

强迫基流上 Rossby 波包的结构和演变

曾 庆 存

(中国科学院大气物理研究所,北京)

摘 要

本文用 WKB 方法研究了正压及斜压强迫基流上 Rossby 波包的演变过程(发展、传播和结构的改变),得出:(1)增强波波包的平均空间尺度随时间变大,但衰减波波包的平均空间尺度则随时间变小;(2)正压增强型扰动在水平面上向急流区传播,但衰减者则向离开急流区的方向传播;(3)斜压增强型扰动在垂直方向上向急流轴传播,但衰减者则反之;(4)扰动的发展特性依赖于其结构及其相对于基流的位置;(5)强迫形成的常定波列具有典型的斜压增强但正压衰减型扰动的结构;能量向对流层顶传播;且若扰源位于急流轴附近(即中纬度)地带,则在水平面上扰动由急流区向外传播,且分裂成南北两支.文中还给出若干大气中实测到的常定流场的图,和一个高空天气系统演变全过程及其预报图.理论结果和实际情况很相一致.

一、引 言

大气中的准常定波是由于气流受地形和热力的强迫所形成的.Grose 和 Hoskins (1979)^[1], Hoskins 和 Karoly (1981)^[2] 等从理论上研究了正压大气中强迫波列的传播问题,而 Dickinson (1968)^[3], Hayashi (1981)^[4], Held (1981)^[5] 以及 Karoly 和 Hoskins (1982)^[6] 等则研究了斜压大气问题.从这些工作中的计算结果可以看到:若基流为急流型的带状环流,而扰源位于急流区(中纬度)地带,则强迫形成的波列向下游传播且分为两支,一支往东南传,另一支往东北传;扰动中心(极大值和极小值区)的轴线在急流以南为东北-西南走向,而在急流以北为西北-东南走向.在垂直方向上扰动上传往对流层顶;只有纬圈波数为 1 和 2 的超长波才能穿透对流层顶,在平流层有较大的波幅.但为什么会有上述这些特征呢?作者们大都没有作充分的解释.

另一方面,Young 和 Rhines (1980)^[7],卢佩生(1981)^[8],卢佩生和曾庆存(1980,1981)^[9,10],以及曾庆存 (1982,1983)^[11-13]等则用 WKB 方法研究了 Rossby 波包的演变问题,得到了演变特性的一些一般规律.我们指出:无论是增强型扰动还是衰减型扰动都各自有其共同的结构和传播方向,且因扰动相对于急流轴的位置不同而异.不难设想,用这些方法以及所得结果应当能解释上段所列的常定波列的特征.

在本文中,我们将把我们以前的结果推广到更一般的情况,即基流为急流型带状环流加上超长波;并用来解释强迫形成的常定波列的特性.

二、Rossby 液包的演变过程

设有基流 $\bar{v} = i\bar{u} + j\bar{v}$, 相对于此基流的线性化准地转位涡方程如下^[12]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y}\right) \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - H \right) \psi' \right] + \bar{\beta}_y \frac{\partial \psi'}{\partial x} - \bar{\beta}_x \frac{\partial \psi'}{\partial y} = 0, \quad (2.1)$$

其中所有变量及坐标都已无量纲化; $\bar{\beta}_y = \partial \bar{q} / \partial y$, $\bar{\beta}_x = \partial \bar{q} / \partial x$, \bar{q} 为基流的位涡度; $W \psi'$ 为扰动流函数, $W = (N \tilde{T} p_s / N_s \tilde{T}_s p)^{1/2}$ 为因空气密度和温度随高度 (气压) 而变所引起的权重, $H = W d^2 W^{-1} / d \xi^2$ 是特征高度尺度的倒数, W 和 H 都只是 ξ 的函数, N 为 Brunt-Vaisala 频率, \tilde{T} 为“标准大气”温度垂直廓线; p 为气压, (x, y) 为水平坐标, ξ 是无量纲相当高度,

$$\xi = \int_p^{p_s} \left(\frac{N \tilde{T}}{N_s \tilde{T}_s} \right) \frac{dp}{p}, \quad (2.2)$$

p_s , N_s 和 \tilde{T}_s 等则为大气下边界上的值. 当大气为等温时, $\xi = \ln(p_s/p)$.

设基流 \bar{v} 为一急流型带状环流, 或者在其上再加上超长波. 设 $H > 0$, \bar{u} , \bar{v} , $\bar{\beta}_x$ 和 $\bar{\beta}_y$ 都是 (x, y, ξ, t) 的缓变函数. 令

$$X = \varepsilon x, \quad Y = \varepsilon y, \quad Z = \varepsilon \xi, \quad T = \varepsilon t, \quad (2.3)$$

并设扰动 ψ' 为一波包:

$$\psi' = \Psi(X, Y, Z, T) e^{i\theta(X, Y, Z, T)/\varepsilon}, \quad (2.4)$$

$$\Psi(X, Y, Z, T) = \Psi_0(X, Y, Z, T) + \varepsilon \Psi_1(X, Y, Z, T) + \dots, \quad (2.5)$$

其中 $\varepsilon > 0$ 为一小参数, θ , Ψ_j 及它们出现在展开式中的所需的各级偏微商的数量级都是 $O(1)$. 将(2.3)–(2.5)式代入(2.1)式, 即得频散关系式和一个描写波幅 Ψ_0 的演变过程的方程:

$$(\sigma - m\bar{u} - n\bar{v})v^2 + m\bar{\beta}_y - n\bar{\beta}_x = 0, \quad (2.6)$$

$$D_\varepsilon \left(\frac{v^2}{2} |\Psi_0|^2 \right) / DT + \frac{v^2}{2} |\Psi_0|^2 \nabla \cdot \mathbf{C}_\varepsilon - |\Psi_0|^2 \left[m^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial X} + mn \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial X} \right) + mk \frac{\partial \bar{u}}{\partial Z} + n^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} + nk \frac{\partial \bar{v}}{\partial Z} \right] = 0, \quad (2.7)$$

其中

$$v^2 = m^2 + n^2 + k^2 + H, \quad (2.8)$$

$$\sigma = -\partial \theta / \partial T, \quad m = \partial \theta / \partial X, \quad n = \partial \theta / \partial Y, \quad k = \partial \theta / \partial Z, \quad (2.9)$$

$$D_\varepsilon / DT = \frac{\partial}{\partial T} + C_{\varepsilon X} \frac{\partial}{\partial X} + C_{\varepsilon Y} \frac{\partial}{\partial Y} + C_{\varepsilon Z} \frac{\partial}{\partial Z}, \quad (2.10)$$

群速度 \mathbf{C}_ε 的分量由下列公式给出

$$\begin{cases} C_{\varepsilon X} = \partial \sigma / \partial m = \bar{u} - [2m(n\bar{\beta}_x - m\bar{\beta}_y) + v^2 \bar{\beta}_y] v^{-4}, \\ C_{\varepsilon Y} = \partial \sigma / \partial n = \bar{v} - [2n(n\bar{\beta}_x - m\bar{\beta}_y) - v^2 \bar{\beta}_x] v^{-4}, \\ C_{\varepsilon Z} = \partial \sigma / \partial k = -2k(n\bar{\beta}_x - m\bar{\beta}_y) v^{-4}. \end{cases} \quad (2.11)$$

此外,尚有运动学关系式,描写频率 σ 以及波数 (m, n, k) 的变化,

$$D_g \sigma / DT = - \left(m \frac{\partial \bar{u}}{\partial T} + n \frac{\partial \bar{v}}{\partial T} + \frac{n}{v^2} \frac{\partial \bar{\beta}_x}{\partial T} - \frac{m}{v^2} \frac{\partial \bar{\beta}_y}{\partial T} \right), \quad (2.12)$$

$$D_g m / DT = - \left(m \frac{\partial \bar{u}}{\partial X} + n \frac{\partial \bar{v}}{\partial X} + \frac{n}{v^2} \frac{\partial \bar{\beta}_x}{\partial X} - \frac{m}{v^2} \frac{\partial \bar{\beta}_y}{\partial X} \right), \quad (2.13)$$

$$D_g n / DT = - \left(m \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} + n \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} + \frac{n}{v^2} \frac{\partial \bar{\beta}_x}{\partial Y} - \frac{m}{v^2} \frac{\partial \bar{\beta}_y}{\partial Y} \right), \quad (2.14)$$

$$D_g k / DT = - \left(m \frac{\partial \bar{u}}{\partial Z} + n \frac{\partial \bar{v}}{\partial Z} + \frac{n}{v^2} \frac{\partial \bar{\beta}_x}{\partial Z} - \frac{m}{v^2} \frac{\partial \bar{\beta}_y}{\partial Z} + \frac{m \bar{\beta}_y - n \bar{\beta}_x}{v^4} \frac{\partial H}{\partial Z} \right). \quad (2.15)$$

由(2.13)–(2.15)式还可得到关于在三维空间中的合成波数 $(m^2 + n^2 + k^2)^{1/2}$ 的变化方程如下:

$$\begin{aligned} D_g(m^2 + n^2 + k^2) / DT = & -2 \left[m \left(m \frac{\partial \bar{u}}{\partial X} + n \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} + k \frac{\partial \bar{u}}{\partial Z} \right) \right. \\ & + n \left(m \frac{\partial \bar{v}}{\partial X} + n \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} + k \frac{\partial \bar{v}}{\partial Z} \right) \\ & + \frac{n}{v^2} \left(m \frac{\partial \bar{\beta}_x}{\partial X} + n \frac{\partial \bar{\beta}_x}{\partial Y} + k \frac{\partial \bar{\beta}_x}{\partial Z} \right) \\ & - \frac{m}{v^2} \left(m \frac{\partial \bar{\beta}_y}{\partial X} + n \frac{\partial \bar{\beta}_y}{\partial Y} + k \frac{\partial \bar{\beta}_y}{\partial Z} \right) \\ & \left. + \frac{m \bar{\beta}_y - n \bar{\beta}_x}{v^4} k \frac{\partial H}{\partial Z} \right]. \quad (2.16) \end{aligned}$$

若基流为带状环流,则 $\bar{\beta}_x = 0$; 若基流含有超长波,则有 $\bar{\beta}_x = O(\epsilon)$. 此外,若取 β 平面近似,且急流廓线不过分尖锐,则总有 $\bar{\beta}_y = \beta + O(\epsilon)$ (参见文献[12]). 从而(2.16)式可简化为:

$$\begin{aligned} D_g(m^2 + n^2 + k^2) / DT \approx & -2 \left[m \left(m \frac{\partial \bar{u}}{\partial X} + n \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} + k \frac{\partial \bar{u}}{\partial Z} \right) \right. \\ & \left. + n \left(m \frac{\partial \bar{v}}{\partial X} + n \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} + k \frac{\partial \bar{v}}{\partial Z} \right) \right] - C_{gz} \frac{\partial H}{\partial Z}. \quad (2.17) \end{aligned}$$

它还可改写成如下形式

$$\begin{aligned} D_g v^2 / DT \approx & -2 \left[m \left(m \frac{\partial \bar{u}}{\partial X} + n \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} + k \frac{\partial \bar{u}}{\partial Z} \right) \right. \\ & \left. + n \left(m \frac{\partial \bar{v}}{\partial X} + n \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} + k \frac{\partial \bar{v}}{\partial Z} \right) \right]. \quad (2.18) \end{aligned}$$

注意,在(2.18)式左端含有 $D_g H / DT$, 在除对流层顶附近以外的地区总有 $D_g H / DT \approx 0$, 从而 $D_g v^2 / DT \approx D_g(m^2 + n^2 + k^2) / DT$.

将(2.18)式代入(2.7)式,即得到能量方程

$$\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\nu^2}{2} |\Psi_0|^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\nu^2}{2} |\Psi_0|^2 \mathbf{C}_g \right) \approx -\frac{1}{2} |\Psi_0|^2 \frac{D_g \nu^2}{DT}. \quad (2.19)$$

(2.6)–(2.19)式是描写波包所有特性的演变过程的有用公式.

三、自由 Rossby 波包

设有自由的(非强迫的) Rossby 波包. 将(2.7)和(2.19)式沿波包占有的整个地区(W)积分,得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} \iiint_W \frac{\nu^2}{2} |\Psi_0|^2 dXdYdZ = & \iiint_W |\Psi_0|^2 \left\{ m^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial X} + mn \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial X} \right) \right. \\ & \left. + mk \frac{\partial \bar{u}}{\partial Z} + n^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} + nk \frac{\partial \bar{v}}{\partial Z} \right\} dXdYdZ, \end{aligned} \quad (3.1)$$

和

$$\frac{\partial}{\partial T} \iiint_W \frac{\nu^2}{2} |\Psi_0|^2 dXdYdZ \approx - \iiint_W \frac{1}{2} |\Psi_0|^2 D_g \nu^2 / DT dXdYdZ, \quad (3.2)$$

其中 $\nu^2 |\Psi_0|^2 / 2$ 相当于能量密度.

方程(3.1)表明扰动能量倾向对扰动结构及其相对于基流的位置的依赖关系;而(3.2)式则表明扰动能量变化和以能量密度为权重的平均空间尺度变化的关系. 即:扰动的平均空间尺度(三维空间中的波长)当扰动增强(能量增加)时增大,衰减(能量减少)时减小. 这是我们已得结果^[8-13]在三维斜压强迫基流情况下的推广. 其实,若基流的 $\bar{v} \neq 0$,就没有波作用量(Wave action)守恒;但若基流为缓变的(β_y 近于常数,且 $\beta_x \approx 0$),且无水平辐散($\partial \bar{u} / \partial x + \partial \bar{v} / \partial y = 0$),则有扰动的总位涡能(Potential enstrophy)守恒(参见文献[7,10]),象文献[9]所做的那样,由此守恒性亦可推出上述关于能量变化和尺度变化的关系. 但在一般情况下,即不忽略 β_x 或 $\partial \bar{u} / \partial x + \partial \bar{v} / \partial y \neq 0$,则波作用量守恒和位涡能守恒二者都不成立,可是(3.1)和(3.2)式仍然很有用,由此可以推出上述关系仍然普遍成立. 还需指出,上述关系与坐标系是否是旋转的(非惯性坐标系)无关,但只对 Rossby 波(当坐标系为旋转的)或一般的涡旋波(不论坐标系为旋转的与否)即“慢波”才成立. 对于重力-惯性波以及重力波或即所谓“快波”,则能量变化和尺度变化的关系正好和上述的相反(参阅文献[10,14]).

若基流为带状环流,分析起来比较简单^[11-13]. 此时在(3.1)式右端只有 $(mn \partial \bar{u} / \partial Y + mk \partial \bar{u} / \partial Z) |\Psi_0|^2$ 项. 视 $mn \partial \bar{u} / \partial Y$ 项的定积分为正或为负,我们称扰动为正压增强或衰减;视 $mk \cdot \partial \bar{u} / \partial Z$ 项的定积分为正或为负,称扰动为斜压增强或衰减. 故正压衰减型扰动的槽脊线在急流以南为东北-西南走向,在急流以北为西北-东南走向;而正压增强型扰动的槽脊线则在急流以南为西北-东南走向,在急流以北为东北-西南走向. 如图1. 在垂直剖面上,斜压增强型扰动的槽脊线在对流层内沿高度向西倾斜,在平流层向东倾斜;衰减型的则在对流层内向东倾斜,在平流层向西倾斜,如图2. 关于基流既有水平切变($\partial \bar{u} / \partial Y \neq 0$)又有垂直切变($\partial \bar{u} / \partial Z \neq 0$)情况的详细讨论,可见文献[12].

$|\Psi_0|^2$ 的极值区沿群速度 \mathbf{C}_g 传播. 在带状基流情况下,在(2.11)式中,令 $\bar{v} = 0$ 可得以下结论:正压衰减型扰动在平面上由急流区向外传播;而在对流层内斜压增强型扰动向上往急

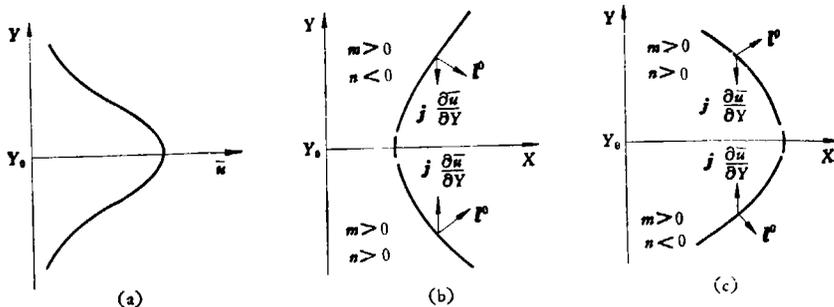


图 1 (a) 一个理想的急流型带状环流廓线 $\bar{u}(Y)$, (b) 正压增强型扰动的典型的槽-脊线结构, (c) 正压衰减型扰动的典型的槽-脊线结构, l^0 表示波射线方向。

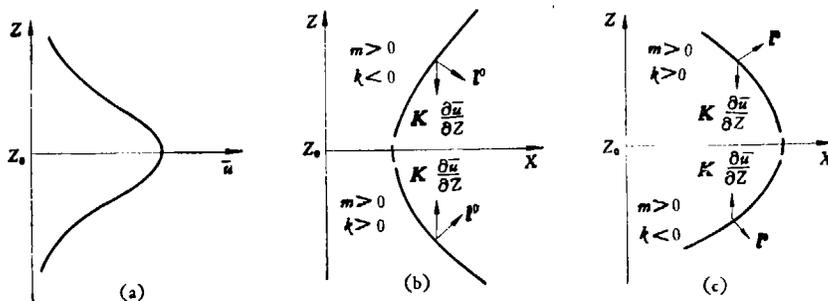


图 2 (a) 一个理想的急流型垂直切变基流廓线 $\bar{u}(Z)$, (b) 斜压增强型扰动的典型的槽-脊线结构, (c) 同 (b), 但扰动为斜压衰减型, l^0 表示波射线方向。

流轴(对流层顶)传播,等等。

四、强迫常定波列

设有由热源或地形强迫形成的波列。在扰源区以外波列可看作是自由的(无局地能源和无耗散),从而局地性质可由(2.1)式描写,但积分后在(3.1)和(3.2)式中则必须加上面积分项,这是因为由源区向波列占有区域流入的能流不为零。

为简单起见,取基流为带状环流,且设强迫形成的波列为常定的。于是和(3.1)及(3.2)式相对应的公式为:

$$-\iiint_w |\Psi_0|^2 \left(mn \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} + mk \frac{\partial \bar{u}}{\partial Z} \right) dXdYdZ = -\iint_s \mathbf{C}_g \cdot \mathbf{n} v^2 \frac{|\Psi_0|^2}{2} dS, \quad (4.1)$$

$$\iiint_w \frac{1}{2} |\Psi_0|^2 \mathbf{C}_g \cdot \nabla v^2 dXdYdZ = -\iint_s \mathbf{C}_g \cdot \mathbf{n} \frac{v^2}{2} |\Psi_0|^2 dS, \quad (4.2)$$

其中 \mathbf{n} 为包围波列的表面上的外法向单位向量。

由源区流入波列的能流为正,故(4.1)式左端应为正。换言之,强迫形成的常定波列将能量反馈给基本气流。通常是扰动有效位能转化为动能,即 $mk\partial\bar{u}/\partial Z$ 项的定积分为正,扰动为斜压增强型。从而 $mn\partial\bar{u}/\partial Y$ 项的定积分应为负,即波列为正压衰减型。这表明:强迫形成的常定波列有着正压衰减而斜压发展型的结构。

注意,不论波列是否为常定,关系式(2.11)都是成立的,故得下列结论:强迫形成的常定波列在平面上沿由急流区向外的方向传播,而在垂直方向上则传向对流层顶.尤其是,若扰源位于中纬度(即靠近急流区),强迫形成的波列必分裂为两支,一支位于急流以北,且向东北方向传播,另一支位于急流以南,且向东南方向传播.上面假设了 $m^2 + n^2 + k^2$ 不过分小,否则波可能向西传播,不过常定波不具有如此小的 $m^2 + n^2 + k^2$.若扰源或基流相对于急流区为非对称的,则这两支波列的波幅可能不同,波列在远离源区处亦可能由于反射和折射而只局限于一定的纬度带内.上述这些结论和若干计算结果^[2,15](如图3和图4),以及一些实测到的遥相关图^[16](如图5)很相一致.在这些图上,两支波列以及螺旋状槽脊线结构及其在沿波列传播方向上的变化都是显而易见的.

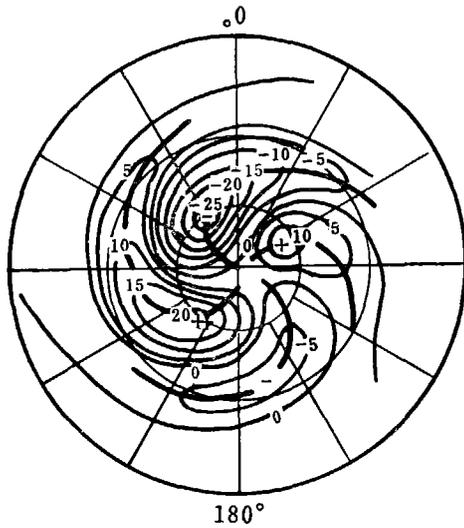


图3 北半球地形扰动形成的位于30km高空的气压层位势扰动^[15]
(单位: 动力米, 扰动场槽脊线由粗黑线标出)

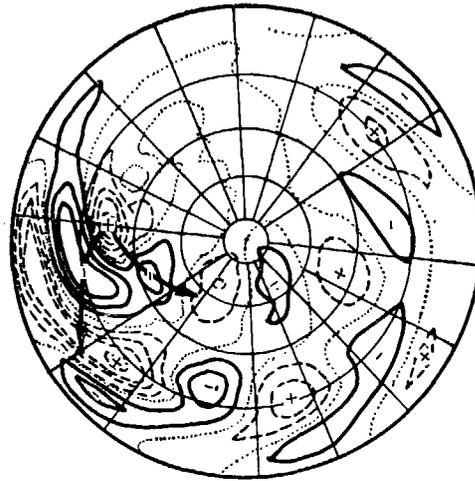


图4 由一个中心在30°N的圆形山脉形成的正压扰动的扰动涡度场,基流为北半球冬季的带状环流^[12]
(山脉中心点由黑圆点标出;带箭头的粗黑线指示出两个扰动带的传播)

其次,由于地形以及强的非绝热扰源都位于对流层低层,故强迫形成的斜压发展型波列先向上传播,波幅随高度增加,槽脊线沿高度西倾,且逐渐减小其坡度,即波的斜压性减小,这可由(2.13)一(2.15)式推出(详见文献[12,13]).由此推知,沿纬圈的波数 m 够大时,波列在对流层上层(尤其是在对流层顶附近)的波射线和波列传播的方向将是近于水平的;只有 m^2 很小(很长的波和超长波)同时 $n^2 + k^2$ 也很小(沿经圈的尺度很大且垂直结构简单)的波,才能传入平流层,但平流层内基流垂直切变反转,从而波列的槽脊线结构使波列在平流层内属于斜压衰减型,于是在传入平流层后波幅很快衰减(正压衰减加斜压衰减),波幅在对流层顶有最大值.再由(3.1)式可知,衰减率正比于 $|m|$,故只有超长波在平流层上层才可具有较大的波幅.所有上述诸点可用一简图表明,如图6.这也是和实际的大气准常定波的垂直结构相符的(参见文献[4]的分析).

还有,由(4.2)式可得:强迫形成的常定波列有 $-\mathbf{C}_g \cdot \nabla v^2 < 0$.这表明:当波列离开扰

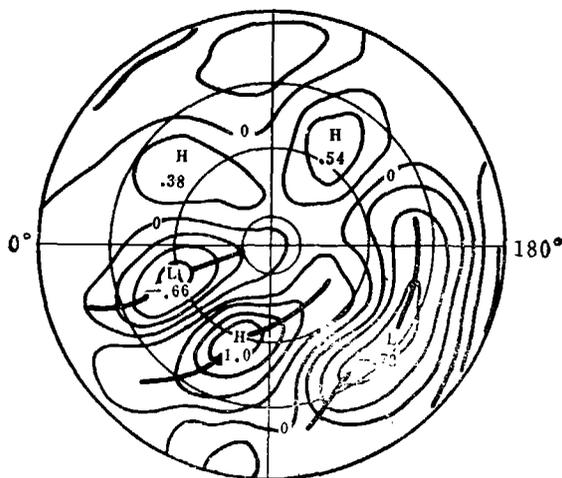


图 5 北半球各点和基点 (55°N , 75°E) 500mb 高度的相关系数分布图^[14]
(正负中心的轴线由粗黑线标出)

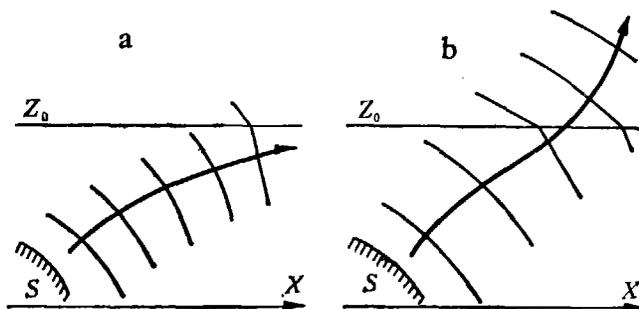


图 6 表示强迫形成的波列沿垂直方向传播的概要图
(S表示源区, Z_0 为对流层顶, 细线为槽-脊线, 粗实线为波射线, 箭头表示传播方向。
a. 长波(m 较大)情况, b. 超长波(m 很小)情况)

源区以后,其波长在传播过程中逐渐变短。

五、高空天气系统演变过程的个例分析

作为对理论结论的另一检验,我们来研究高空天气系统的演变过程。下面挑选了一个基本上为正压过程的例子,其斜压性较小,这样分析起来比较简明。1972年3月22日在北欧上空有一个波幅很小波长较短的小槽(如图7a),它位于急流南侧,槽线由西北指向东南,故为正压增强型扰动。的确,在东移过程中此小槽很快加深,且沿东西方向及南北方向的波长均同时增大,槽线逐渐变成南北向。图7b即为两天后(1972年3月24日)的形势。以后该槽衰减,波长显著变短,图7c即为3月27日的形势。其下游的脊(位于亚洲)的经向尺度则有明显增大,这是由于有一个反气旋和原来的脊合并所致,不能从理论公式简单地推出,除非同时考虑两个波包的干涉现象。图中虚线为中国科学院大气物理研究所张学洪同志用正压原始方程组

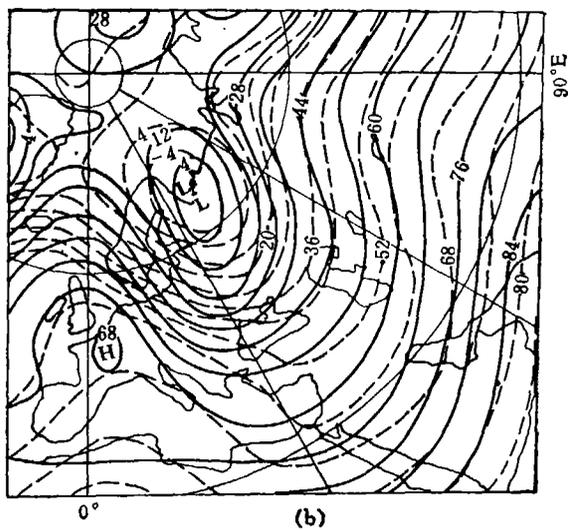
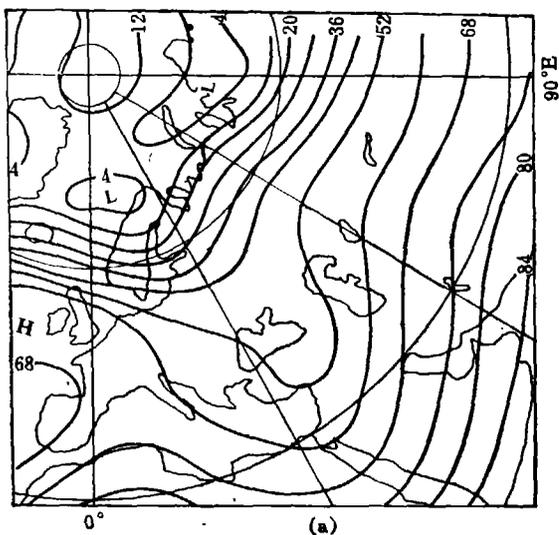
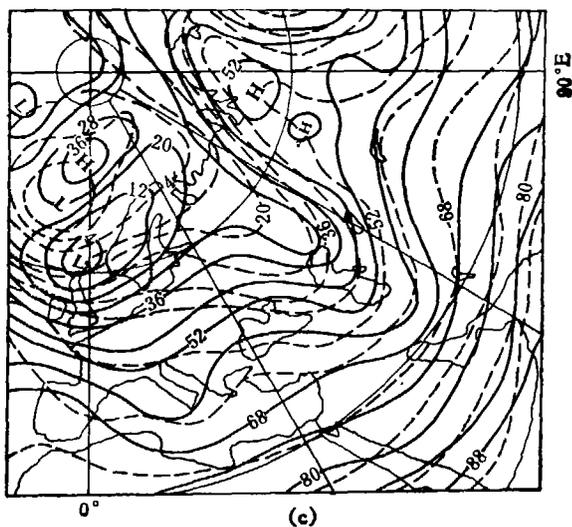


图 7(a) 1972 年 3 月 22 日 12 时(世界时) 500mb 高度场

图 7(b) 1972 年 3 月 24 日 12 时 500mb 高度场
(实线为实况,虚线为 48 小时预报)图 7(c) 1972 年 3 月 27 日 12 时 500 mb 高度场
(实线为实况,虚线为 72 小时预报)

计算得的 48 小时和 72 小时预报。比较表明,这个高空天气系统的演变全程被正确地预报出来了。

最后指出,如取空间平均了的光滑场作为基流(即基流中包含有超长波),而从图 7 a 中的位势高度场减去它,则所得的扰动场确实具有很好的波包形式,扰动中心正好位于上述小槽所在位置(图未给出)。此外,小槽沿东西方向的波长的变长乃是由于基流沿东西方向的不均匀

所致,可由(2.13)式推出.

参 考 文 献

- [1] Grose, W. L. and Hoskins, B. J., *J. Atmos. Sci.*, **36**(1979), 223—234.
- [2] Hoskins, B. J. and Karoly, D. J., *ibid.*, **38**(1981), 1179—1196.
- [3] Dickinson, R. E., *ibid.*, **25**(1968), 984—1002.
- [4] Hayashi Y., *ibid.*, **38**(1981), 1197—1205.
- [5] Held, I. M., Stationary and quasi-stationary eddies in the extratropical troposphere: theory (to be published).
- [6] Karoly, D. J. and Hoskins, B. J., *J. Met. Soc. Japan*, Ser. II, **60**(1982), 109—123.
- [7] Young, W. R. and Rhines, P. B., *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, **15**(1980), 39—52.
- [8] 卢佩生,气象学报, **39**(1981),2: 141.
- [9] 卢佩生、曾庆存,大气科学, **5**(1981),1—8.
- [10] 曾庆存、卢佩生,中国科学, 1980,12: 687.
- [11] Zeng Qing-cun, *J. Met. Soc. Japan*, Ser. II, **60**(1982), 24—31.
- [12] —————, *J. Atmos. Sci.*, **40**(1983), 73—84.84.
- [13] —————, *Tellus*, **35**(1983), 337—349.
- [14] 曾庆存,数值天气预报的数学物理基础,第一卷,科学出版社, 1979.
- [15] Huang Ronghui and Gambo, K., *J. Met. Soc. Japan*, Ser. II, **60**(1982), 78—92.
- [16] Wallace, J. M. and Gutzler, D. C., *Mon. Wea. Rev.*, **109**(1981), 784—812.