



自激作用下洛伦兹振子的簇发现象及其分岔机制

张正娣, 毕勤胜*

江苏大学理学院, 镇江 212013

*联系人, E-mail: qbi@ujs.edu.cn

收稿日期: 2012-08-23; 接受日期: 2013-01-07

国家自然科学基金资助项目(批准号: 11272135, 21276115)

摘要 在表现为稳定极限环的自激振子作用下的洛伦兹系统, 在不同时间尺度下具有特殊的非线性现象. 通过快子系统的平衡点及其特性分析, 给出了快子系统随激励强度变化的分岔条件, 分析了系统随激励强度变化的动力学演化过程, 指出当激励强度增长到一定程度并满足快子系统产生 fold 分岔条件时, 系统会产生 fold/fold 簇发, 其中沉寂态表现为快子系统的平衡态, 激发态为围绕快子系统焦点的振荡. 讨论了其相应的簇发机制, 并进一步揭示了簇发现象随参数发生变化的过程, 随着激励强度的继续增加, 虽然簇发定性保持不变, 但在两对称的激发态的接近旋转中心处, 系统会沿着快子系统的平衡态来回运动, 其长度近似等于 fold 分岔点与激励项幅值之间的距离.

关键词 自激振子, 洛伦兹系统, 多时间尺度, 簇发现象

PACS: 05.45. Xt, 05.45.-a, 05.45.Pq

doi: 10.1360/132012-717

作为一个典型的混沌模型, 洛伦兹系统在过去的几十年中引起了许多学者的重视, 并开展了大量的工作, 以探讨分岔及混沌产生的动力学机制^[1,2]. 洛伦兹系统同时存在三个不同的平衡点, 其性质随参数的变化会发生变化, 在一定条件下, 围绕两焦点运动的轨迹会产生蝴蝶状的混沌振荡^[3]. 从混沌重现的角度来看, 越是简单的混沌系统越受到关注, 事实上, 随后建立的混沌系统诸如 Chua 电路^[4], Chen 系统^[5]由于分别在实验室展现了不同的混沌振荡行为, 从而导致了大量的后续研究^[6,7]. 同时, 相对简单的混沌系统也为混沌控制如利用或消除混沌提供了理

想的并易于实现的模型结果^[8,9]. 就洛伦兹系统而言, 许多控制策略被引入, 使得系统稳定于不同的控制目标如平衡态、周期运动或混沌振荡^[10,11]. 这些控制模式, 基本上都是设计在与原系统同一时间尺度上, 而实际系统, 经常涉及不同的尺度耦合, 如各种自催化反应存在着不同的反应速率^[12], 许多神经元模型如 Hodgkin-Huxley 模型^[13]、Morris-Lecar 模型^[14]等都是基于两时间尺度, 飞行器中存在着快速的旋转运动与相对较慢的平动之间的耦合^[15], 其他如激光系统、机电系统等都会涉及不同尺度耦合问题^[16]. 不同时间尺度耦合系统, 经常表现为在沉寂态和激发

引用格式: 张正娣, 毕勤胜. 自激作用下洛伦兹振子的簇发现象及其分岔机制. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2013, 43: 511–517

Zhang Z D, Bi Q S. Bursting phenomenon as well as the bifurcation mechanism of self-excited Lorenz system (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2013, 43: 511–517, doi: 10.1360/132012-717

之间来回变化的簇发振荡^[17], 深入分析不同簇发的分岔机制对于揭示多尺度耦合系统的复杂动力学行为具有重要的理论意义. 由于洛伦兹系统以及经典的 Van der Pol 自激振子都非常容易通过电路模拟, 因此, 通过搭建两尺度下 Van der Pol 自激作用下的洛伦兹系统的电路模型, 可以直观再现该耦合系统的各种复杂现象尤其是不同的簇发振荡模式, 同时, 两系统均属于自治系统, 其各种平衡态特性都非常清晰, 从而有助于深刻理解不同尺度导致的诸如簇发振荡等行为的产生机制.

本文考虑慢时间尺度上的自激振动激励下的洛伦兹系统随参数变化的动力学演化过程, 探讨不同时间尺度耦合下系统的各种特殊行为, 深入分析簇发现象的分岔特性, 进而揭示簇发振荡及其不同特征的诱发原因及其产生机理.

1 自激作用下洛伦兹振子模型

典型的自激振子如 Van der Pol 振子

$$\ddot{u} + \kappa^2[u - \mu(a - u^2)\dot{u}] = 0. \quad (1)$$

其中 $\kappa > 0$, $a > 0$, μ 为小参数, 存在着全局稳定的极限环, 其一次近似解可以表示为周期为 κ , 振幅为 $2\sqrt{a}$ 的简谐振动, 其二次近似则可表示为

$$u = \sqrt{a}[2\cos(\Omega t + \theta) - \frac{1}{4}\kappa^2\mu\sin 3(\Omega t + \theta)], \quad (2)$$

$$\Omega = \kappa\left(1 - \frac{1}{16}a^2\kappa^4\mu^2\right).$$

在由电器元件搭建的其相应的电路模型中可以清楚地观察到周期振荡现象, 由于该振子无需外部能量的输入, 因而经常被用来作为激励源, 考察其作用下的洛伦兹系统, 不仅在实验室比较容易构建, 为以后的实验研究提供了方便, 同时, 耦合系统的形式不显含时间, 即是自治系统, 在相空间描述等方面也具有一定的优势. 为分析其存在的不同时间尺度效应, 设定参数 $\kappa \ll 1$, 则慢变自激振子洛伦兹系统模型可以表示为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x), \quad \dot{y} = \rho x - y - xz + \alpha u, \\ \dot{z} &= -\beta z + xy, \quad \dot{u} = \kappa v, \\ \dot{v} &= \kappa[\mu(a - u^2)v - u]. \end{aligned} \quad (3)$$

其中 κ 度量不同时间尺度之间的差异, 而 α 则是作用强度, 该系统由快变量 x, y, z 对应的快子系统和慢变量 u, v 所对应的慢子系统耦合而成.

2 分岔分析

当作用强度 $\alpha = 0$ 时, 耦合系统退化为典型的洛伦兹系统, 原点 $E_0(0, 0, 0)$ 总是平衡点, 其相应的特征方程可以表示为

$$(\lambda + \beta)[\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda - \sigma(\rho - 1)] = 0. \quad (4)$$

显然, 当参数满足条件 $\beta > 0$, $\sigma + 1 > 0$ 和 $-\alpha(\rho - 1) > 0$ 时, E_0 是稳定的. 而当 $\beta(\rho - 1) > 0$, 存在着两对称的平衡点

$$E_{\pm} \left(\left[\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \sqrt{\beta(\rho - 1)}, (\rho - 1) \right] \right)$$

和

$$E_{\pm} \left(-\left[\sqrt{\beta(\rho - 1)}, -\sqrt{\beta(\rho - 1)}, (\rho - 1) \right] \right),$$

其相应的特征方程为

$$\begin{aligned} \lambda^3 + (\sigma + \beta + 1)\lambda^2 + \beta(\sigma + \rho)\lambda \\ + 2\sigma\beta(\rho - 1) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

其稳定性条件为 $\sigma + \beta + 1 > 0$, $2\sigma\beta(\rho - 1) > 0$ 及 $\sigma^2 + (\beta - \rho + 3)\sigma + \rho(\beta + 1) > 0$. 如当参数为 $\sigma = 1$, $\beta = 8/3$, $\rho = 18$ 时, 存在着三个平衡点 E_0 和 $E_{\pm}$, 其中 E_0 是鞍点, 而 $E_{\pm}$ 均为稳定的焦点, 其相应的特征值近似为 $(-2, -1.33 \pm 8.38i)$, 从而相子空间 (x, y) 由连接鞍点的两条轨道划分为两不同的区域, 分别收敛到不同的稳定焦点(如图 1 所示).

当 $\alpha \neq 0$ 时, 系统(3)则由快慢两子系统耦合而成, 此时不同尺度之间会相互作用, 导致丰富的动力学行为, 例如不同的簇发现象. 为深入分析这些非线性现象的产生机制, 首先考察快子系统随慢变量 u 和耦合强度 α 变化的不同分岔特性.

取定参数 $\sigma = 1$, $\beta = 8/3$, $\rho = 18$, $\kappa = 0.05$, $\mu = 0.1$, $a = 10$, 此时快子系统的平衡点 $E_q(x_0, y_0, z_0)$ 满足

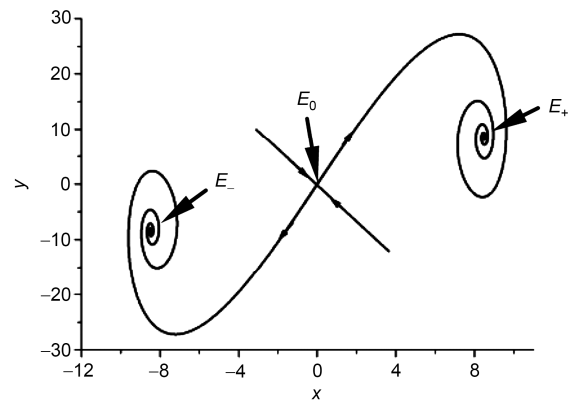


图 1 $\sigma=1$ 时洛伦兹系统平衡点分布

Figure 1 Equilibrium points of Lorenz system for $\sigma=1$.

$$17x_0 - \frac{3}{8}x_0^3 + \alpha u = 0, \quad (6)$$

而 $y_0=x_0$, $z_0=3x_0^2/8$, 其相应的特征方程为

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0. \quad (7)$$

其中 $a_1=14/3$, $a_2=11x_0^2/8-35/3$, $a_3=3x_0^2-136/3$. 由于 $a_1>0$, 而 $a_1a_2-a_3=-82/9+41x_0^2/12$, 因此, 当 $a_3>0$ 时, 平衡点 E_q 是稳定的, 同时当 $a_1a_2-a_3=0$, 可得 $x_0^2=8/3$, 此时 $a_3=-112/3<0$, 因此不可能产生 Hopf 分岔.

当 $a_3=0$, 即 $x_0=\pm 2\sqrt{34}/3$ 时, 此时 $a_1a_2-a_3=1148/27>0$, 平衡点 E_q 失稳会产生 fold 分岔. 图 2 给出了 $\alpha=8.0$ 时快子系统平衡点随慢变量 u 变化的分布情况及其分岔特性, 其中 $SF_{\pm}$ 分别表示两稳定的焦点集合, SD 表示不稳定鞍点集合, $FB_{\pm}$ 分别表示两 fold 分岔点. 从图中可以看出, 当 $u<U_1=-68\sqrt{34}/63\approx-6.294$ 及 $u>U_2=68\sqrt{34}/63\approx6.294$ 时, 快子系统仅存在一个稳定的焦点, 分别位于平衡点集合 $SF_{\pm}$ 上, 而当 $U_1<u<U_2$ 时, 存在三个平衡点, 其中两个稳定位于 $SF_{\pm}$ 上的焦点同时存在, 还存在着不稳定的位于集合 SD 上的鞍点.

同时, 由自激振子的一次近似可知, 慢子系统作周期运动, 其振动幅值近似于 $A_F\approx 2\sqrt{a}=6.32$, 也即慢变量 u 在 $-A_F$ 和 A_F 之间周期变化, 而由平衡点方程 (6) 可知

$$\alpha = \left(\frac{3}{8}x_0^3 - 17x_0 \right) / u. \quad (8)$$

由于 fold 分岔产生满足条件 $x_0=x_{FB}=\pm 2\sqrt{34}/3$, 因此只有当耦合强度 α 大于临界值 $\alpha_{FB}=|(3x_{FB}^3/8-17x_{FB})/A_F|=6.966$ 时, 才会导致快子系统平衡点在

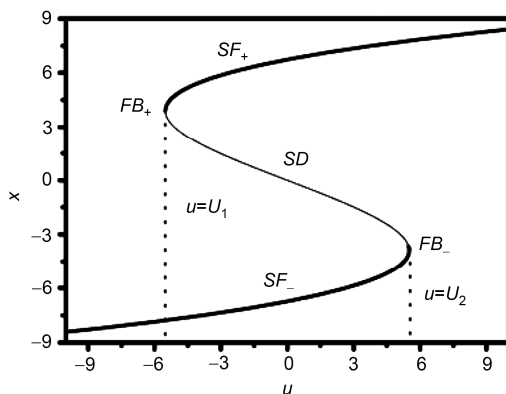


图 2 快子系统平衡点分布

Figure 2 Distribution of equilibrium points of the fast subsystem.

上下两支 $SF_{\pm}$ 之间的跳跃, 即 fold 分岔.

3 Fold/fold 簇发及其机理

考察快子系统随耦合强度 α 变化的动力学特性, 当 $\alpha=6.95$ 时存在两个对称的与自激振子频率相同的周期振荡解, 图 3 给出了其中之一在 (x, y) 平面上的相图.

由于此时 $\alpha<\alpha_{FB}$, 快子系统不存在 fold 分岔, 因而自激振动的激励不会导致快子系统的轨迹穿越鞍点所引起的分界面, 此时系统存在的两种运动的轨迹均以自激振子的振动频率, 分别围绕快子系统的平衡点 $E_{\pm}(\pm 6.733, \pm 6.733, 17)$ 作周期振荡, 如图 3 所示.

计算图 3 中周期振荡的频率为 $\Omega_3=0.0503$, 近似于自激振动的一次近似频率.

逐渐增大 α , 图 4 给出了 $\alpha=7.0$ 时耦合系统的动力学特性, 此时 $\alpha>\alpha_{FB}$, 由上述分析可知, 快子系统存在三个平衡点, 即两稳定的焦点, 记为 E_q^+ , E_q^- 和一不稳定鞍点 E_q^0 (参见图 2), 其中 E_q^+ 位于上支平衡点集合 SF_+ , E_q^- 位于下支平衡点集合 SF_- , E_q^0 位于中间平衡点集合 SD , 快子系统的平衡点会产生 fold 分岔, 导致系统轨迹穿越鞍点引起的分界面, 产生跳跃现象.

假设系统轨迹从 A 点出发, 由于鞍点分界面将相空间划分为上下两个子区域, 轨迹将逐渐收敛于快子系统的稳定焦点 E_q^+ , 其收敛过程表现为振幅逐渐减小的高频振荡, 也即处于激发状态, 其振荡频率接近于稳定焦点的所对应的一对复特征值中的虚部. 经理论计算可知, 此时 E_q^+ 的三特征值为 $(-2.057, -1.305\pm 7.977i)$, 而从其相应的时间历程上可以计算

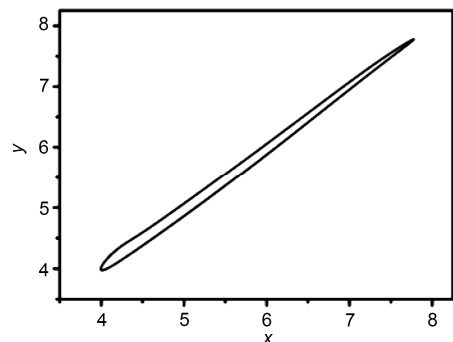


图 3 $\alpha=6.95$ 时的周期解

Figure 3 Periodic solution for $\alpha=6.95$.

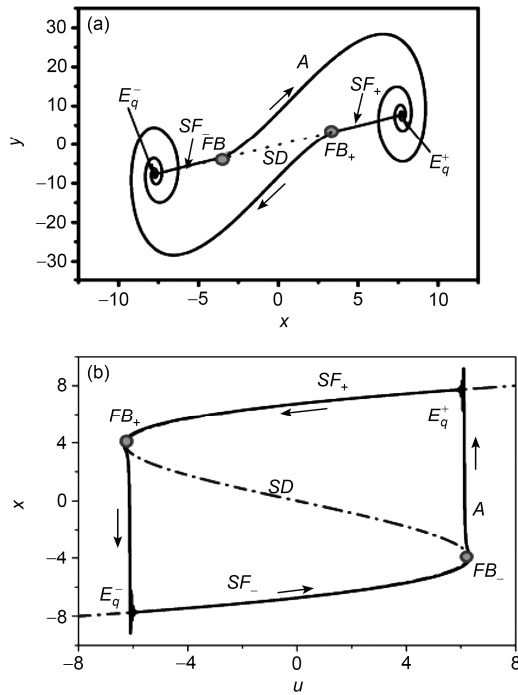


图 4 $\alpha=7.0$, (a) (x, y) 平面上的相图, (b) (u, x) 平面上的相图与图 2 的叠加

Figure 4 $\alpha=7.0$, (a) Phase portraits on (x, y) plane; (b) overlay of phase portraits on (u, x) plane with the curve in Figure 2.

此时的高频振荡频率为 7.945, 与其相应的特征值虚部吻合良好。

当轨迹抵达 E_q^+ 后, 由于此时快子系统的平衡点是稳定的, 整个系统的轨迹将沿着 SF_+ 运动, 表现为沉寂态, 直到 $u=U_1$, 产生 fold 分岔, 导致平衡点的跳跃现象, 使得轨迹从 FB_+ 开始进入激发态, 并逐渐收敛于 E_q^- , 并在抵达 E_q^- 沿着 SF_- 运动, 直到 $u=U_2$, 产生另一次 fold 分岔, 在而慢变量 $u \rightarrow U_2$, 产生 fold 分岔, 导致平衡点从 FB_- 向 SF_+ 跳跃, 抵达 A 点后, 完成一个周期的簇发, 该簇发由两次 fold 分岔连接沉寂态和激发态, 也称为 fold/fold 簇发。

继续增加 α , 图 5 给出了 $\alpha=10$ 时耦合系统的相图及与快子系统平衡点随慢变量变化曲线的叠加, 从图中可以看出, 在两对称的激发态的接近旋转中心处, 会长出一条柄来, 其柄的长度随着 α 的增加而不断增长。这一现象产生的主要原因是由于快子系统的平衡点与 fold 分岔点之间的距离随 α 的增加而不断增加而造成的。从式(7)可以看出, 快子系统的平衡点产生 fold 分岔时必须满足的条件为 $x=\pm X_{FB}=2\sqrt{34}/$

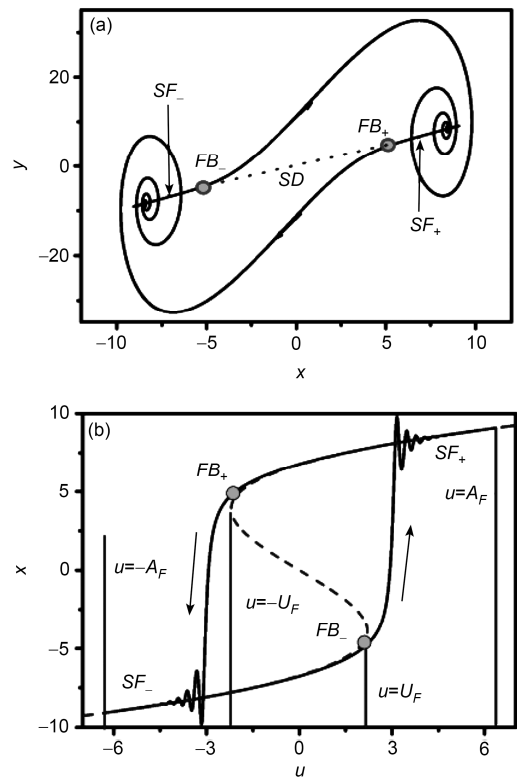


图 5 $\alpha=10$, (a) (x, y) 平面上的相图, (b) (u, x) 平面上的相图与快子系统平衡线的叠加

Figure 5 $\alpha=10$, (a) Phase portraits on (x, y) plane, (b) overlay of phase portraits on (u, x) plane with the equilibrium curve of the fast subsystem.

$3 \approx 3.8873$, 同时由平衡方程(6)可知, 在快子系统平衡线上产生 fold 分岔时 u 满足 $u=\pm U_{FB}=\pm 68\sqrt{34}/9\alpha \approx 44.056/\alpha$, 而由自激振子幅值的一次近似可知, 慢变量 u 的值近似在 $[-A_F, A_F]$ 之间来回做周期振荡, 其中 $A_F \approx 6.32$ 。

表 1 给出了部分 α 值下 fold 分岔产生时所对应的 U_{FB} 的近似数值。

从表 1 中可以看出, 当 $\alpha \rightarrow \alpha_{FB}=6.966$ 时, $U_{FB} \rightarrow U_2=6.294$, 接近于慢变量 u 所能取得的最大值 $u=A_F$, 随着 α 的增大, 发生 fold 分岔时慢变量 u 所对应的 U_{FB} 值越来越小, u 依然要在 $[-A_F, A_F]$ 之间来回做周期振荡, 因此当慢变量 $u \in [-U_{FB}, U_{FB}]$ 时, 耦合系统大致会在快子系统两平衡态上下两支 $SF_{\pm}$ 之间来回跳动, 而当 $u \in [-A_F, -U_{FB}]$ 及 $u \in [U_{FB}, A_F]$ 时, 由于快子系统不发生分岔行为, 耦合系统近似沿快子系统的平衡线运动, 例如当 $\alpha=20$ 时, 在 $u=-2.203$ 时, 耦合系统从 SF_+ 由 fold 分岔从 FB_+ 处进入激发态, 并逐渐稳定于

SF_+ , 并大致在 $(u, x)=(-4.306, -8.546)$ 与快子系统的平衡线一致(参见图 6), 并于 $(u, x)=(-6.351, -9.086)$ 取得极值, 随后沿平衡态返回, 体现在 (x, y) 相图上的柄的长度近似等于 0.54 (图 6(a)).

同时, α 值越大, U_{FB} 与 A_F 之间的距离越长, 导致耦合系统沿快子系统平衡线运动的时间越长, 表现为两对称的激发态的接近旋转中心处产生的柄长度随着 α 的增加而不断增长. 图 7 给出了 $\alpha=140$ 时耦合系统相图及快子系统的分岔情况.

为进一步描述系统行为的突变特性和比较不同耦合强度下的行为差别, 图 8 分别给出 $\alpha=7$ 和 $\alpha=140$ 时的时间历程.

表 1 不同 α 下 fold 分岔对应的 u 近似值

Table 1 Approximated values of u for fold bifurcation with different α

α	7.0	20.0	40.0	140.0
U_{FB}	6.295	2.203	1.101	0.315

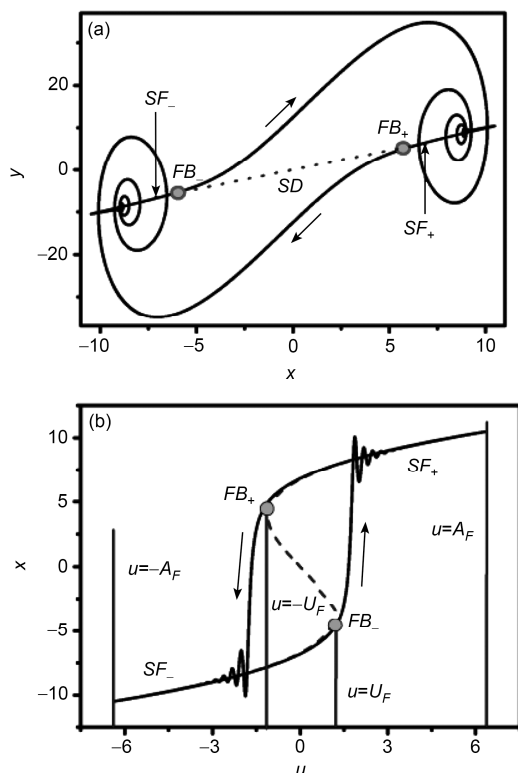


图 6 $\alpha=20.0$, (a) (x, y) 平面上的相图, (b) (u, x) 平面上的相图与快子系统平衡线的叠加

Figure 6 $\alpha=20.0$, (a) Phase portraits on (x, y) plane, (b) overlay of phase portraits on (u, x) plane with the equilibrium curve of the fast subsystem.

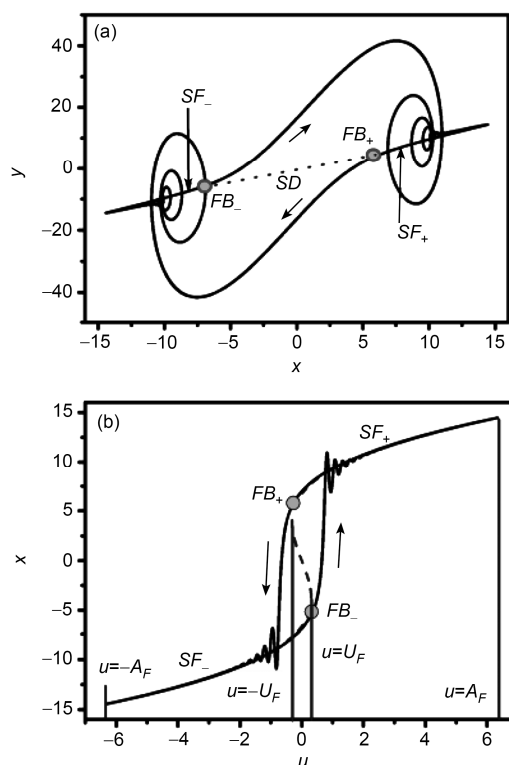


图 7 $\alpha=140.0$, (a) (x, y) 平面上的相图, (b) (u, x) 平面上的相图与快子系统平衡线的叠加

Figure 7 $\alpha=140.0$ (a) Phase portraits on (x, y) plane, (b) overlay of phase portraits on (u, x) plane with the equilibrium curve of the fast subsystem.

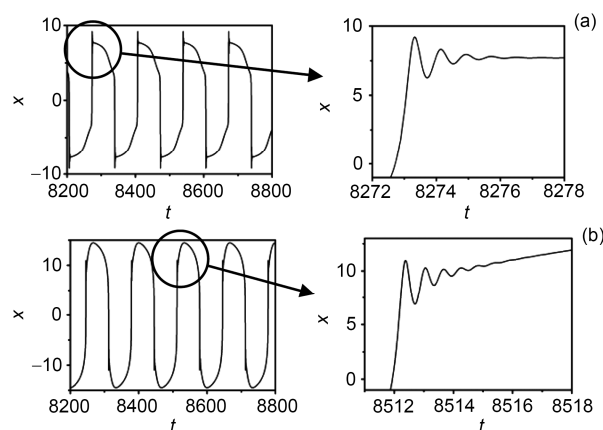


图 8 时间历程 (a) $\alpha=7$, (b) $\alpha=140$

Figure 8 Time histories (a) $\alpha=7$, (b) $\alpha=140$.

从这些图中可以看出, 此时系统的动力学特性定性一致, 均为 fold/fold 簇发, 但由于激励强度的不

同, 簇发行为不尽相同, 首先是在沉寂态上停留的时间不同, 导致这一现象的原因主要是由于 fold 分岔点与激励项幅值之间的不同距离造成的, 从图 8 中的时间历程可以看出振动幅值也会随 α 的增加而增加。

4 结论

自激振动作用下的洛伦兹系统存在不同时间尺度时会产生簇发振荡, 在一定参数条件下, 洛伦兹振子具有二个对称的稳定焦点和一个鞍点, 并相应地

在快子系统中形成定性一致的平衡态。当激励强度较小, 突破不了由鞍点形成的分界面时, 整个系统表现为按自激振子频率振动的周期行为, 随着激励强度的增加, 快子系统会产生 fold 分岔, 引起快子系统不同平衡点之间的跳跃, 会导致整个系统的 fold/fold 簇发现象, 随着激励强度的继续增加, 虽然簇发定性保持不变, 但由于 fold 分岔点与激励项幅值之间的距离发生变化, 在两对称的激发态的接近旋转中心处, 会长出一条柄来, 其长度近似等于 fold 分岔点与激励项幅值之间的距离。

参考文献

- 1 Barrio R, Serrano S. A three-parametric study of the Lorenz model. *Phys D*, 2007, 229(1): 43–51
- 2 Hinke M O, Bernd K. Visualizing the structure of chaos in the Lorenz system. *Comput Graph*, 2002, 26(5): 815–823
- 3 Pishkenari H N, Shahrokhi M, Mahboobi S H. Adaptive regulation and set-point tracking of the Lorenz attractor. *Chaos Solitons Fractals*, 2007, 32: 832–846
- 4 Tlelo-Cuautle E, Munoz-Pacheco J M. Simulation of Chua's circuit by automatic control of step-size. *Appl Math Comput*, 2007, 190: 1526–1533
- 5 Yassen M T. The optimal control of Chen chaotic dynamical system. *Appl Math Comput*, 2002, 131: 171–180
- 6 Ueta T, Chen G. Bifurcation analysis of Chen's equation. *Int J Bifurcat Chaos*, 2000, 10: 1917–1931
- 7 Yu P, Xu F. A common phenomenon in chaotic systems linked by time delay. *Int J Bifurcat Chaos*, 2006, 16: 3727–3736
- 8 Yalcin M E, Suykens J A K, Vandewalle J. Experimental confirmation of 3- and 5-scroll attractors from a generalized Chua's scircuit. *IEEE Trans Circ Syst*, 2004, 47: 425–429
- 9 Baek J, Lee H, Kim S, et al. Adaptive fuzzy bilinear observer based synchronization design for generalized Lorenz system. *Phys Lett A*, 2009, 373: 4368–4375
- 10 Jose A, Julio S, Puebla H. Control of the Lorenz system: Destroying the homoclinic orbits. *Phys Lett A*, 2005, 338: 128–140
- 11 Awad E, Bukhari F. Optimal control of Lorenz system during different time intervals. *Appl Math Comput*, 2003, 144: 337–351
- 12 Bi Q. The mechanism of bursting phenomena in Belousov-Zhabotinsky (BZ) chemical reaction with multiple time scales. *Sci China-Technol Sci*, 2010, 53(3): 748–760
- 13 Yang Z Q, Lu Q S, Li L. The genesis of period-adding bursting without bursting-chaos in the Chay model. *Chaos Solitons Fractals*, 2006, 27: 689–697
- 14 Wang H X, Lu Q S, Wang Q Y. Bursting and synchronization transition in the coupled modified ML neurons. *Commun Nonlinear Sci*, 2008, 13: 1668–1675
- 15 Theodosiou C, Sikelis K, Natsiavas S. Periodic steady state response of large scale mechanical models with local nonlinearities. *Int J Solids Struct*, 2009, 46: 3565–3576
- 16 Innocenti M, Greco L, Pollini L. Sliding mode control for two-time scale systems: Stability issues. *Automatica*, 2003, 39: 273–280
- 17 Han X J, Jiang B, Bi Q. Symmetric bursting of focus-focus type in the controlled Lorenz system with two time scales. *Phys Lett A*, 2009, 373: 3643–3649

Bursting phenomenon as well as the bifurcation mechanism of self-excited Lorenz system

ZHANG ZhengDi & BI QinSheng^{*}

Faculty of Science, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China

The Lorenz system under the influence of self-excited oscillator, which behaves in stable periodic limit cycle, may exhibit rich special nonlinear phenomena when different time scales are introduced. Bifurcation conditions of the fast subsystem have been derived via the analysis of the equilibrium points as well as the corresponding characteristics. Upon the investigation of the dynamical evolution of coupled the system, it is pointed out that, fold/fold bursting may appear when the excitation increases to meet with the conditions of fold bifurcation of the fast subsystem, in which the quiescent state corresponds to the equilibrium state of the fast subsystem, while the spiking state is related to the fluctuation around the foci of the fast subsystem. The bifurcation mechanism is presented, which is applied to the exploration of the bursting evolution with the variation of the parameters. It is found that, with the increase of the excitation, bursters may change in the forms that, near the center of the spiking oscillation, the trajectories of the whole system move along with the equilibrium states of the fast subsystem, the distance of which is approximated at the difference between amplitude of the self-excitation and the values of the slow variable at the fold bifurcation.

self-excited oscillator, Lorenz system, multiple time scales, bursting phenomenon

PACS: 5.45. Xt, 05.45.-a, 05.45.Pq

doi: 10.1360/132012-717