 或极大尺寸 ($\epsilon=1$) 的范围, (4.6) 式的解(当 η 很大时)趋于经典 Friedmann 度规.

本文的核心是论证 (4.6) 式存在一个在极小尺寸的非奇异解. 由边界条件 (5.1) 式, Einstein 重力场方程 (4.6) 化简为:

$$3\alpha\left(\frac{\ddot{b}}{b}\right)^2+6b^2\epsilon-\bar{\rho}_r=0. \tag{5.4}$$

当 $\epsilon=0$, (5.4) 式可化为:

$$\ddot{b}-\left(\frac{\bar{\rho}_r}{3\alpha}\right)^{1/2}b=0. \tag{5.5}$$

解之,得

$$b=b_0\cosh(p_0\eta), \tag{5.6}$$

式中

$$p_0 = \left(\frac{\bar{\rho}_r}{3\alpha}\right)^{1/4}. \tag{5.7}$$

在 CGS 单位制中，$p_0 = \left(\frac{\bar{\rho}_r}{3\alpha c\hbar}\right)^{1/4}$. 由 $\eta = 0$，b 为极小值知：b_0 不能为负，更不能为零，因而只能大于零. 这就避免了当 $\eta = 0$ 时的奇点解.

当 $\epsilon = +1$，(5.4) 式化为

$$3\alpha\ddot{b}^2 - \bar{\rho}_r b^2 + 6b^4 = 0. \tag{5.8}$$

进一步取近似，上式变为：

$$\ddot{b} - \left(\frac{\bar{\rho}_r}{3\alpha}\right)^{1/2} b\left(1 - \frac{3b^2}{\bar{\rho}_r}\right) = 0. \tag{5.9}$$

(5.9) 式的近似解为：

$$b = b_0 \cosh(p_+\eta), \tag{5.10}$$

其中

$$p_+ = \left(\frac{\rho_r}{3\alpha}\right)^{1/4}\left(1 - \frac{3b_0^2}{\bar{\rho}_r}\right)^{1/2}. \tag{5.11}$$

当 $\epsilon = -1$，(5.4) 式化为：

$$3\alpha\ddot{b} - \bar{\rho}_r b^2 - 6b^4 = c. \tag{5.12}$$

进一步取近似，上式变为：

$$\ddot{b} - \left(\frac{\bar{\rho}_r}{3\alpha}\right)^{1/2} b\left(1 + \frac{3b^2}{\bar{\rho}_r}\right) = 0. \tag{5.13}$$

(5.13) 式的近似解为：

$$b = b_0 \cosh(p_-\eta), \tag{5.14}$$

其中

$$p_- = \left(\frac{\bar{\rho}_r}{3\alpha}\right)^{1/4}\left(1 + \frac{3b_0^2}{\bar{\rho}_r}\right)^{1/2}. \tag{5.15}$$

总之，不论经典的 Friedmann 宇宙(有奇点)是闭合的或是开放的. 当计入量子单圈修正以后，都能避免奇点. 在反弹点附近，零级近似解基本上是一样的.

特别对于 $K > 0$ 的 Friedmann 宇宙. 计入量子单圈修正以后，就导致没有奇点、时间对称、振荡式反弹的宇宙模型.

关于 (4.6) 式的非渐近解析解和数值解的工作，将在以后给出.

六、讨　　论

一个振荡宇宙模型应该满足两点要求：即首先宇宙应该是闭合的，其次，应该存在某种反弹机制.

如果中微子的静止质量的确可以提供所需的缺失质量. 第一个要求可以得到满足. 至于第二个要求，由本文可知：物质场的量子单圈效应正好提供了所需的反弹机制.

应当指出，所有振荡宇宙模型都存在一个尚未解决的严重困难问题，即振荡的持续问题. 如果可以把大宇宙看作一个孤立系统. 那么真实的宇宙内必存在某种耗散机制. 以使不论宇宙膨胀或收缩，宇宙的熵都将增加. Weinberg 曾明确指出[7]：“宇宙每开始一个新的循环时，

新的光子-核子比值将会增大一些，现在这个比值无疑是巨大的，但却不是无限的．所以，很难同意，宇宙在此以前曾经经历了无限多次循环”．

看来，一个在时间上无始无终的振荡式宇宙模型，和一个在时间上有始有终的大爆炸宇宙模型同样存在着严重的困难．正是由于这些困难，吸引着我们继续对大宇宙进行探索．

参 考 文 献

[1] Hawking, S. W. & Ellis, G. F. R., *The Large Scale Structure of Spacetime*, London, 1973.
[2] Bekenstein, J. D., *Ann. Phys.* (*N. Y.*), **82**(1974), 535.
Phys. Rev., **D11** (1975), 2072.
[3] Duff, M. J., *Nucl. Phys.*, **B125** (1977), 334.
[4] Christensen, S. M., *Phys. Rev.*, **D17**(1978), 946.
[5] Fischetti, M. V., Hartle, J. B. & Hu, B. L., *ibid.*, **D20**(1979), 1757.
[6] Rees, M., Ruffini, R. & Wheeler, J. A., *Black Holes. Gravitational Waves and Cosmology*, New York, London, Paris, 1974, 151.
[7] Weinberg, S., *The First Three Minutes*, Basic Books, Ins. Publishers, New York, 1977.
[8] 许殿彦、刘辽，科学通报，**28**(1983)，254.