

二维 AR(1) 模型的局部影响分析*

吕敏红^{*,1} 王春如² 张慧玲¹

(1. 西安航空学院基础部, 西安 710072; 2. 西安建筑科技大学华清学院, 西安 710043)

摘要:运用局部影响分析对二维 AR(1) 模型进行了统计诊断, 克服了数据删除对时间序列样本数据相依性的破坏, 得出了影响曲率的具体计算公式, 最后运用实例说明了该方法的有效性。本文的方法可以一次性探测出多维时间序列模型中的强影响点, 提高了寻找模型强影响点的效率。

关键词:时间序列模型; 局部影响分析; 曲率

中图分类号: O212

文献标识码: A

doi:10.3969/j.issn.1006-6055.2014.02.004

Local Influence in Two Dimensional AR(1) Models*

LV Minhong^{*,1} WANG Chunru² ZHANG Huiling¹

(1. Department of Basic Courses Xi'an, Xi'an Aeronautical University, Xi'an 710077;

2. Huaqing College, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710043)

Abstract: To find the outliers and influence points in the two dimensional AR(1) models, the curvature formula of local influence is calculated which help to detect all of the influence points of the models in one time. In the end, a numerical example is given to illustrate the effectiveness of the conclusion. With this method, influence cases in the multi-dimensional time series model is detected once. The efficiency of the influence points search is greatly improved.

Key words: time series model; local influence; curvature

1 引言

时间序列分析是统计学的一个重要分支, 在经济学等领域有着广泛的应用。自回归模型是时间序列中一类重要的有限参数模型。统计诊断是数据分析的重要组成部分, 因为如果数据集中存在异常点或强影响点, 则基于这组数据集得到的统计推断结果就有可能偏离实际。虽然近年来时间序列分析在统计诊断方面也有了发展, 陈敏等^[1]给出了时间序列中条件异方差性的检验, 卫贵武^[2]研究了多维 AR(p) 模型的估计理论及应用, 任晓龙等^[3]对 m 维 AR(p) 模型进行了数据删除诊断, 对于一维时间序列的统计诊断已经有了一定的研究^[4,5]。对于多维时间序列模型, 虽然已经有了成熟的估计理论, 但对其统计诊断理论还有待发展。局部影响分析是近年来发展起来的识别数据强影响点的一种新方法, 关于局部影响有许多相关研究, 诸如线性模型系数^[6]、偏最小二乘、主成分检验等理论和应用问题。

对于误差项为时间序列的非线性模型也有一定的研究^[7], 本文运用局部影响分析法, 克服了数据删除法对时间序列样本数据相依性的破坏, 得出影响曲率的具体计算公式, 可以一次性探测出模型中的异常点和强影响点。

2 二维 AR(1) 模型及其参数估计

定义 1.1 设 $\{\varepsilon_t\}$ 是 m 维的 $WN(0, B)$, $A_1, A_2, \dots, A_p$ 是 $m \times m$ 阶实矩阵, 使得

$$\det(I_m - \sum_{j=1}^p A_j Z^j) \neq 0, |Z| \leq 1 \quad (1)$$

则称如下的模型 $X_t = \sum_{j=1}^p A_j X_{t-j} + \varepsilon_t, t \in \mathbf{Z}$ 是一个 m 维的 AR(p) 模型; 如果平稳序列 $\{X_t\}$ 满足 m 维 AR(p) 模型, 就称 $\{X_t\}$ 是一个 m 维 AR(p) 序列。当 $m=2, p=1$ 时, $\{X_t\}$ 即为是一个二维 AR(1) 序列

$$\begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_3 & \varphi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,t-1} \\ x_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix} \quad (2)$$

即

$$x_{1t} = \varphi_1 x_{1,t-1} + \varphi_2 x_{2,t-1} + \varepsilon_{1t} \quad (3)$$

$$x_{2t} = \varphi_3 x_{1,t-1} + \varphi_4 x_{2,t-1} + \varepsilon_{2t} \quad (4)$$

若 $E(\varepsilon_t \varepsilon_t^T) \neq \text{diag}(\varepsilon_{1t}^2, \varepsilon_{2t}^2)$, 即 $E(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}) \neq 0$ 时,

2013-9-16 收稿, 2013-11-27 接受

* 基金项目: 西安航空学院青年基金(12XQ614), 陕西省教育厅科研计划项目(12JK0894)资助

** 通讯作者, E-mail: lvminhong@163.com; Tel: 15991271619.

$\{x_{1t}\}$ 和 $\{x_{2t}\}$ 是两个有关系的一维 AR(1) 序列;若 $E(\varepsilon_t \varepsilon_t^T) = \text{diag}(\varepsilon_{1t}^2, \varepsilon_{2t}^2)$ 时, $\{x_{1t}\}$ 和 $\{x_{2t}\}$ 是两个不相关的一维 AR(1) 序列。

假设 $E(\varepsilon_t \varepsilon_t^T) = \text{diag}(\varepsilon_{1t}^2, \varepsilon_{2t}^2)$, 那么研究式(2)就相当于对式(3)的研究。

下面通过研究式(3)的回归和自回归混合模型来研究式(2)。

$$x_{1t} = \varphi_1 x_{1,t-1} + \varphi_2 x_{2,t-1} + \varepsilon_{1t}$$

给定 n 组观察数据 $(x_{11}, x_{21}), (x_{12}, x_{22}), \dots, (x_{1n}, x_{2n})$, 则式(3)可记为

$$\begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{13} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \\ \vdots & \vdots \\ x_{1,n-1} & x_{2,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \vdots \\ \varepsilon_{1n} \end{bmatrix} \quad (5)$$

进而写成矩阵形式

$$Y = X\varphi + \varepsilon \quad (6)$$

$$\text{其中, } Y = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{13} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \\ \vdots & \vdots \\ x_{1,n-1} & x_{2,n-1} \end{bmatrix}, \varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix},$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \vdots \\ \varepsilon_{1n} \end{bmatrix}。那么模型(6)所对应的对数似然函数为$$

$$L(\varphi^T, \delta) = -\frac{n-1}{2} \ln 2\pi - \frac{n-1}{2} \ln \delta^2 - \frac{1}{2} \delta^{-2} (Y - X\varphi)^T (Y - X\varphi), \text{ 其中 } \text{var}(\varepsilon_{1t}) = \delta^2。从而 \varphi, \delta \text{ 所对应的极大似然估计分别为}$$

$$\hat{\varphi} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

$$\hat{\delta} = \frac{(Y - X\hat{\varphi})^T (Y - X\hat{\varphi})}{n-1}$$

3 二维 AR(1) 模型的局部影响分析

基于数据删除对 m 维 AR(p) 模型的统计诊断及讨论文献[3]已有研究。局部影响分析方法的基本思想是通过引入某个扰动考察扰动对于模型参数的影响。它首先是由 Cook(1986) 提出的^[8], 之后 Wu 与 Luo^[9]、Poon^[10] 提出了不同的改进。

对于模型 M , 假设 $L(\varphi)$ 为相应随机变量 X 的对数似然函数, φ 为某一开集上的 p 维参数向量。引入扰动向量 $\omega \in R^q$, 记扰动后模型 $M(\omega)$ 的对数

似然函数为 $L(\varphi|\omega)$ 。下面用 $\hat{\varphi}, \hat{\varphi}(\omega)$ 分别表示 φ 关于 $L(\varphi), L(\varphi|\omega)$ 的极大似然估计。

定义对数似然距离

$$LD(\omega) = 2(L(\hat{\varphi}) - L(\hat{\varphi}(\omega)))$$

从几何的观点来看, $\eta(\omega) = (\omega, LD(\omega))^T$ 表示 $q+1$ 维空间上的影响曲面, 由文献[6]知, 可以通过曲面的几何性质来研究扰动对于模型的影响, 其影响曲率可表示为

$$C_d = 2|d^T \Delta^T \ddot{L}^{-1} \Delta d|, \text{ 其中 } d \text{ 是 } q \text{ 维单位向量,}$$

$$\Delta = \left. \frac{\partial^2 L(\varphi|\omega)}{\partial \varphi \partial \omega} \right|_{(\varphi, \omega) = (\hat{\varphi}, \omega_0)} \quad (\text{对于 } L(\varphi|\omega) \text{ 存在}$$

ω_0 , 使得 $L(\varphi) = L(\varphi|\omega_0)$), $\ddot{L}$ 是 $L(\varphi)$ 关于 φ 的二阶导数矩阵。

若 λ 为影响矩阵

$$F = \Delta^T \ddot{L}^{-1} \Delta \quad (7)$$

绝对值最大的特征值, 那么 λ 所对应的特征向量就是影响最大的扰动方向 $d_{\max}$ 。而 $d_{\max}$ 中绝对值较大的分量所对应的数据点即为强局部影响点。

对模型(3)进行加权扰动, 则扰动模型的对数似然函数可表示为:

$$L(\varphi^T, \delta|\omega) = \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i \left\{ -\frac{1}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln \delta^2 - \frac{1}{2\delta^2} (x_{1t} - \varphi_1 x_{1,t-1} - \varphi_2 x_{2,t-1})^2 \right\}$$

当 $\omega_0 = (1, 1, \dots, 1)^T$ 时, 表示对模型没有扰动。为方便起见, 下记 $\theta = (\varphi^T, \delta)$ 。

定理 基于加权扰动, 二维 AR(1) 模型, 模型在 ω_0 处的影响曲率为

$$F = \left(\frac{1}{\hat{\delta}^2} H^T X, \frac{K}{2\hat{\delta}^4} - \frac{I_n}{2\hat{\delta}^2} \right) \begin{pmatrix} -\frac{X^T X}{\hat{\delta}^2} & -\frac{X^T e}{\hat{\delta}^4} \\ -\frac{e^T X}{\hat{\delta}^4} & -\frac{n-1}{2\hat{\delta}^4} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\hat{\delta}^2} X^T H \\ \frac{K^T}{2\hat{\delta}^4} - \frac{I_n^T}{2\hat{\delta}^2} \end{pmatrix}$$

其中,

$$e_t = x_{1t} - \varphi_1 x_{1,t-1} - \varphi_2 x_{2,t-1}, e = Y - X\hat{\varphi}$$

$$H = \text{diag}(e_1, \dots, e_{n-1})$$

$$I_n = (1, 1, \dots, 1)^T$$

$$K = (e_1^2, e_2^2, \dots, e_{n-1}^2)^T$$

证明: 因为

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial \varphi^T} \\ \frac{\partial L}{\partial \delta^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{X^T(Y - X\varphi)}{\delta^2} \\ -\frac{(n-1)}{2\delta^2} + \frac{1}{2\delta^4}(Y - X\varphi)^T(Y - X\varphi) \end{pmatrix}$$
$$\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta \partial \theta^T} = \begin{pmatrix} -\frac{X^T X}{\delta^2} & -\frac{X^T(Y - X\varphi)}{\delta^4} \\ -\frac{(Y - X\varphi)^T X}{\delta^4} & \frac{(n-1)}{2\delta^4} - \frac{2}{\delta^6}(Y - X\varphi)^T(Y - X\varphi) \end{pmatrix}$$

所以

$$\ddot{L} = \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta \partial \theta^T} \Big|_{\theta = \hat{\theta}} = \begin{pmatrix} -\frac{X^T X}{\hat{\delta}^2} & -\frac{X^T e}{\hat{\delta}^4} \\ -\frac{e^T X}{\hat{\delta}^4} & -\frac{n-1}{2\hat{\delta}^4} \end{pmatrix}$$

又因为

$$\frac{\partial L(\theta | \omega)}{\partial \varphi^T} = \frac{1}{\delta^2} \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i x_i (Y_i - X_i \varphi),$$
$$\frac{\partial L(\theta | \omega)}{\partial \delta^2} = \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i \left\{ -\frac{1}{2\delta^2} + \frac{1}{2\delta^4} (Y_i - X_i \varphi)^2 \right\}$$

$$\therefore \Delta = \begin{pmatrix} \frac{X_1(Y_1 - X_1 \hat{\varphi})}{\hat{\delta}^2} \cdots \frac{X_{n-1}(Y_{n-1} - X_{n-1} \hat{\varphi})}{\hat{\delta}^2} \\ -\frac{1}{2\hat{\delta}^2} + \frac{e_1^2}{2\hat{\delta}^4} \cdots -\frac{1}{2\hat{\delta}^2} + \frac{e_{n-1}^2}{2\hat{\delta}^4} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\hat{\delta}^2} X^T H \\ \frac{K}{2\hat{\delta}^4} - \frac{I_n^T}{2\hat{\delta}^2} \end{pmatrix}$$

将 $\ddot{L}, \Delta$ 代入影响曲率矩阵(7)得

$$F = \left(\frac{1}{\hat{\delta}^2} H^T X, \frac{K}{2\hat{\delta}^4} - \frac{I_n}{2\hat{\delta}^2} \right)$$
$$\left(-\frac{X^T X}{\hat{\delta}^2} \quad -\frac{X^T e}{\hat{\delta}^4} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\hat{\delta}^2} X^T H \\ \frac{K^T}{2\hat{\delta}^4} - \frac{I_n^T}{2\hat{\delta}^2} \end{pmatrix}$$

证毕

4 实例分析

数据分析表明,销售 x_{1t} 和广告 x_{2t} 和存在前馈

和反馈的关系,本文用上述方法对一组实际数据^[11]进行了影响评价,所选数据是 Lydia Pinkham 年度广告和销售数据(1907 ~ 1960),其散点图见图 1。记 $(x_{12}, x_{11}, x_{21}), (x_{13}, x_{12}, x_{22}), \cdots, (x_{1,54}, x_{1,53}, x_{2,53})$ 为 53 组观测数据。对广告和销售数据建立的回归和自回归混合模型,然后通过 MATLAB 编程计算得最大特征值 $|\lambda| = 2.0615$,通过对最大特征向量 $d_{\max}$ 的分量绝对值做散点图(图 2),由图 2 分析可知,模型中的 16、26、38 组数据 $(x_{1,17}, x_{1,16}, x_{2,16}), (x_{1,27}, x_{1,26}, x_{2,26}), \cdots, (x_{1,39}, x_{1,38}, x_{2,38})$ 可能为强影响点,再结合图 1 分析可知第 16、17、26、38 号数据点为强影响点。

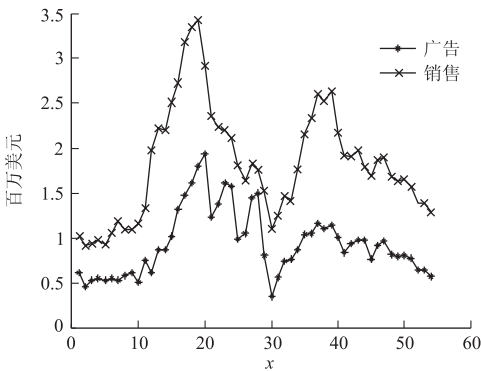


图 1 原始数据散点图
Figure 1 Raw data scatterplot chart

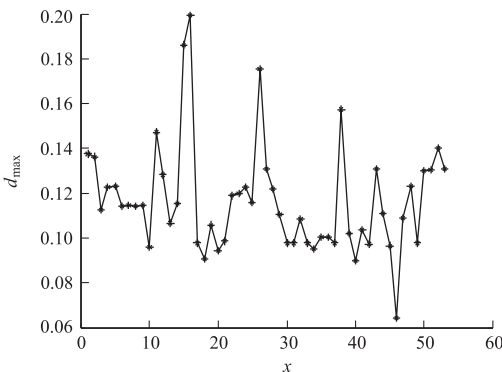


图 2 $d_{\max}$ 的分量绝对值散点图
Figure 2 $d_{\max}$ component absolute value scatterplot chart

5 结束语

本文充分考虑了时间序列的相依结构,运用局部影响分析方法对二维 $AR(1)$ 模型进行了影响分析。用此方法可以一次性探测出模型中的所有强影响点,与数据删除法相比大大简化了计算量。同时由于局部影响注重整体的效果,从而使得分析的强影响点更加真实全面。但是文中仅对 $E(\varepsilon_t \varepsilon_t^T) = di-$

$ag(E(\varepsilon_{1t}^2), E(\varepsilon_{2t}^2), \dots, E(\varepsilon_{mt}^2))$ 时的情况进行了讨论,而对于 $E(\varepsilon_t \varepsilon_t^T) \neq diag(E(\varepsilon_{1t}^2), E(\varepsilon_{2t}^2), \dots, E(\varepsilon_{mt}^2))$ 更一般的情况,还需要进一步的研究。

参考文献

[1]陈敏,安鸿志. 时间序列中条件异方差性的检验[J]. 中国科学 A 辑,1998,28(11):1-3.
[2]卫贵武,姚恒申,多维 AR(p) 模型的估计理论及应用[J]. 西华师范大学学报(自然科学版),2003,24(4):446-449.
[3]任晓龙,郭鹏江. m 维 AR(p) 模型的统计诊断[J]. 纯粹数学与应用数学,2010,26(1):158-163.
[4]吕敏红,郭鹏江. 时间序列的局部影响分析[J]. 西北大学学报,2011,41(1):1-4.
[5]吕敏红,赵鹏. AR-ARCH 模型的局部影响分析[J]. 纺织高校基

础科学学报,2012,25(1):5-8.
[6]吴喜之,田茂再. 现代回归模型诊断[M]. 北京:中国统计出版社,2003:10-23.
[7]解锋昌,孙越泓,刘应安. 带有 ARMA(0,1,0) 误差的非线性模型影响诊断[J]. 南京师大学报,2005,28(4):34-37.
[8]COOK R D. Assessment of local influence [J]. Journal of the Royal Statistical society, series B(Methodological),1986,48(2),133-169.
[9]WU X Z,LUO Z. Second-order approach to local influence[J]. Journal of the Royal Statistical society, series B,1993,55(4):29-36.
[10]POON W Y, POON W S. Conformal normal curvature and assessment of local influence[J]. Journal of the Royal Statistical society, series B,1999,16(1):51-61.
[11]魏武雄. 时间序列分析-单变量和多变量方法[M]. 北京:中国人民大学出版社,2005:543-543.

作者简介

吕敏红 (1985-),女,硕士,讲师,主要研究方向:概率论与数理统计。

(上接第 105 页)

[4]王丽苑,李彦锋. 重金属微污染水体的处理技术及应用研究进展[J]. 环境工程,2009,(S1):96-99.
[5]MAHMOUD M E, KENAWY I M, HAFEZ M A H, et al. Removal, preconcentration and determination of trace heavy metal ions in water samples by AAS via chemically modified silica gel N-(1-carboxy-6-hydroxy) benzylidenepropylamine ion exchanger [J]. Desalination, 2010,250(1):62-70.
[6]王宏镔,束文圣,蓝崇钰. 重金属污染生态学研究现状与展望[J]. 生态学报,2005,25(03):596-605.
[7]王建龙,陈灿. 生物吸附法去除重金属离子的研究进展[J]. 环境科学学报,2010,30(04):673-701.
[8]林永波,邢佳,施云芬,等. 高分子凝胶球去除废水中重金属离子的研究[J]. 环境保护科学,2008,34(02):21-24.
[9]DU Zhiying, YANG Huifen, QU Huanhuan, et al. Preparation of Dithizone-anchored phema microspheres and its adsorption properties for Cu ~ (2 +) [J]. Chemistry,2009,72(9):803-808.
[10]MAHMOUD M E, OSMAN M M, OSAMA F, et al. Removal and preconcentration of Lead (II) and other heavy metals from water by a-

lumina adsorbents developed by surface-adsorbed-dithizone[J]. Desalination,2010,251(1-3):123-130.
[11]毛艳丽,史乐君,刘瑞群,等. 双硫脲修饰的三钛酸钠晶须对铅(II)的吸附行为研究及分析应用[J]. 冶金分析,2009,(08):25-28.
[12]国家环保总局. 水和废水监测分析方法[M]. 北京:中国环境科学出版社,1989:306-307.
[13]ANIRUDHAN T S, SUCHITHRA P S. Humic acid-immobilized polymer/bentonite composite as an adsorbent for the removal of Copper (II) ions from aqueous solutions and electroplating industry wastewater[J]. Journal of Industrial and Engineering Chemistry, 2010,16(1):130-139.
[14]LIU Yunhai, CAO Xiaohong, HUA Rong, et al. Selective adsorption of uranyl ion on ion-imprinted chitosan/PVA cross-linked hydrogel [J]. Hydrometallurgy,2010,104(2):150-155.
[15]JR E N. Phenomenological theory of ion solvation. effective radii of hydrated ions [J]. Journal of Physical Chemistry, 1959,63(9):1381-1387.

作者简介

李宇亮 (1983-),副教授,工学博士,主要研究方向:环境工程水污染控制研究。