

小行星共振轨道的稳定性*

周礼勇 ** 周济林 孙义燧

(南京大学天文系, 南京 210093)

摘要 研究描述小行星运动的一个映射模型. 发现在相空间的混沌海和混合区域中的轨道扩散分别遵循指数律和代数律, 而小扰动对扩散过程有不可忽视的影响. 应用到小行星轨道运动问题时, 该映射的不动点的位置、稳定性以及轨道扩散的性质定性地解释了小行星在主带(特别是在与木星轨道发生一阶共振处)的分布特征.

关键词 小行星 映射方法 轨道扩散

轨道扩散(混沌输运)现象在等离子体物理、加速器物理以及流体力学等众多领域都有重要意义, 是近年来的一个研究热点, 关于此问题已经有一些出色的结果^[1~3]. 在研究天体力学问题时, 人们可以用相空间中轨道扩散的性质来解释火星和木星之间主带小行星的空间分布, 这种分布特征(空隙和聚集)相信是共振机制的动力学结果^[4~6]. 但实际上, 对处于与木星发生 3:2, 4:3 平运动轨道共振位置的两处小行星聚集, 以及 2:1 共振位置的“Hecuba 空隙”, 至今为止都没有圆满的结果. 另一方面, 在研究动力系统轨道扩散现象时, 映射方法与直接积分微分方程相比有着理论分析简单、数值计算速度快等明显优势, 因而被广泛采用. 映射是将描述动力系统的微分方程合理离散化之后得到的, 在这一方面, 也有不少工作^[7,8]. 本文研究一个映射模型中的轨道扩散现象, 并应用此映射讨论主带小行星的分布.

1 映射模型

零质量的试验体在太阳和行星的引力作用下运动, 其中行星质量 m 远小于太阳质量 M_{\odot} , 并以半长径 a_p , 偏心率 $e_p = 0$ 的圆轨道绕太阳运转. 由这样的三体问题的一个交会型的解^[9]出发, 假设试验体的偏心率 e 和半长径 a 满足条件 $e \ll |a - a_p| / a_p \ll 1$, Duncan 等人构造了一个映射^[10], 描述试验体在与行星的一次交会中的轨道根数的变化. 相邻两次交会之间, 行星的摄动可以忽略, 试验体的运动是 Kepler 运动.

引入记号

$$\varepsilon = \frac{a - a_p}{a_p}, \quad z = e \exp(i \bar{\omega}), \quad (1)$$

2001-05-18 收稿

* 国家自然科学基金资助项目(批准号: 19633010, 19903001)

** E-mail: zhoully@nju.edu.cn

其中 $\bar{\omega}$ 是试验体的近日点经度。此时该系统的 Jacobi 积分可以写成

$$\gamma = \frac{3}{4}\varepsilon^2 - |\mathbf{z}|^2. \quad (2)$$

记第 n 次交会时的经度为 λ_n , 映射有如下形式:

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= z_n + \frac{i g \exp(i\lambda_n)}{\varepsilon_n^2} \operatorname{sgn}(\varepsilon_n) \frac{m}{M_\odot}, \\ \varepsilon_{n+1} &= \varepsilon_n \sqrt{1 + \frac{4(|z_{n+1}|^2 - |z_n|^2)}{3\varepsilon_n^2}}, \\ \lambda_{n+1} &= \lambda_n + 2\pi f(\varepsilon_{n+1}), \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $g = 2.23956667$, $\operatorname{sgn}(\varepsilon_n)$ 是 ε_n 的符号, $f(\varepsilon) \equiv |(1+\varepsilon)^{-3/2} - 1|^{-1}$ 是函数。可以证明倘若 ε_n 与 ε_1 相差不大, 将映射的第一个公式中的 ε_n 替换成 ε_1 不会降低映射的近似精度, 但可以使其成为辛映射^[10]。引入新变量

$$y_n \equiv z_n \exp\{-i[\lambda_n - \pi f(\varepsilon_n) + \pi]\}, \quad (4)$$

可以将映射写成复 y 平面上的二维映射形式:

$$\begin{aligned} y_{n+1}^r &= y_n^i \sin(\psi_n + \psi_{n+1}) + y_n^r \cos(\psi_n + \psi_{n+1}) - C \sin \psi_{n+1}, \\ y_{n+1}^i &= y_n^i \cos(\psi_n + \psi_{n+1}) - y_n^r \sin(\psi_n + \psi_{n+1}) - C \cos \psi_{n+1}, \end{aligned} \quad (5)$$

此处 y_n^r , y_n^i 分别是 y_n 的实部和虚部; $\psi_k \equiv \psi_k(y_k^r, y_k^i, \gamma)$ ($k = n, n+1$) 是 y_k^r , y_k^i 的函数, γ 是其参数; $C \equiv \operatorname{sgn}(\varepsilon_1) gm / (M_\odot \varepsilon_1^2)$ 是常数。映射(5)在复平面上关于实轴对称。

这个映射模型可以推广到包括更多行星摄动的情形。假设有两颗行星, 它们的轨道半长径和质量分别是 a_i , a_o 和 m_i , m_o (下标 i 和 o 分别表示两颗行星轨道的内外相对位置), 而试验体的轨道离这两条轨道都不远。不妨假定该试验体所经历的第 n 次交会是与行星 b ($b \in \{i, o\}$) 的交会, 令 λ_n , t_n 是交会的经度和时间, 而 a_n , z_n 是交会前试验体轨道的半长径和复偏心率。此时可以用推广的映射描述试验体在这两颗行星摄动下的轨道运动, 推广的映射写成如下形式:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{b,n} &= \frac{a_n - a_b}{a_b}, \\ z_{n+1} &= z_n + \frac{i g \exp(i\lambda_n)}{\varepsilon_{b,1}^2} \operatorname{sgn}(\varepsilon_{b,1}) \frac{m_b}{M_\odot}, \\ \varepsilon_{b,n+1} &= \varepsilon_{b,n} \sqrt{1 + \frac{4(|z_{n+1}|^2 - |z_n|^2)}{3\varepsilon_{b,n}^2}}, \\ a_{n+1} &= a_b (1 + \varepsilon_{b,n+1}), \\ \Omega_{n+1} &= \sqrt{\frac{GM_\odot}{a_{n+1}^3}}. \end{aligned} \quad (6)$$

第 $n+1$ 次交会的经度和时间则是

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1} &= \lambda_n + \Omega_{n+1} \min(\Delta t_i, \Delta t_o), \\ t_{n+1} &= t_n + \min(\Delta t_i, \Delta t_o), \end{aligned} \quad (7)$$

其中

$$\Delta t_b = \begin{cases} \frac{Q(\Omega_b t_n - \lambda_n)}{\Omega_{n+1} - \Omega_b}, & \text{当 } \Omega_{n+1} - \Omega_b > 0, \\ \frac{Q(\lambda_n - \Omega_b t_n)}{\Omega_b - \Omega_{n+1}}, & \text{当 } \Omega_{n+1} - \Omega_b < 0, \end{cases} \quad (8)$$

而 $\Omega_b = (GM_\odot/a_b^3)^{1/2}$, $Q(x)$ 是 $x + 2\pi k$ (k 取整数) 的最小正值. 为简单起见, 我们称映射(3)为单行星映射, 而称映射(6)和(7)式为双行星映射. 在双行星映射中, 除太阳之外, 两颗行星中的某一颗通常在试验体轨道演化中起更加重要的作用, 而来自另一颗行星相对较小的影响就被视为小扰动.

2 映射中的扩散

我们计算 $|\Delta z| = |z_{n+1} - z_n|$ 来估计一次映射迭代中 z 的改变量. 结果表明, 当三体中的行星为火星、木星或土星时, Δz 分别满足如下关系: $|\Delta z| < 5.32 \times 10^{-7}$, $|\Delta z| > 1.60 \times 10^{-2}$, $|\Delta z| > 1.49 \times 10^{-3}$. 所以我们选择木星 ($m_i = 9.54785 \times 10^{-4} M_\odot$, $a_i = 5.203$ AU) 作为主要摄动天体, 而将土星 ($m_o = 2.85884 \times 10^{-4} M_\odot$, $a_o = 9.555$ AU) 的影响作为小扰动处理. 本节主要讨论映射相空间中的轨道扩散现象, 它与主带小行星运动的稳定性直接相关. 首先, 我们研究单行星(木星)映射中的轨道扩散, 然后利用双行星映射讨论土星的小扰动对轨道扩散的影响.

2.1 单行星映射

映射(3)式的相图中包含稳定的岛屿、混沌海以及由 KAM 岛屿、Cantor 环面(Cantorus)和混沌轨道等构成的混合区域(简称为混合区). 为了研究在各种不同区域的轨道扩散情况, 我们在预先选定的某个区域中随机地“撒” N_0 个初始点(轨道), 然后跟踪这些轨道的演化. 在演化过程中如果一条轨道的 $e = |z| > 0.25$, 我们就认为它已经逃逸^[11]不再继续跟踪, 而那些经过 10^{10} a 的演化后仍旧没有逃逸的轨道则被认为是稳定的, 稳定轨道的总数记为 N_S . 记录在时刻 T 尚未逃逸的轨道数目 N_T , 并定义 T 时刻的轨道残余数 $N(T) = N_T - N_S$.

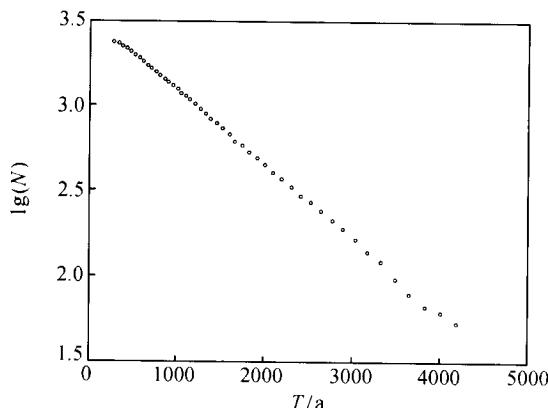


图 1 混沌海中轨道残余数随时间的变化

我们发现混沌海中的轨道残余数随时间按指数律衰减(图 1):

$$N(T) \sim 10^{-\alpha T}. \quad (9)$$

混合区中的逃逸规律则要复杂一些, 图 2 展示的是一个典型的数值结果. 散布于混合区中的无穷嵌套的岛屿和 Cantor 环面结构导致残余数随时间以代数律衰减^[12]:

$$N(T) \sim T^{-\beta}. \quad (10)$$

图 2 中在 $T_c \approx 10^{5.5}$ a 处有一个明显的“转折”, 在此前后的指数 β 不同. 这种“一种规律两个指数”的现象可以用所谓“相空间形变”解释: 在特定的动力系统参数条件下, 旧的 KAM 环面破裂成有较强黏滞效应的残余物, 轨道可能

花费较长时间穿过它们, 从而形成另一个逃逸指数^[13].

总之, 不变曲线上的轨道永远不会逃逸; 混沌海中轨道具有正的 Lyapunov 特征指数, 按指数律快速逃逸; 只有那些起源于混合区的轨道有可能表现出长时间的演化, 决定系统的长时间尺度的扩散性质.

2.2 双行星映射

研究小扰动对扩散的影响, 可以帮助人们了解作为真实系统近似的简单模型所具有的本质的局限性, 因而是非常重要的研究课题^[14, 15]. 如上文所述, 来自第 2 个行星的摄动

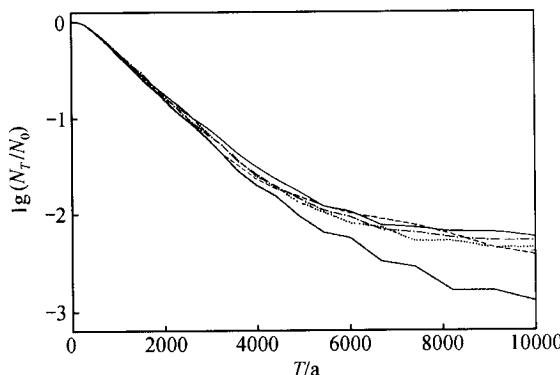


图 3 混沌海中轨道残余数 $N(T)$ 随时间 T 的变化
细线代表没有小扰动的情况. 粗线、划线、点划线和点线代表有小扰动的情况, 小扰动由位于土星轨道且质量分别为土星质量 m_s ($= 2.85884 \times 10^{-4} M_{\odot}$), $m_s/10$, $m_s/100$ 和 $m_s/1000$ 的行星提供

所以它也只能对扩散速度产生微弱的影响. 在混合区中的情形则与此截然不同.

在混合区里, 即便是强度非常小的扰动, 也会对轨道扩散产生非常显著的影响. 如图 4 所示, 引入小扰动之后, 最终稳定的轨道数目 N_s 下降, 并且在一定范围内, 扩散速度随着扰动强度的增大而上升. 这是因为即使是很小的扰动, 也可能破坏相空间中的 KAM 环面和岛屿, 破坏“黏滞”的 Cantor 环面(图 5), 而它们原本是遏制轨道扩散的障碍. 小扰动可以引发一条轨道能量的显著改变, 促使轨道快速穿

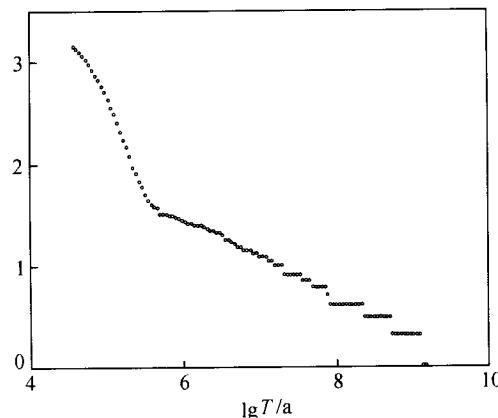


图 2 混合区中轨道残余数随时间的变化

作用可以被认为是对原系统的小扰动, 因而我们可以用双行星映射来研究小扰动对扩散的影响. 土星的质量是 $2.85884 \times 10^{-4} M_{\odot}$, 但为了显示不同强度小扰动对扩散的不同影响, 我们在计算中将它质量中的指数 -4 人为地改变为 -5 , -6 , -7 和 -8 .

数值结果表明小扰动使混沌海中的扩散加速(图 3). 指数律还是指数律, 但指数 α 变大了. 图 3 还表明较强的小扰动导致更快的扩散速度, 但差别不大. 同时, 我们也注意到, 当 $T > 2000$ a 时, 扩散的速度慢了下来, 甚至比无扰动的情况更慢, 也就是说, 一定强度的小扰动在某些时候还可能使扩散减速. 实际上, 相空间中的混沌轨道是沿着双曲结构扩散的, 小扰动一般并不能破坏这样的双曲结构,

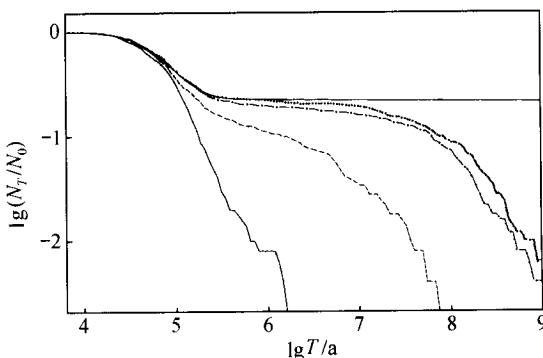


图 4 同图 3, 但初始轨道位于混合区

过黏滞区, 从而在系统的长期演化过程中扮演重要的角色, 甚至起着决定性的作用.

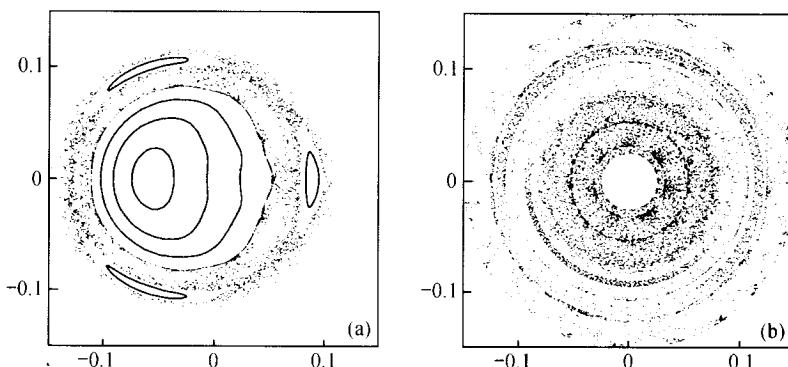


图 5 典型的单行星映射的相平面以及与之相应的双行星映射的“相平面”
(a) 典型的单行星映射的相平面; (b) 与(a)相应的双行星映射的“相平面”, 在(b)中可以看到一些不变曲线被破坏之后的“遗迹”

3 小行星一阶共振轨道稳定性

前文所给出的映射模型可以用来研究主带小行星的运动, 映射(3)的不动点位置和它们的线性稳定性可以定性地解释小行星在主带的分布, 特别地, 该映射模型在讨论处于与木星发生一阶轨道共振的位置的小行星运动时是可靠的^{[16][1]}. 在 2:1, 3:2 和 4:3 共振情况下, 相对半长径 ϵ 分别是 -0.370 , -0.237 和 -0.175 , 虽然 4:3 共振时的 $|\epsilon|$ 比较小, 映射仍然能够较精确地反映试验体偏心率增长的开始阶段的情况, 而这一阶段的轨道演化情况将最终决定小行星的长期稳定性. 本节讨论这 3 个共振区内小行星运动的稳定性.

对每一个共振, 令 a_r 表示共振位置的轨道半长径(木星单位), 在如下的 (a, e) 平面内随机取 N_0 个初始轨道:

$$a_0 \in (a_r - 0.02, a_r + 0.02), \quad e_0 \in (0.0, 0.1). \quad (11)$$

每个轨道都跟踪 10^9 a, 除非它穿越了木星或火星的轨道. 一个轨道只要满足

$$a \in (a_r - 0.02, a_r + 0.02), \quad e \in (0.0, 0.25), \quad (12)$$

就被认为是停留在共振区内. 在时刻 T 停留在共振区内的轨道数目 N_T 被记录下来.

我们注意到一个轨道的 ϵ_n 的值在映射过程中有时会有可观的变化, 而映射(3)式的第 1 式中用 ϵ_1 代替 ϵ_n 之后(3)式才是辛映射, 且这种替换只有在 ϵ_n 变化不大的情况下才不致影响映射的近似程度. 作为一种折衷, 我们在计算过程中“监控” ϵ_n 变化, 一旦它偏离初值 ϵ_1 超过一定范围(5%), 就令当前的 ϵ_n 为 ϵ_1 , 代替原来的初值. 如此一来, 每一次映射迭代仍然是辛(保面积)的, 但整个过程不一定是辛的.

在单行星映射模型中, 数值计算的结果显示 3:2 和 4:3 共振处都有一个持续数百年的共振轨道数目的快速衰减的过程. 此后, 两个共振处 N_T 随时间变化表现出不同的特征(图 6). 而稳定轨道的数目 $N_S = N_T$ ($T = 10^9$ a), 在初始轨道数 N_0 都取 3000 时分别是 $N_S = 864$

1) Zhou L Y, Sun Y S, Zhou J L. Diffusion characters of orbits in the asteroid motion. Appl Math Mech(待发表)

(3:2) 和 $N_S = 40$ (4:3), 反映了 3:2 共振处的运动稳定区域比 4:3 共振处的稳定区域大得多。这与观测事实一致: 人们观测到超过 70 颗小行星处于 3:2 共振区, 在 4:3 共振区则只有区区数颗而已。此外, 在两个共振区轨道扩散的速度也有明显的差别。与上一节类似, 我们发现轨道残余数 $N(T) = N_T - N_S$ 随时间的变化可以用如(10)式的代数律拟合, 数值拟合给出两个指数: $\beta = 0.513$ (3:2) 和 $\beta = 1.02$ (4:3)。还有必要指出, 多数不稳定的轨道都在 10^6 a 之前逃离共振区, 只有少数轨道表现出了长时间的扩散。

至于 2:1 共振, 单行星映射模型中未发现明显的轨道扩散, 特别是在 $T > 1000$ a 之后, 几乎没有轨道从共振区逃离。这与事实不符, 因为在 2:1 共振位置是 Hecuba 空隙。

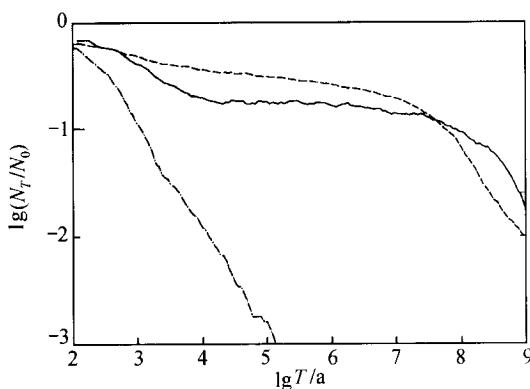


图 6 同图 6,但在双行星映射模型下

3:2 共振情况的 29 要大, 但从图 7 可以看到在 $T = 10^9$ a 附近 2:1 共振情况的扩散速度要比 3:2 共振处的快, 因此可以认为, Hecuba 空隙的出现是非常迟的, 应该在 $T = 10^9$ a 之后。

该映射模型还可以进一步推广使它包含火星的摄动。尽管火星的摄动作用非常小, 数值计算仍然表现出它对系统的长期稳定性的影响: 火星的摄动加速了 2:1 共振处小行星的逃离, 而在一定程度上使 3:2 和 4:3 共振处轨道扩散的过程减速。

4 结果及讨论

本文研究一个描述小行星运动的映射模型, 对映射过程中的轨道扩散现象的研究表明, 相空间中不同的区域有着不同的扩散规律: 混沌海中是指数律, 而在充满小岛屿、Cantor 环面以及混沌轨道的混合区中, 黏滞效应最终使得轨道按代数律扩散。小扰动不会改变混沌海中的指数律, 只是使扩散略微加速。在混合区, 小扰动带来显著的改变, 特别地, 小扰动影响系统的长期演化。我们认为小扰动对扩散现象的影响值得更系统的探讨。

当应用该映射讨论小行星运动时, 我们对映射作了一点改进, 其总体效应是保持每一步映

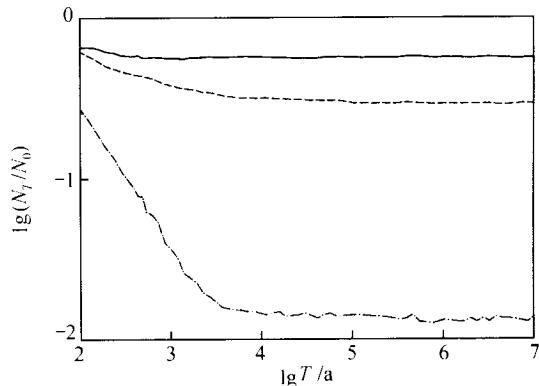


图 6 单行星映射给出的试验体轨道数随时间的变化
实线、划线和点划线分别代表 2:1, 3:2 和 4:3 共振处的情况

在利用双行星映射考虑了土星的摄动作用之后, 情况就不一样了(图 7)。此时, 4:3 共振处的代数律扩散的指数变为 $\beta = 0.964$, 且在 $T = 10^9$ a 时, 只有一个试验体没有逃离共振区(初始轨道数目 N_0 仍然为 3000)。在 3:2 共振区, 轨道扩散得很慢, 到 $T = 10^9$ a 时有 29 个试验体停留在共振区内。至于 2:1 共振, 轨道数在经历最初数万年的快速衰减之后, 几乎保持不变直到 $T = 10^7$ a。此后, 土星小扰动的长期效应开始显现, 以至于在 $T = 10^9$ a 时共振区内只留下 48 个试验体。尽管这个数字比

3:2 共振情况的 29 要大, 但从图 7 可以看到在 $T = 10^9$ a 附近 2:1 共振情况的扩散速度要比 3:2 共振处的快, 因此可以认为, Hecuba 空隙的出现是非常迟的, 应该在 $T = 10^9$ a 之后。

射迭代的辛性质,但在特定的时候改变映射的参数. 我们的计算表明,这个改进使结果更加可信.

单行星映射的数值结果告诉我们,3:2 共振处有着远大于 4:3 共振的稳定区域,而且前者的轨道扩散速度较慢. 双行星映射则揭示了土星摄动的重要作用. 在我们的计算中,土星摄动导致了系统的长期演化,促使 2:1 共振处 Hecuba 空隙的出现. 当然,Hecuba 空隙的起源至今仍然是困扰天文学家的难题^[17,18],我们的简单模型只是说明考虑了土星甚至火星的微弱摄动作用之后,能更好地解释 3 个一阶共振处小行星的数目分布特征.

参 考 文 献

- 1 Meiss J D. Symplectic maps, variational principles, and transport. *Rev Mod Phys*, 1992, 64: 795 ~ 848
- 2 Contopoulos G, Vohlis N. Spectra of stretching numbers and helicity angles. In: Benest D, Froeschlé C, eds. *Analysis and Modelling of Discrete Dynamical Systems*. Newark: Gordon and Breach Science Publishers, 1998. 55 ~ 90
- 3 Sun Y S, Fu Y N. Diffusion character in four-dimensional volume-preserve map. *Cel Mech & Dyn Astron*, 1999, 73: 249 ~ 258
- 4 Dvorak R, Muller P, Kallrath J. A survey of the dynamics of main-belt asteroids. I. *Astron Astrophys*, 1993, 274: 627 ~ 641
- 5 Morbidelli A. On the Kirkwood gap at the 2:1 commensurability with Jupiter. *Astron J*, 1996, 111: 2453 ~ 2461
- 6 Nesvorný D, Ferraz-Mello S. On the asteroidal population of the first-order Jovian resonances. *Icarus*, 1997, 130: 247 ~ 258
- 7 Hadjidemetriou J D. Symplectic maps and their use in celestial mechanics. In: Benest D, Froeschlé C, eds. *Analysis and Modelling of Discrete Dynamical Systems*. Newark: Gordon and Breach Science Publishers, 1998. 249 ~ 282
- 8 Froeschlé C, Lega E. Modelling mappings: An aim and a tool for the study of dynamical systems. In: Benest D, Froeschlé C, eds. *Analysis and Modelling of Discrete Dynamical Systems*. Newark: Gordon and Breach Science Publishers, 1998. 3 ~ 54
- 9 Hénon M, Petit J M. Series expansions for encounter-type solutions of Hill's problem. *Cel Mech*, 1986, 38: 67 ~ 100
- 10 Duncan M, Quinn T, Tremaine S. The long-term evolution of orbits in the solar system: A mapping approach. *Icarus*, 1989, 82: 402 ~ 418
- 11 Scholl H, Froeschlé C. Asteroidal motion at the 5/2, 7/3 and 2/1 resonances. *Astron Astrophys*, 1975, 42: 457 ~ 461
- 12 Meiss J D, Ott E. Markov-tree model of intrinsic transport in Hamiltonian systems. *Phys Rev Lett*, 1985, 55: 2741 ~ 2744
- 13 Lai Y C, Grebogi C, Blumel R, et al. Algebraic decay and phase-space metamorphosis in microwave ionization of hydrogen Rydberg atoms. *Phys Rev A*, 1992, 45: 8284 ~ 8287
- 14 Pogorelov I V, Kandrup H. Noise-induced phase space transport in two-dimensional Hamiltonian systems. *Phys Rev E*, 1999, 60: 1567 ~ 1578
- 15 Kandrup H E, Pogorelov I V, Sideris I. Chaotic mixing in noisy Hamiltonian systems. *Mon Not R Astron Soc*, 2000, 311: 719 ~ 732
- 16 Zhou L Y, Sun Y S, Zhou J L. Diffusion in a symplectic map with application to asteroid motion. *Chin Phys Lett*, 2000, 17: 708 ~ 710
- 17 Ferraz-Mello S, Michtchenko T A, Roig F. Determinant role of Jupiter's great inequality in the depletion of the Hecuba gap. *Astron J*, 1998, 116: 1491 ~ 1500
- 18 Ferraz-Mello S. Slow and fast diffusion in asteroid belt resonances: A review. *Cel Mech & Dyn Astron*, 1999, 73: 25 ~ 37