中国科学 : 数学　2012 年　第 42 卷　第 4 期 : 295 ∼ 302
www.springerlink.com　math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

Peng g- 期望下的大数定律

林乾, 石玉峰*

山东大学数学学院, 济南 250100
E-mail: linqian1824@163.com, yfshi@sdu.edu.cn

收稿日期: 2010-11-12; 接受日期: 2012-01-14; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11071145, 10771122 和 11071144), 山东省自然科学基金 (批准号: Y2006A08), 国家自然科学创新群体基金 (批准号: 10921101), 国家重点基础研究发展计划 (批准号: 2007CB814900) 及山东大学自主创新基金 (批准号: 2010JQ010) 资助项目

摘要　Peng 于 1997 年通过倒向随机微分方程引入了一类性质很好的非线性数学期望, 即 g- 期望. 本文中, 我们将给出 Peng g- 期望下的弱大数定律与强大数定律.

关键词　大数定律　g- 期望　倒向随机微分方程
MSC (2010) 主题分类　60H10

1　引言

在适当的假设条件下, Pardoux 和 Peng [1] 证明了倒向随机微分方程 (记为 BSDEs) 有唯一的适应解, 关于 BSDEs 的进一步的详细内容, 读者可参考文献 [2]. 在 [3] 中, Peng 通过 BSDEs 引入了 g- 期望的概念, 并且证明了 g- 期望保持了经典的数学期望的除了线性可加性以外的所有性质, 由此可知, g- 期望是一种典型的非线性数学期望. 同时, 在该文中, Peng 也引进了条件 g- 期望与 g- 鞅的概念. 随后, 一些学者进一步研究了 g- 期望和 g- 鞅的一些性质, 例如, g- 鞅的 Doob-Meyer 分解定理和上穿不等式, g- 期望的 Jensen 不等式, Choquet 期望与 g- 期望的关系等等. g- 期望作为一种典型的非线性期望, 在金融数学与动态风险度量等方面都有十分重要的应用. 此后, Peng [4] 进一步引进了一种全非线性的数学期望, 被称为 G- 期望的次线性期望, 并建立了次线性期望下包括中心极限定理 (见 [5] 和 [6]) 等一系列重要的基础性结果, 从而为非线性概率理论的发展打下了坚实的基础. 然而, 到目前为止, 仍未有关于 g- 期望的大数定律的相关结果.

本文中, 我们将分别给出 g- 期望下的弱大数定律和强大数定律, 它们是相应于 g- 期望的非线性概率理论中非常重要的结果. 同时, 我们也将给出 g- 期望下的 Markov 不等式和 Chebyshev 不等式. 本文结构如下: 在第 2 节, 我们给出一些基本的概念和假设; 在第 3 节, 我们将给出 g- 期望的一些基本结果, 包括 g- 期望下的 Markov 不等式和 Chebyshev 不等式; 在第 4 节, 我们将证明 g- 期望下的大数定律.

2　概念与假设

设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是一概率空间, $(B_t)_{t\geqslant 0}$ 表示 d 维的标准 Brown 运动, $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 是 Brown 运动生成的

引用格式: Lin Q, Shi Y F. Law of large numbers for Peng g-expectation (in Chinese). Sci Sin Math, 2012, 42(4): 295–302, doi: 10.1360/012010-894

信息流, 即,

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{B_s, s \in [0,t]\} \vee \mathcal{N}, \quad t \in [0,T],$$

其中, $\mathcal{N}$ 表示 P- 零测集. 固定一个实数 $T>0$, 进一步, 假设 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$. 记

$L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P) \doteq \{\xi : \xi$ 是$\mathcal{F}_t$- 可测的随机变量, 满足$E|\xi|^2 < \infty\}, t \in [0,T]$;

$L^2_{\mathcal{F}}(0,T) \doteq \{\psi : \psi$是循序可测的过程, 满足$E[\int_0^T |\psi_t|^2 dt] < \infty\}$.

假设 $g(\omega, t, y, z) : \Omega \times [0,T] \times R \times R^d \to R$ 满足下面的条件:

(A1) (Lipschitz 条件) 存在常数 $K>0$, 使得对任意 $t \in [0,T]$, $(y_1, z_1), (y_2, z_2) \in R^{1+d}$,

$$|g(t, y_1, z_1) - g(t, y_2, z_2)| \leqslant K(|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|), \text{ a.s.};$$

(A2) 对任意 $(t,y) \in [0,T] \times R$, $g(t,y,0) \equiv 0$, a.s.

在上面的假设条件下, 由 [1] 知, 对任意 $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, 下面的 BSDE 有唯一的适应解 (y,z),

$$y_t = \xi + \int_t^T g(s, y_s, z_s)\, ds - \int_t^T z_s \cdot dB_s, \quad t \in [0,T]. \tag{1}$$

通过 BSPE (1), Peng [3] 提出了 g- 期望的概念:

定义 2.1 假设 g 满足 (A1) 和 (A2), 对任意 $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, 记 (y,z) 是 BSDE (1) 的适应解, 我们定义 ξ 的 g- 期望, 表示为 $\mathcal{E}_g[\xi]$, 如下:

$$\mathcal{E}_g[\xi] \doteq y_0.$$

由 g- 期望的定义, Peng [3] 引进了条件 g- 期望的概念. Peng [3] 证明了对于任意 $t \in [0,T]$, 存在一个唯一的 $\mathcal{F}_t$ 可测的随机变量 $\eta \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ 使得对于任意 $A \in \mathcal{F}_t$,

$$\mathcal{E}_g[\xi \mathbf{1}_A] = \mathcal{E}_g[\eta \mathbf{1}_A].$$

Peng [3] 称 η 为 ξ 关于 σ- 代数 $\mathcal{F}_t$ 的条件 g- 期望, 且记 η 为

$$\mathcal{E}_g[\xi | \mathcal{F}_t] \doteq \eta.$$

Peng 发现条件 g- 期望 $\mathcal{E}_g[\xi|\mathcal{F}_t]$ 实际上是 BSDE (1) 在 t 时刻的解 $\{y_t\}$, 即

$$\mathcal{E}_g[\xi|\mathcal{F}_t] = y_t, \quad t \in [0,T].$$

g- 期望 $\mathcal{E}_g[\cdot]$ 保持了经典的数学期望除了线性的所有性质, 详细结果可参看 [3] 和 [7]. 由 g- 期望的定义, 自然地可定义 g- 概率:

定义 2.2 对任意 $A \in \mathcal{F}$, 记 $P_g(A) \doteq \mathcal{E}_g[\mathbf{1}_A]$, 我们称 $P_g(A)$ 为 A 的 g- 概率. 我们需要下面的概念.

定义 2.3 称 g 关于 (y,z) 是次可加的, 若对于任意的 $(y_1, z_1), (y_2, z_2) \in R \times R^d$ 和 $t \in [0,T]$ 有

$$g(t, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \leqslant g(t, y_1, z_1) + g(t, y_2, z_2), \text{ a.s.}$$

定义 2.4 称 g 关于 (y,z) 是齐性的 (相应地, 正齐的), 若对于任意的 $(t,y,z) \in [0,T] \times R \times R^d$ 和任意的 $\lambda \in R$ (相应地, 对任意的 $\lambda \in R^+$) 有

$$g(t, \lambda y, \lambda z) = \lambda g(t, y, z), \text{ a.s.}$$

定义 2.5 对于 X_n, $n \in \mathbb{N}$, $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, 我们称 $X_n \to X$, P_g-a.s., 如果存在 $A \in \mathcal{F}$ 使得 $P_g(A) = 0$, 且对于任意 $\omega \in A^c$,

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega).$$

3 预备知识

由倒向随机微分方程的比较定理, 我们易得下面的引理, 具体的内容可参考 [8].

引理 3.1 若 g 关于 (y, z) 是次可加的, 则 $\mathcal{E}_g[\cdot]$ 也是次可加的, 即对于任意的 $\xi_1, \xi_2 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$,

$$\mathcal{E}_g[\xi_1 + \xi_2] \leqslant \mathcal{E}_g[\xi_1] + \mathcal{E}_g[\xi_2].$$

引理 3.2 若 g 关于 (y, z) 是齐性的 (相应地, 正齐的), 则 $\mathcal{E}_g[\cdot]$ 也是齐性的 (相应地, 正齐的), 即对于任意的 $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 和任意的 $\lambda \in R$ (相应地, 任意的 $\lambda \in R^+$),

$$\mathcal{E}_g[\lambda\xi] = \lambda\mathcal{E}_g[\xi].$$

我们给出 g- 期望的 Markov 不等式.

命题 3.3 若 $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 且 g 是正齐的, 则对于任意 $\varepsilon > 0$, 我们有

$$P_g(|\xi - \mathcal{E}_g[\xi]| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathcal{E}_g[|\xi - \mathcal{E}_g[\xi]|]}{\varepsilon}.$$

证明 由引理 3.2, 我们知 $\mathcal{E}_g[\cdot]$ 是正齐的. 设 $A = \{|\xi - \mathcal{E}_g[\xi]| \geqslant \varepsilon\}$, 则有

$$P_g(A) = \mathcal{E}_g[I_A] \leqslant \mathcal{E}_g\left[\frac{|\xi - \mathcal{E}_g[\xi]|}{\varepsilon} I_A\right] = \frac{\mathcal{E}_g[|\xi - \mathcal{E}_g[\xi]| I_A]}{\varepsilon} \leqslant \frac{\mathcal{E}_g[|\xi - \mathcal{E}_g[\xi]|]}{\varepsilon}. \qquad \square$$

下面的推论是关于 g- 期望的 Chebyshev 不等式.

推论 3.4 若 $\xi \in L^4(\Omega, \mathcal{F}, P)$, 且 g 是正齐的, 则对于任意的 $\varepsilon > 0$, 我们有

$$P_g(|\xi - \mathcal{E}_g[\xi]| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathcal{E}_g[|\xi - \mathcal{E}_g[\xi]|^2]}{\varepsilon^2}.$$

命题 3.5 假设 $1 < p, q < \infty$, 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 若 g 关于 (y, z) 满足次可加性和正齐性, 则对于任意 $\xi_1 \in L^{2p}(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\xi_2 \in L^{2q}(\Omega, \mathcal{F}, P)$, 我们有

$$\mathcal{E}_g[|\xi_1 \cdot \xi_2|] \leqslant \left(\mathcal{E}_g[|\xi_1|^p]\right)^{1/p} \cdot \left(\mathcal{E}_g[|\xi_2|^q]\right)^{1/q}.$$

证明 令

$$\xi = \frac{\xi_1}{\left(\mathcal{E}_g[|\xi_1|^p]\right)^{1/p}}, \qquad \eta = \frac{\xi_2}{\left(\mathcal{E}_g[|\xi_2|^q]\right)^{1/q}}.$$

则有

$$\mathcal{E}_g[|\xi \cdot \eta|] \leqslant \mathcal{E}_g\left[\frac{|\xi|^p}{p} + \frac{|\eta|^q}{q}\right] \leqslant \mathcal{E}_g\left[\frac{|\xi|^p}{p}\right] + \mathcal{E}_g\left[\frac{|\eta|^q}{q}\right] = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

因此,

$$\mathcal{E}_g[|\xi_1 \cdot \xi_2|] \leqslant \left(\mathcal{E}_g[|\xi_1|^p]\right)^{1/p} \cdot \left(\mathcal{E}_g[|\xi_2|^q]\right)^{1/q}. \qquad \square$$

命题 3.6 若 g 关于 (y,z) 是次可加的, 则对于任意的 $\xi \in L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$,

$$-\mathcal{E}_g[|\xi|] \leqslant -\mathcal{E}_g[\xi] \leqslant \mathcal{E}_g[-\xi] \leqslant \mathcal{E}_g[|\xi|].$$

特别地, 我们有

$$(\mathcal{E}_g[\xi])^2 \leqslant (\mathcal{E}_g[|\xi|])^2.$$

证明 由引理 3.1 我们推出

$$0 = \mathcal{E}_g[\xi-\xi] \leqslant \mathcal{E}_g[\xi] + \mathcal{E}_g[-\xi],$$

因此,

$$-\mathcal{E}_g[\xi] \leqslant \mathcal{E}_g[-\xi].$$

由 $\mathcal{E}_g[\cdot]$ 的单调性, 可知

$$-\mathcal{E}_g[|\xi|] \leqslant -\mathcal{E}_g[\xi] \leqslant \mathcal{E}_g[-\xi] \leqslant \mathcal{E}_g[|\xi|].$$

因此

$$|\mathcal{E}_g[\xi]| \leqslant \mathcal{E}_g[|\xi|].$$

由此可知结论成立. □

引理 3.7 (Borel-Cantelli 引理) 若 g 关于 (y,z) 是次可加的, $\{A_n, n\in\mathbb{N}\} \subset \mathcal{F}$ 满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_g(A_n) < \infty,$$

则有

$$P_g\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\Big) = 0.$$

证明 由引理 3.1 与 P_g 的连续性得

$$P_g\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\Big) \leqslant P_g\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\Big) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} P_g(A_k).$$

当 $n\to\infty$ 时, 可知结论成立. □

引理 3.8 若 g 关于 (y,z) 是次可加的, 则对于 X_n, $n\in\mathbb{N}$, $X\in L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$, 有 $X_n \to X$, P_g-a.s., 当且仅当, 对于任意 $\varepsilon>0$,

$$P_g\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}\{|X_k - X| \geqslant \varepsilon\}\Big) = 0. \tag{2}$$

证明 若 $X_n \to X$, P_g-a.s., 则对于任意 $\varepsilon>0$, 我们有

$$P_g\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}\{|X_k - X| \geqslant \varepsilon\}\Big) \leqslant P_g\Big(\bigcup_{\varepsilon>0}\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}\{|X_k - X| \geqslant \varepsilon\}\Big) = P_g\left(\{X_k \to X\}^c\right) = 0.$$

若 (2) 成立, 则对于任意的满足 $\varepsilon_i \downarrow 0$ 的序列 $\{\varepsilon_i>0, i\in\mathbb{N}\}$, 我们有

$$\begin{aligned} P_g\left(\{X_k \to X\}^c\right) &= P_g\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}\{|X_k - X| \geqslant \varepsilon_i\}\Big) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} P_g\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}\{|X_k - X| \geqslant \varepsilon_i\}\Big) = 0. \end{aligned}$$

□

4 主要结果

本节的主要结果如下:

定理 4.1 若实值随机变量序列 $\{X_i, i \in N\}$ 满足 $X_i \in L^4(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{E}_g[|X_i|^2] \leqslant M$, $\mathcal{E}_g[X_i X_{i+j}] \leqslant 0$, $i, j = 1, 2, 3, \ldots$, 其中 M 是一正常数, g 满足次可加性和正齐性, 则 $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ 满足:

(i)

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_g\left[\left|\frac{S_n}{n}\right|^2\right] = 0;$$

(ii)

$$\text{对任意 } \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to\infty} P_g\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0;$$

(iii)

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_g\left[\left|\frac{S_n}{n}\right|\right] = 0.$$

证明 (i) 由引理 3.1 和引理 3.2 可知 $\mathcal{E}_g[\cdot]$ 是次可加的和正齐的. 由 $\mathcal{E}_g[X_i X_{i+j}] \leqslant 0$, $i, j = 1, 2, 3, \ldots$, 可得

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_g\left[\left|\frac{S_n}{n}\right|^2\right] &= \frac{1}{n^2}\mathcal{E}_g[|S_n|^2] \\
&= \frac{1}{n^2}\mathcal{E}_g[|S_{n-1} + X_n|^2] \\
&\leqslant \frac{1}{n^2}\mathcal{E}_g[|S_{n-1}|^2] + \frac{1}{n^2}\mathcal{E}_g[|X_n|^2] + \frac{2}{n^2}\mathcal{E}_g[S_{n-1}X_n] \\
&\leqslant \frac{1}{n^2}\mathcal{E}_g[|S_{n-1}|^2] + \frac{1}{n^2}\mathcal{E}_g[|X_n|^2] \\
&\leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathcal{E}_g[|X_i|^2] \\
&\leqslant \frac{1}{n^2}nM = \frac{M}{n}.
\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_g\left[\left|\frac{S_n}{n}\right|^2\right] = 0.$$

(ii) 由推论 3.4 知, 对于任意 $\varepsilon > 0$,

$$P_g\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathcal{E}_g[|\frac{S_n}{n}|^2]}{\varepsilon^2} \longrightarrow 0, \quad n \to \infty.$$

(iii) 由命题 3.5 可推出

$$\left(\mathcal{E}_g\left[\left|\frac{S_n}{n}\right|\right]\right)^2 \leqslant \mathcal{E}_g\left[\left|\frac{S_n}{n}\right|^2\right].$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_g\left[\left|\frac{S_n}{n}\right|\right] = 0. \qquad \square$$

定理 4.2 若实值随机变量序列 $\{X_i, i\in\mathbb{N}\}$ 满足 $X_i\in L^4(\Omega,\mathcal{F},P)$, $\mathcal{E}_g[|X_i|^2]\leqslant M$, $\mathcal{E}_g[X_iX_{i+j}]\leqslant 0$, $i,j=1,2,3,\ldots$, 其中 M 是一正常数, g 满足次可加性和正齐性, 则 $S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$ 满足:

(i)
$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}_g\left[\left|\frac{S_n}{n}-\mathcal{E}_g\left[\frac{S_n}{n}\right]\right|^2\right]=0;$$

(ii)
$$\lim_{n\to\infty}P_g\left(\left|\frac{S_n}{n}-\mathcal{E}_g\left[\frac{S_n}{n}\right]\right|\geqslant\varepsilon\right)=0,\quad\forall\,\varepsilon>0;$$

(iii)
$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}_g\left[\left|\frac{S_n}{n}-\mathcal{E}_g\left[\frac{S_n}{n}\right]\right|\right]=0.$$

证明 我们只需证明 (i). 由引理 3.1 和 3.2 知, $\mathcal{E}_g[\cdot]$ 是次可加的和正齐的. 因此, 由命题 3.5 和 3.6, 得

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_g\left[\left|\frac{S_n}{n}-\mathcal{E}_g\left[\frac{S_n}{n}\right]\right|^2\right]&=\mathcal{E}_g\left[\left|\frac{S_n}{n}\right|^2+\left(\mathcal{E}_g\left[\frac{S_n}{n}\right]\right)^2-2\frac{S_n}{n}\mathcal{E}_g\left[\frac{S_n}{n}\right]\right]\\&\leqslant\mathcal{E}_g\left[\left|\frac{S_n}{n}\right|^2\right]+\left(\mathcal{E}_g\left[\frac{S_n}{n}\right]\right)^2+\mathcal{E}_g\left[-2\frac{S_n}{n}\mathcal{E}_g\left[\frac{S_n}{n}\right]\right]\\&\leqslant\mathcal{E}_g\left[\left|\frac{S_n}{n}\right|^2\right]+3\left(\mathcal{E}_g\left[\left|\frac{S_n}{n}\right|\right]\right)^2\\&\leqslant 4\mathcal{E}_g\left[\left|\frac{S_n}{n}\right|^2\right]\leqslant\frac{4M}{n}.\end{aligned}$$

因此
$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}_g\left[\left|\frac{S_n}{n}-\mathcal{E}_g\left[\frac{S_n}{n}\right]\right|^2\right]=0.$$

类似于定理 4.1 的证明, 易知 (ii) 和 (iii) 成立. 证毕. □

定理 4.3 若实值随机变量序列 $\{X_i, i\in\mathbb{N}\}$ 满足 $X_i\in L^4(\Omega,\mathcal{F},P)$, $\mathcal{E}_g[|X_i|^2]\leqslant M$, $\mathcal{E}_g[X_iX_{i+j}]\leqslant 0$, $i,j=1,2,3,\ldots$, 其中 M 是一正常数, g 满足次可加性和正齐性, 则 $S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$ 满足:
$$P_g\left(\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=0\right)=1.$$

证明 对于任意 $\varepsilon>0$, 我们有
$$P_g\left(\left|\frac{S_n}{n}\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\mathcal{E}_g\left[\left|\frac{S_n}{n}\right|^2\right]\leqslant\frac{M}{n\varepsilon^2}.$$

因此, 对于子列 $\{X_{n^2}\}$, 有
$$\sum_{n=1}^{\infty}P_g(|S_{n^2}|\geqslant n^2\varepsilon)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M}{n^2\varepsilon^2}<\infty.$$

由引理 3.7 得
$$P_g\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}\left\{\left|\frac{S_{n^2}}{n^2}\right|\geqslant\varepsilon\right\}\right)=0,\quad\forall\,\varepsilon>0.$$

由引理 3.8 得

$$\frac{S_{n^2}}{n^2} \to 0, \quad P_g\text{-a.s.} \tag{3}$$

因为对任意的 $k \in \mathbb{N}$, 存在 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $n^2 \leqslant k < (n+1)^2$, 所以

$$|S_k| \leqslant |S_{n^2}| + |S_k - S_{n^2}| \leqslant |S_{n^2}| + D_n,$$

其中

$$D_n := \max_{n^2 \leqslant k < (n+1)^2} |S_k - S_{n^2}|.$$

因此

$$\frac{|S_k|}{k} \leqslant \frac{|S_{n^2}| + D_n}{n^2}. \tag{4}$$

因为

$$D_n^2 = \max_{n^2 \leqslant k < (n+1)^2} |S_k - S_{n^2}|^2 \leqslant \sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2-1} |S_k - S_{n^2}|^2,$$

我们有

$$\mathcal{E}_g\left[D_n^2\right] \leqslant \sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2-1} \sum_{j=n^2+1}^{k} \mathcal{E}_g[X_j^2] \leqslant 4n^2 M.$$

因此

$$P_g(D_n \geqslant n^2\varepsilon) \leqslant \frac{\mathcal{E}_g[D_n^2]}{n^4\varepsilon^2} \leqslant \frac{4M}{n^2\varepsilon^2}.$$

类似, 我们可得

$$\frac{D_n}{n^2} \to 0, \quad P_g\text{-a.s.} \tag{5}$$

由 (3)–(5), 可得

$$\frac{S_n}{n} \to 0, \quad P_g\text{-a.s.} \qquad \square$$

注 4.4 在上面的定理中, 我们使用了条件 $\mathcal{E}_g[XY] \leqslant 0$. 事实上, 与经典的概率理论一样, 这个条件是很容易满足的. 例如: 对于任意 $X_1, X_2 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $X_1 \leqslant X_2$, a.s., 使得 $\mathcal{E}_g\left[X_1^2\right] \leqslant M^2$, $\mathcal{E}_g\left[X_2^2\right] \leqslant M^2$, 其中 $M > 0$, 那么 $\mathcal{E}_g\left[X_1X_2 - M^2\right] \leqslant 0$. 记 $Y_1 := X_1 - M$, $Y_2 := X_2 + M$, 显然有 $Y_1, Y_2 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 且 $\mathcal{E}_g[Y_1Y_2] \leqslant 0$.

注 4.5 对于随机变量序列, 同样有 $\mathcal{E}_g[\xi_i\xi_j] \leqslant 0$. 取 $\{A_i, B_j\}_{i,j=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ 使之满足 $A_i \cap B_j = \emptyset$, $i, j = 1, 2, \ldots$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$, $B_i \cap B_j = \emptyset$ $(i \neq j)$, $P(A_i) > 0$, $P(B_j) > 0$. 若 g 满足上面定理中的条件, 且记 $\xi_1 := I_{A_1} + I_{B_1}$, $\xi_2 := I_{A_2} - I_{B_1}$, $\xi_3 := I_{A_3} + I_{B_2}$, $\xi_4 := I_{A_4} - I_{B_2}$, $\xi_5 := I_{A_5} + I_{B_3}$, $\xi_6 := I_{A_6} - I_{B_3}$, $\ldots$, 则对于随机变量序列 $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$, 显然有 $\mathcal{E}_g[\xi_i\xi_j] \leqslant 0$, $i, j = 1, 2, 3, \ldots$

注 4.6 事实上, 由 [8] 的定理 3.3 知, $\mathcal{E}_g$ 是次可加的当且仅当 g 独立于 y 且是次可加的.

致谢 作者感谢审稿人和编辑提出的修改意见, 也感谢李敏博士提供的改进意见.

参考文献

1 Pardoux E, Peng S. Adapted solution of a backward stochastic differential equation. Systems Control Letters, 1990, 14: 55–61

2 El Karoui N, Peng S, Quenez M. Backward stochastic differential equations in finance. Math Finance, 1997, 7: 1–71

3 Peng S. Backward stochastic differential equations and related g-expectation. In: El Karoui N, Mazliak L, eds. Backward Stochastic Differential Equations. Pitman Res Notes Math Ser, vol. 364. Harlow: Longman, 1997, 141–159
4 Peng S. G-expectation, G-Brownian motion and related stochastic calculus of Itô's type. In: Benth F, Di Nunno G, Lindstrøm T, et al., eds. Stochastic Analysis and Applications. Abel Symposia, vol. 2. Berlin/Heidelberg: Springer, 2007, 541–567
5 Peng S. Survey on normal distributions, central limit theorem, Brownian motion and the related stochastic calculus under sublinear expectations. Sci China Ser A, 2009, 52: 1391–1411
6 Li M, Shi Y. A general central limit theorem under sublinear expectations. Sci China Math, 2010, 53: 1989–1994
7 Briand P, Coquet F, Hu Y, et al. A converse comparison for BSDEs and related properties of g-expectations. Electron Comm Probab, 2000, 5: 101–117
8 Jiang L. Convexity, translation invariance and subadditivity for g-expectations and related risk measures. Ann Appl Probab, 2008, 18: 245–258

Law of large numbers for Peng g-expectation

LIN Qian & SHI YuFeng

Abstract Peng in 1997 introduced a class of well-defined nonlinear mathematical expectations, i.e., so-called g-expectations, by virtue of backward stochastic differential equations. In this paper we show a class of laws of large numbers for g-expectations in both weak form and strong form.

Keywords **law of large numbers, g-expectations, backward stochastic differential equations**

MSC(2010) **60H10**

doi: **10.1360/012010-162**