中国科学: 数学 2025 年 第 ? 卷 第 ? 期: 1 ~ 26
SCIENTIA SINICA Mathematica
综 述

一维谱测度理论

献给文志英教授 80 寿辰

戴欣荣[1], 付延松[2], 何兴纲[3,4]*

1. 中山大学数学学院, 广州 510275;
2. 中国矿业大学 (北京) 理学院, 北京 100083;
3. 安顺学院数学与计算机科学学院, 安顺 561000;
4. 华中师范大学数学与统计学学院, 武汉 430079

E-mail: daixr@mail.sysu.edu.cn, yansong_fu@126.com, xingganghe@163.com

收稿日期: 2025-03-28; 接受日期: 2025-09-10; 网络出版日期: 2025-XX-XX; * 通信作者
国家重点研发计划资助 (课题编号: 2024YFA1013703); 国家自然科学基金资助 (批准号: 12271534, 12371087, 12371090); 中山大学广东省计算数学重点实验室资助; 中央高校基本科研业务费资助 (编号: 2023ZKPYLX01)

摘要 本文将简要介绍直线 $\mathbb{R}$ 上谱测度理论的核心问题、重要方法和近期进展. 具体内容包含测度的谱性判别, 谱的表示和分布, 谱特征值问题, Fourier 级数的敛散性问题等.

关键词 谱测度 谱 谱特征值问题 谱的分布 Fourier 级数

MSC (2020) 主题分类 28A80 42A85

1 引言

本综述只讨论直线 $\mathbb{R}$ 上谱测度理论的部分内容. 感兴趣的读者可以此为起点, 快速融入到谱测度理论研究中. 文中提到的大部分理论, 在高维空间 $\mathbb{R}^n$ 中也有相应的问题和结果, 这里不再专门指出.

谱测度的理论研究目前正处于快速发展的过程中, 而它在一些领域的应用则刚刚起步. 这里我们将谱测度理论的**部分**研究课题列举如下:

- 测度的谱性问题: 任给正有限测度, 研究其是否为谱测度;
- 非谱测度问题: 研究测度的指数型极大正交族的势, 研究测度是否具有 Riesz 谱、框架谱等;
- 谱的结构、谱的分布和谱特征值问题;
- 谱测度对应的酉算子谱理论等算子理论;
- 谱测度的复分析理论;
- 谱测度、谱与整平移铺砌;
- 谱测度与代数数论;

英文引用格式: Dai X.-R., Fu Y.-S., He X.- G.. The Theory Of One-dimensional Spectral Measures (in Chinese). Sci Sin Math, 2025, ?: 1–26, doi: 10.1360/SSM-2022-XXXX

- 谱测度理论在小波分析中的应用;
- 谱测度理论在分形测不准原理中的应用;
- 与谱测度相关的 Fourier 级数, Fourier 积分与三角级数理论 (这是一个非常广阔的研究方向).

本文从谱测度的背景和问题出发, 对 "为什么做" 和 "怎样做" 作一个导论. 作为引言, 本节的主要目标是陈述谱测度的定义、基本性质和该领域的一些猜想和重要问题.

众所周知, Hilbert 空间 $L^2[0,1]$ 有 Fourier 正交基 $\{e^{2\pi inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$. 人们以此为起点, 建立了 $L^2[0,1]$ 上的 Fourier 分析理论. 自然地有如下基本问题: 给定一个正测度 μ, 空间 $L^2(\mu)$ 是否也有 Fourier 正交基? 为此, 可引入以下关于谱测度的定义.

定义1.1 设 μ 为 $\mathbb{R}$ 上的一个紧支有限 Borel 测度. 若 $L^2(\mu)$ 上具有形如

$$E_\Lambda := \left\{ e^{2\pi i\lambda x} : \lambda \in \Lambda \right\} \tag{1.1}$$

的正交基, 则称 μ 为谱测度, 称 Λ 是 μ 的一个谱. 此时, 也称 (μ, Λ) 构成一个谱对.

注1.1 该定义对非紧支有限测度同样适用, 而本文仅关注紧支测度的谱理论. 值得一提的是, Strichartz 在文献 [73] 的第 4 节研究了非紧支概率测度的 Fourier 变换理论, Li-Miao-Wang[63] 近期研究了非紧支概率测度的谱性. 对该内容感兴趣的读者可以参阅文献 [63, 73] 及引用它们的文献.

现陈述一类特殊谱测度如下: 若限制在一个正 Lebesgue 可测集上的 Lebesgue 测度是谱测度, 则称该集合为谱集. 1974 年, Fuglede[40] 提出了以下著名的谱集猜想.

猜想1.1 (谱集猜想) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为谱集的充分必要条件是 Ω 为平移 Tile, 即可以通过平移 Ω, 几乎处处无重叠地覆盖 $\mathbb{R}^n$.

谱集猜想在一维和二维时至今仍是公开问题. 特别地, 在一维情况, 人们仅对 Ω 为两个有限区间并的谱集猜想作出了完整刻画 [52]. 关于其它特殊集合上的谱集猜想 (例如，三个区间并，凸体等), 读者可以参阅 Bose-Madan[10]、Łaba-Londner[53]、Lev-Matolcsi[58]、陶哲轩 [75] 及相关文献 [9, 32, 47, 56], 了解问题的本质及相应的进展.

谱的正交性是一个十分重要的性质, 自然地, 它对测度也提出了一些严格的要求. 这也导致了很多重要的测度并不满足谱测度的条件. 因此, 人们也考虑利用指数型的 Riesz 基或者框架来代替正交基, 进而考虑相应的一些问题.

定义1.1 设 μ 是一个紧支有限 Borel 测度. 若存在指数函数族 E_Λ 和正常数 A 与 B 满足

$$A\|f\|^2_{L^2(\mu)} \leqslant \sum_{\lambda\in\Lambda} |\langle f, e^{2\pi i\lambda x}\rangle_{L^2(\mu)}|^2 \leqslant B\|f\|^2_{L^2(\mu)}, \qquad \forall f \in L^2(\mu),$$

其中

$$\langle f, e^{2\pi i\lambda x}\rangle_{L^2(\mu)} = \int f(x)e^{-2\pi i\lambda x} d\mu(x), \quad \|f\|^2_{L^2(\mu)} = \int |f(x)|^2 d\mu(x),$$

则称 μ 为框架谱测度, 称 Λ 为 μ 的一个框架谱. 进一步, 若 E_Λ 构成 $L^2(\mu)$ 的一个基, 则称 μ 为 Riesz谱测度, Λ 为 μ 的一个 Riesz 谱.

有关 Riesz 谱测度与框架谱测度, 目前的工作很少, 最为大家所知的是Łaba-Wang[55]、He-Lai-Lau[44] 给出的如下分类定理, 及它的进一步结果 [16, 30]:

定理1.1 ([44, 55]) 若 μ 为框架谱测度, 则它是一个纯型的测度, 即要么 μ 是 Dirac 测度的等权有限线性组合, 要么是限制在紧集上的正有限 Lebesgue 测度, 要么是奇异连续的正有限测度.

Riesz 谱测度与框架谱测度的重要性不言而喻. 然而, 目前为止人们对它们的研究尚缺乏有效的技术和思想. 下面这个看似简单的问题是著名数学家 Strichartz 生前极为关心的问题, 但是一直以来似乎都没什么进展.

问题1.1 (Strichartz 问题)　三分 Cantor 测度是否是 Riesz 谱测度或框架谱测度?

根据定理 1.1, 谱测度包含离散、奇异连续和绝对连续三种类型. 其中奇异连续测度的种类最多、内容最为丰富, 并且与分形几何联系最密切. 本文主要讨论这部分内容.

1998 年, Jorgensen 和 Pedersen[49] 发现: 三分 Cantor 测度 $\mu_{3,\{0,2\}}$ 不是谱测度; 但是四分 Cantor 测度 $\mu_{4,\{0,2\}}$ 是谱测度, 并且

$$\Lambda_4 := \cup_{k=1}^{\infty} \left(\{0,1\} \oplus 4\{0,1\} \oplus \cdots \oplus 4^{k-1}\{0,1\}\right) \tag{1.2}$$

是它的一个谱. Cantor 测度是最具代表性的分形测度之一, 即特殊的自相似测度. 如下回顾等压缩自相似测度的定义:

给定实数 $\rho(|\rho|>1)$、有限数字集 D 和概率权 $P=\{p_d\}_{d\in D}$, 则存在唯一的紧支概率测度 $\mu_{\rho,D,P}$ 满足尺度方程

$$\mu_{\rho,D,P}(E) = \sum_{d\in D} p_d \mu_{\rho,D,P}(\rho E - d),$$

其中 E 为任意的 Borel 集. 该测度 $\mu_{\rho,D,P}$ 被称为*自相似测度*, 其支集 $T(\rho,D)$ 被称作*自相似集*, 它是满足自相似迭代方程

$$T(\rho,D) = \bigcup_{d\in D} \phi_d(T(\rho,D))$$

的非空紧集, 其中 $\{\phi_d(x)=\rho^{-1}(x+d)\}_{d\in D}$ 为 ρ, D 生成的*函数迭代系统*. 特别地, 若 P 是等概率权, 简记 $\mu_{\rho,D,P}$ 为 $\mu_{\rho,D}$.

关于自相似测度和自相似集的维数理论等请参考文志英教授的专著 [76].

2002 年, Łaba 和汪扬[54] 提出了关于自相似谱测度的一个基本问题:

猜想1.2 (Łaba-Wang 猜想)　若自相似测度 $\mu_{\rho,D,P}$ 为谱测度, 则

(1) ρ 为整数;

(2) P 是等概率权的;

(3) 存在非零实数 α 使得 αD 为整 Tile, 即存在整数集 Γ 满足 $\alpha D \oplus \Gamma = \mathbb{Z}$.

关于这个猜想, 当 $\#D=2$ 时, Jorgensen 和 Pedersen[49] (1998 年), Hu-Lau[46] (2008 年) 和 Dai[11] (2012 年) 的系列工作证明了它是成立的. 此后, Dai-He-Lau[17] (2014 年) 证明了该猜想对连续型数字集成立; Fu-Wen[39] (2017 年) 证明了当 $\#D=3$ 时猜想成立; An-He-Lai[5] (2023 年) 证明了当 $\#D=4$ 时猜想成立 (事实上, 他们证明了修正的Łaba-Wang 猜想成立, 见猜想 2.1). 对于一般测度, Deng-Chen[19] 证明了猜想中的 (2) 成立. An-Wang[8] 证明了当测度的 Fourier 变换的零点满足一定的条件时, 猜想中的 (1) 对自相似谱测度成立.

截至目前, Łaba-Wang 猜想仍未完全解决, 但目前已知的自相似谱测度都满足猜想中的 (1) 和 (2), 并且大部分都满足 (3) 中的 $\alpha=1$. 最近, An-Lai[6] 进一步修正了Łaba-Wang 猜想中的 (3)(见第 2 节).

综合Łaba-Wang 猜想和谱集猜想所指出的谱性与平移性质的联系, 我们有如下关于自相似测度的猜测:

猜测1.1 设 D 为有限整数集. 任给实数 $\rho > 1$, 则自相似测度 $\mu_{\rho,D}$ 是谱测度的充要条件为 D 为整 Tile 且 $\#D \mid \rho$.

或者, 可以将上述猜测更具体地描述为:

猜测1.2 设 $b \geqslant N > 1$ 为正整数, D 为 $\mathbb{Z}_N$-Tile, 即存在 Γ 使得 $D \oplus \Gamma = \{0, 1, \ldots, N-1\} \pmod N$. 则自相似测度 $\mu_{b,D}$ 是谱测度的充要条件为 $N \mid b$.

本文剩余节次安排如下. 本文第 2, 3 节具体讨论 $\mathbb{R}$ 上自相似测度和 Moran 测度的谱性的证明方法, 第 4, 5, 6 节介绍在谱的表示、密度问题和谱特征值问题等方面取得的进展, 第 7 节介绍奇异谱测度的 Fourier 级数的收敛和发散性结果.

2 预备知识, 自相似测度和一致齐次 Moran 测度的谱性

设 μ 是一个紧支 Borel 概率测度. 定义它的 Fourier 变换为

$$\widehat{\mu}(\xi) = \int \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} \xi x} d\mu(x).$$

不难验证 $E_\Lambda = \{\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \lambda x} : \lambda \in \Lambda\}$ 是 $L^2(\mu)$ 的一个 (规范) 正交集的充要条件为

$$\Lambda - \Lambda \in R(\widehat{\mu}) \cup \{0\}, \tag{2.1}$$

其中 $R(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$ 为函数 f 的零点集, 两个集合的差定义为 $E - F = \{e - f : e \in E, f \in F\}$. 方便起见, 总是直接称上述 Λ 为 μ 的一个 (规范) 正交集. 记

$$Q_\Lambda(x) := \sum_{\lambda \in \Lambda} |\widehat{\mu}(x + \lambda)|^2, \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

利用 Parseval 恒等式, Jorgensen-Pedersen[49] 得到如下基本判据:

定理2.1 假设 μ 是一个紧支 Borel 概率测度. 则
(i) Λ 为 $L^2(\mu)$ 的正交集的充要条件为 $Q_\Lambda(x) \leqslant 1$;
(ii) Λ 为 $L^2(\mu)$ 的正交基的充要条件为 $Q_\Lambda(x) \equiv 1$.
(iii) 若 Λ 为正交集, 则 $Q_\Lambda(z)$ 为整函数.

该定理也被称作 Jorgensen-Pedersen 判据. 事实上, 判别正交集的完备性方法有很多, 如利用 Parseval 恒等式、小波分析中的框架理论 [26] 等, 但是在谱测度理论中所建立的大多数理论和结果都以这个定理为基础.

下面的引理由 Dai-He-Lau[17](2014 年) 给出, 它常被用于判定一个正交集的不完备性, 进而刻画测度的谱性.

引理2.1 假设 $\mu = m * \nu$ 是两个测度的卷积, 并且 m 不是 Dirac 测度. 若 Λ 为 ν 的正交集, 则 Λ 不是 μ 的谱.

除了上述引理外, 文献 [17] 的主要工作是给出了 N-Bernoulli 卷积 $\mu_{\rho,\{0,1,\ldots,N-1\}}$ 的谱性刻画, 即: $\mu_{\rho,\{0,1,\ldots,N-1\}}$ 是谱测度当且仅当 $\rho \in N\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. 特别地, 该文设计的以下步骤是后续众多类型测度的谱性刻画的一个证明框架 [1, 2, 13, 14, 20, 65].

- 当 $N|\rho$ 时, N-Bernoulli 卷积为谱测度 (有多种方法可证明, 如 Strichartz 判别法 [72], 或直接构造它们的典型谱);

- N-Bernoulli 卷积有无穷正交集的充要条件为

$$\rho=\sqrt[r]{\frac{m}{n}},\ \text{其中} m,n\ \text{互素} r\in\mathbb{N}\ \text{且} N\mid m \tag{2.3}$$

(当 $N=2$ 时, 证明由 Hu-Lau[46] 给出. 对于一般的 N, 该结果归功于丰德军和汪扬 (未发表), 细节见 [17]);

- 当 ρ 为满足 (2.3) 的无理数时, N-Bernoulli 卷积不是谱测度 (由引理 2.1 可以直接得到);
- 当 $\rho=\frac{m}{n}$, $n>1$ 且 m,n 互素时, N-Bernoulli 卷积不是谱测度 (利用 N-Bernoulli 卷积测度 Fourier 变换的对数衰减性质 [11,51]).

最近, An-He-Lai[5] 深入研究了 $\#D=4$ 时的Łaba-Wang 猜想, 得到了一些深刻的结果. 我们从整 Hadamard 三元组概念开始介绍.

定义2.1 设 $N\geqslant 2$ 为正整数, $D\subset\mathbb{Z}$ 为有限数字集. 若存在 $C\subset\mathbb{Z}$ 使得 $\#D=\#C$ 且矩阵 $\frac{1}{\sqrt{\#D}}[\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}b^{-1}dc}]_{d\in D,c\in C}$ 为酉阵, 则称 (N,D) 是整容许对, 也称 (N,D,C) 是整Hadamard 三元组, 或简称它们为容许对和 Hadamard三元组.

定义2.2 设 $0\in D\subset\mathbb{N}\cup\{0\}$, $2\leqslant N\in\mathbb{N}$. 如果 D 具有 N 型分解, 即 $D=\bigcup_{a\in\mathcal{A}}(a+N\mathcal{B}_a)$ 为不交并, 且存在整数集 $\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2$ 使得 $(N,\mathcal{A},\mathcal{C}_1),\{(N,\mathcal{B}_a,\mathcal{C}_2),(N,\mathcal{A}\oplus\mathcal{B}_a,\mathcal{C}_1\oplus\mathcal{C}_2)\}_{a\in\mathcal{A}}$ 都是 Hadamard 三元组, 则称 D 为 N 的乘积型数字集.

定理2.2 (An-He-Lai[5]) 若数字集 D 为 N 的乘积型数字集型, 则自相似测度 $\mu_{N,D}$ 为谱测度.

事实上, Łaba-Wang 猜想的结论 (3) 存在瑕疵, 因为存在反例使得它不成立 (见后文**注** 2.1). 但是这并不影响该猜想思想的深刻性和它在测度谱理论研究中的重要地位. 现陈述修正的Łaba-Wang 猜想如下:

猜想2.1 (修正的Łaba-Wang 猜想) 设 $0\in D$ 为有限数字集, $\mu_{\rho,D,P}$ 为自相似谱测度, 则

(1) P 为等概率, 即 $p_d=\frac{1}{\#D}$ 对所有的 $d\in D$;

(2) $\rho=N$ 为整数;

(3) 存在实数 α 和自然数 k, 使得 $(\alpha D)_k=(\alpha D)+N(\alpha D)+\cdots+N^{k-1}(\alpha D)$ 为 N^k 的乘积型数字集型.

An-He-Lai[5] 证明了当 $\#D=4$ 时, 修正的Łaba-Wang 猜想成立, 即:

定理2.3 设 $\rho>1$, $D=\{0,a,b,c\}$ 为非负数字集. 则 $\mu_{\rho,D}$ 为自相似谱测度的充要条件为

(i)$\rho=2^{\beta}m$, 其中 $\beta\geqslant 1$, m 为奇数;

(ii) 存在 α 使得 $\alpha D=\{0,d,2^t\ell,d+2^t\ell'\}$, 其中 d,ℓ,ℓ' 为奇数, 且 β 不是 t 的因子.

注2.1 若 $0\in D\subset\mathbb{N}\cup\{0\}$, $\#D=4$, 则 D 为整 Tile 的充要条件为 D 有定理 2.3(ii) 中的结构, 参见文献 [34].

类似于自相似测度, 可将谱集猜想和Łaba-Wang 猜想的研究思想引入到齐次 Moran 测度的谱性问题中. 这里要特别指出, Moran 集与 Moran 测度是分形几何的重要研究对象, 有关它们的分形及动力系统性质研究, 国内团队一直都处于国际上最领先的位置, 也是国内分形研究的一个标志[33,59,66,69,77,78]. An-He-Li[4] 首先引入了 Ramsey 定理来处理 Moran 测度谱性与其数字集的势、压缩系数的关系.

定理2.4 (Ramsey 定理) 设 $\mathcal{A}$ 为可数无穷集, $\mathcal{A}^{(k)}$ 为 $\mathcal{A}$ 中任意 k 个元素组合生成的集族. 任将 $\mathcal{A}^{(k)}$ 划分为有限 r 类, 则存在 $\mathcal{A}$ 的无穷子集 T 满足 $T^{(k)}$ 在同一类中.

利用 Ramsey 定理和引理 2.1, 并结合 N-Bernoulli 卷积测度的谱性讨论, 可以证明如下结论 (参考文献 [4,39]).

定理2.5 设整数字集序列 $\{D_i\}_{i=1}^{\infty}$ 一致有界 (即 $\cup_{i=1}^{\infty} D_i$ 是有界集), $\gcd D_i = 1$ 并且 $\# D_i = 2$ (或 3). 则一致齐次 Moran 测度

$$\mu_{\rho,\{D_i\}} := \delta_{\rho^{-1}D_1} * \delta_{\rho^{-2}D_2} * \cdots \tag{2.4}$$

为谱测度的必要条件为 $\rho \in 2\mathbb{N}$(或相应地 $\rho \in 3\mathbb{N}$).

关于一维一致齐次 Moran 测度 $\mu_{\rho,\{D_i\}}$ 的谱性刻画, 相关论文很少, 可做问题很多. 例如, 将上述定理中的数字集序列 "一致有界" 条件改成 "以某种速度趋于无穷" 时, 能否证明存在 ρ 使得对应的一致齐次 Moran 测度是谱测度? 再如, 以下的猜测是否成立?

猜测2.1 设式 (2.4) 中的整数字集序列 $\{D_i\}_{i=1}^{\infty}$ 一致有界, 且 $\{\# D_i : i \in \mathbb{N}\} = \{2, 3\}$. 若 $\mu_{\rho,\{D_i\}}$ 为谱测度, 则 $\rho \in 6\mathbb{N}$.

亦可考虑上述猜测的逆命题是否成立等. 更一般地, 可以考虑如下问题:

问题2.1 设式 (2.4) 中的所有整数字集 D_i 均随机取自有限个整 Tile 数字集. 是否存在 ρ 使得 $\mu_{\rho,\{D_i\}}$ 为谱测度?

3 齐次 Moran 测度 $\mu_{\{b_i\},\{D_i\}}$ 的谱性

本节主要展示证明齐次 Moran 测度谱性的一种主要方法 (定理 3.4). 需要说明的是, 该方法是结构性的, 对于其它卷积型测度, 可根据情况作相应调整. 例如, 等式 (3.8) 后的处理, 需要调整为自然数的子列等. 下面从定义开始介绍.

作为一致齐次 Moran 测度 $\mu_{\rho,\{D_i\}}$ 的推广, 齐次 Moran 测度的定义为

$$\mu_{\{b_i\},\{D_i\}} := \delta_{b_1^{-1}D_1} * \delta_{b_1^{-1}b_2^{-1}D_2} * \delta_{b_1^{-1}b_2^{-1}b_3^{-1}D_3} \cdots, \tag{3.1}$$

其中 b_i 均为大于或等于 2 的整数 (或绝对值大于 2 的整数), D_i 为有限整数集.

实际上, 容许对或 Hadamard 三元组 (见第 2 节) 在正交集与谱性刻画方面起着重要的作用, 并常被用于解决高维空间中的一些非谱问题 [61, 62, 64]. 为了更好地解释它们在齐次 Moran 测度谱性刻画中的作用, 本节先从离散测度开始介绍. 首先, 可直接验证如下命题 (见文献 [54]).

命题3.1 设 b 为绝对值大于 1 的整数, D 和 C 为势相同的有限整数集. 则下列条件等价:

(i) (b, D, C) 是整 Hadamard 三元组;

(ii) $(\delta_{b^{-1}D}, C)$ 与 $(\delta_{b^{-1}C}, D)$ 都是谱对;

(iii) $\sum_{c\in C} |M_D(b^{-1}(x + c))|^2 \equiv 1$ 对所有的 $x \in \mathbb{R}$ 成立, 其中, $M_D(x) := \frac{1}{\# D} \sum_{d\in D} \mathrm{e}^{-2\pi i d x}$.

该命题展示了整 Hadamard 三元组与离散谱对的关系. 其中, 命题 3.1(iii) 实际上就是 Jorgensen-Pedersen 判据 (定理 2.1) 的特殊情形.

先将命题 3.1 应用于自相似测度: 设 (b, D, C) 为满足 $0 \in D \cap C$ 的整 Hadamard 三元组. 自然地, 我们会认为 $\mu_{b,D}$ 的典型正交集

$$\Lambda(b, C) := \bigcup_{k=1}^{\infty} (C + bC + \cdots + b^{k-1}C)$$

是它的谱. 但是这个结论在一般意义下并不成立, Strichartz[72] 给出了它的一个充分条件:

定理3.1 设 (b, D, C) 为满足 $0 \in D \cap C$ 的整 Hadamard 三元组, 若 $R(\widehat{\mu}_{b,D}) \cap T(b, C) = \emptyset$, 则 $\Lambda(b, C)$ 为 $\mu_{b,D}$ 的一个谱.

后来, Laba-Wang[54] 也给出一些情况的刻画:

定理3.2 设 (b,D,C) 为满足 $0\in D\cap C$ 和 $\gcd D=1$ 的整 Hadamard 三元组, 则 $\Lambda(b,C)$ 不是 $\mu_{b,D}$ 的一个谱的充要条件为: 存在整数集合 $\{x_0,x_1,\ldots,x_{N-1}\}\neq\{0\}$ 满足

$$x_{i+1}=\frac{x_i+c_i}{b},\qquad i=0,1,\ldots,N-1,$$

对某些 $c_i\in C$ 成立, 且 $x_N=x_0$.

通过上述定理, 他们证明了下面的重要结果.

定理3.3 设 (b,D) 是整容许对, 即存在整数集 C 使得 (b,D,C) 为整 Hadamard 三元组. 则 $\mu_{b,D}$ 是谱测度, 且它的所有谱为整数集的子集.

如上面所述, 对于满足 $0\in D\cap C$ 的 Hadamard 三元组 (b,D,C), 可以推出 $\Lambda(b,C)$ 是 $\mu_{b,D}$ 的正交集, 但不一定是谱. 于是, 我们就有了以下的猜测:

猜测3.1 是否对几乎所有满足 $0\in D\cap C$ 的 Hadamard 三元组 (b,D,C), $\Lambda(b,C)$ 都是 $\mu_{b,D}$ 的谱?

注3.1 任给满足 $0\in D\cap C$ 的 Hadamard 三元组 (b,D,C) 与 $c\in C, c\neq 0$, 容易验证, 任给整数 k, 记 $C_k=(C\setminus\{c\})\cup\{c+bk\}$, 则所有 (b,D,C_k) 都是 Hadamard 三元组. 但是怎样定义" 几乎所有" 这个概念是一个问题.

针对本节要重点讨论的齐次 Moran 测度 $\mu_{\{b_i\},\{D_i\}}$, 根据以上 Hadamard 三元组与自相似测度的谱性关系, 并借鉴 Dai-He-Lau[17] 证明 N-Bernoulli 卷积测度谱性的思想, 我们形成了刻画 $\mu_{\{b_i\},\{D_i\}}$ 谱性的如下结构性方法.

对式 (3.1) 两边作 Fourier 变换, 得

$$\widehat{\mu}_{\{b_i\},\{D_i\}}(\xi)=\prod_{k=1}^{\infty}M_{D_k}((b_1\cdots b_k)^{-1}\xi),\tag{3.2}$$

其中 $M_{D_k}(x):=\frac{1}{\#D_k}\sum_{d\in D_k}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}dx}$. 由于 $\widehat{\mu}_{\{b_i\},\{D_i\}}(\xi)$ 的零点由 $M_{D_i}(x)$ 确定, 并且对 D_i 作任意的平移不会改变 $\mu_{\{b_i\},\{D_i\}}$ 的正交集、谱以及谱性, 故总可不失一般性地假设

$$0\in D_i\subset\mathbb{N}\cup\{0\},\quad i\in\mathbb{N}.$$

定义 $\mu_{\{b_i\},\{D_i\}}$ 的卷积截断测度

$$\mu^{k-}_{\{b_i\},\{D_i\}}:=\delta_{b_1^{-1}D_1}*\delta_{b_1^{-1}b_2^{-1}D_2}.*\cdots*\delta_{b_1^{-1}b_2^{-1}\cdots b_k^{-1}D_k},\qquad(k\in\mathbb{N}).\tag{3.3}$$

利用命题 3.1 可以验证:

命题3.2 假设对所有的 i, (b_i,D_i,C_i) 都是整 Hadamard 三元组, 并且 $0\in D_i\cap C_i$. 则下列断言成立:

(i) 截断测度 $\mu^{k-}_{\{b_i\},\{D_i\}}$ 是谱测度, 并且

$$\Lambda_k:=\Lambda_k(\{b_i\},\{C_i\})=C_1+b_1C_2+b_1b_2C_3+\cdots+b_1b_2\cdots b_{k-1}C_k\tag{3.4}$$

是它的一个谱;

(ii)Λ_k 的并集

$$\Lambda=\Lambda(\{b_i\},\{C_i\})=\bigcup_{k=1}^{\infty}\Lambda_k(\{b_i\},\{C_i\})\tag{3.5}$$

是齐次 Moran 测度 $\mu_{\{b_i\},\{D_i\}}$ 的一个正交集.

记式 (3.3) 中的截断测度的卷积余项对应的测度为

$$\mu^{k+}_{\{b_i\},\{D_i\}} := \delta_{b_{k+1}^{-1}D_{k+1}} * \delta_{b_{k+1}^{-1}b_{k+2}^{-1}D_{k+2}} * \delta_{b_{k+1}^{-1}b_{k+2}^{-1}b_{k+3}^{-1}D_{k+3}} * \cdots . \tag{3.6}$$

显然

$$\mu_{\{b_i\},\{D_i\}} = \mu^{k-}_{\{b_i\},\{D_i\}} * \mu^{k+}_{\{b_i\},\{D_i\}} \circ (b_1 \cdots b_k)^{-1}. \tag{3.7}$$

任给 $k \geqslant 1$, 记

$$Q_k(\xi) := \sum_{\lambda\in\Lambda_k} |\widehat{\mu}_{\{b_i\},\{D_i\}}(\xi+\lambda)|^2, \tag{3.8}$$

其中 $\Lambda_k = \Lambda_k(\{b_i\},\{C_i\})$ 如式 (3.4) 所示. 于是, 当 $1 < k \in \mathbb{N}$ 时,

$$\begin{aligned} Q_k(\xi) &= Q_{k-1}(\xi) + \sum_{\lambda\in\Lambda_k\setminus\Lambda_{k-1}} |\widehat{\mu}_{\{b_i,D_i\}}(\xi+\lambda)|^2 \\ &= Q_{k-1}(\xi) + \sum_{\lambda\in\Lambda_k\setminus\Lambda_{k-1}} |\widehat{\mu^{k-}}_{\{b_i\},\{D_i\}}(\xi+\lambda)|^2 |\widehat{\mu^{k+}}_{\{b_i\},\{D_i\}}[(b_1\cdots b_k)^{-1}(\xi+\lambda)]|^2. \end{aligned}$$

此时, 若存在两个正常数 η, a, 使得对任意的 $|\xi| \leqslant \eta$ 和 $\lambda \in \Lambda_k \setminus \Lambda_{k-1}$, 都有不等式

$$|\widehat{\mu^{k+}}_{\{b_i\},\{D_i\}}(\xi + (b_1\cdots b_k)^{-1}\lambda)| \geqslant a \tag{3.9}$$

成立, 并且满足

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{\lambda\in\Lambda_{k-1}} |\widehat{\mu^{k-}}_{\{b_i\},\{D_i\}}(\xi+\lambda)|^2 = Q_{\Lambda(\{b_i\},\{C_i\})}(\xi), \tag{3.10}$$

则有

$$\begin{aligned} Q_k(\xi) &\geqslant Q_{k-1}(\xi) + a^2 \sum_{\lambda\in\Lambda_k\setminus\Lambda_{k-1}} |\widehat{\mu^{k-}}_{\{b_i\},\{D_i\}}(\xi+\lambda)|^2| \\ &= Q_{k-1}(\xi) + a^2 \left(1 - \sum_{\lambda\in\Lambda_{k-1}} |\widehat{\mu^{k-}}_{\{b_i\},\{D_i\}}(\xi+\lambda)|^2\right). \end{aligned}$$

令 $k\to\infty$, 得

$$Q_{\Lambda(\{b_i\},\{C_i\})}(\xi) \geqslant Q_{\Lambda(\{b_i\},\{C_i\})}(\xi) + a^2(1 - Q_{\Lambda(\{b_i\},\{C_i\})}(\xi)).$$

故 $Q_{\Lambda(\{b_i\},\{C_i\})}(\xi) \equiv 1$ 对于任意的 $|\xi| \leqslant \eta$ 均成立. 根据定理 2.1, $\Lambda(\{b_i\},\{C_i\})$ 是 $\mu_{\{b_i\},\{D_i\}}$ 的一个谱. 这就是以下定理的核心证明思想.

定理3.4 设 $\{(b_i, D_i, C_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是满足 $0 \in D_i \cap C_i$ 的整 Hadamard 三元组序列, 若 (3.9) 对充分大的 k 成立, 且 (3.10) 成立, 则 $\Lambda(\{b_i\},\{C_i\})$ 为 $\mu_{\{b_i\},\{D_i\}}$ 的一个谱.

反之, 若证明某些 $\Lambda(\{b_i\},\{C_i\})$ 不完备, 这要更加困难一些. 虽然有一些特殊的方法 (见文献 [1,3,67]) 可以使用, 但并没有形成一套比较完善的、结构性的方案. 通过调整定理 3.4 的证明过程可以给出 $\Lambda(\{b_i\},\{C_i\})$ 不完备的一个充分条件, 即下面的定理 3.5. 但是, 这里需要一个关键性的假设: 存在正常数 η, 使得对任意的 $|\xi| \leqslant \eta$ 和 $\lambda \in \Lambda_k \setminus \Lambda_{k-1}$ 满足以下不等式

$$|\widehat{\mu^{k+}}_{\{b_i,D_i\}}(\xi + (b_1\cdots b_k)^{-1}\lambda)| \leqslant a_k. \tag{3.11}$$

定理3.5 　设 $(b_i, D_i, C_i), i \in \mathbb{N}$, 是满足 $0 \in D_i \cap C_i$ 的整 Hadamard 三元组, 若式 (3.11) 对充分大的 k 成立, 且 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty$. 则 $\Lambda(\{b_i\},\{C_i\})$ 不是 $\mu_{\{b_i\},\{D_i\}}$ 的谱.

定理 3.5 的证明思想如下: 由式 (3.8) 后的等式知

$$\begin{aligned} Q_k(\xi) &\leqslant Q_{k-1}(\xi) + a_k^2 \sum_{\lambda \in \Lambda_k \setminus \Lambda_{k-1}} |\widehat{\mu^{k-}}_{\{b_i\},\{D_i\}}(\xi+\lambda)|^2 \\ &= Q_{k-1}(\xi) + a_k^2 \left(1 - \sum_{\lambda \in \Lambda_{k-1}} |\widehat{\mu^{k-}}_{\{b_i\},\{D_i\}}(\xi+\lambda)|^2\right) \\ &\leqslant Q_{k-1}(\xi) + a_k^2 \left(1 - Q_{k-1}(\xi)\right), \end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned} 1 - Q_k(\xi) &\geqslant 1 - Q_{k-1}(\xi) - a_k^2 \left(1 - Q_{k-1}(\xi)\right) \\ &= \left(1 - Q_{k-1}(\xi)\right)(1 - a_k^2). \end{aligned}$$

因此, 对每一个正整数 k_0 及 $k > k_0$ 均有

$$1 - Q_{k+1}(\xi) = (1 - Q_{k_0}(\xi)) \prod_{j=k_0+1}^{k} (1 - a_j^2).$$

由于 Λ_{k_0} 不是 $\mu_{\{b_i\},\{D_i\}}$ 的谱, 由定理 2.1 知, 存在充分大的 k_0 和某个 ξ_0 使得 $Q_{k_0}(\xi_0) < 1$. 从而有

$$1 - Q_{\Lambda(b_i,C_i)}(\xi_0) = (1 - Q_{k_0}(\xi_0)) \prod_{j=k_0+1}^{\infty} (1 - a_j^2) > 0.$$

即 $Q_{\Lambda(b_i,C_i)}(\xi_0) < 1$, 再由定理 2.1 知, 结论成立.

利用定理 3.4 的证明思路, 还可以得到下面的结果 (见文献 [2, 18]):

定理3.6 　设所有 (b_i, D_i, C_i) 为整 Hadamard 对, 且所有 $D_i = \{0, 1, \ldots, q_i - 1\}$, 则 $\mu_{\{b_i\},\{D_i\}}$ 为谱测度.

文献 [70] 将定理 3.6 中条件 $D_i = \{0, 1, ..., q_i - 1\}$ 替换为 $\#D_i \in \{2, 3\}$, 并证明该定理结论在某些限制性条件下也是成立的. 最近, 定理 3.6 的逆命题的部分情况也被证明是成立的, 见 An-Fu-Lai[1] 给出的下面的定理 3.7. 其他比较困难情形, 文献 [1] 及 Lu-Dong-Zhang[67] 的相关工作也有所涉及.

定理3.7 　设所有 (b_i, D_i, C_i) 为整 Hadamard 对, 且所有 $D_i \subset \{0, 1, \ldots, b_i - 1\}$, 若

$$\liminf_{i \to \infty} \#D_i < \infty,$$

则 $\mu_{\{b_i\},\{D_i\}}$ 为谱测度, 且存在完全由整数组成的一个谱.

4　谱表示、谱的结构与完备性判据

众所周知, $L^2([0,1])$ 本质上 (在不区分平移的情况下) 只有一个谱, 即 $\Lambda = \mathbb{Z}$. 然而, 对分形谱测度而言, 目前所有已知的谱测度都有无穷多个谱 (甚至可以达到连续统的势, 见文献 [35]), 并且同一个谱测度的不同的谱在包括 Fourier 级数敛散性在内的众多性质方面可以存在很大的差异 (见第 7 节的

相应内容). 因此谱的表示是一个重要课题. 然而, 即使是最简单的 $\mu_{4,\{0,2\}}$, 它的谱也没有被完全刻画. 为了更好地解释研究思路, 本节以 $\mu_{4,\{0,2\}}$ 为例子展开讨论. 实际上本节的结果对包括 N-Bernoulli 测度在内的一些更广范围的测度都是成立的.

通常人们总是把模 4 的完全剩余系用 $\{0,1,2,3\}$ 来表示. 基于此, Dutkay-Han-Sun[22] 给出了 $\mu_{4,\{0,2\}}$ 的极大正交集的一种刻画, 并给出正交集成为谱的一些条件. Dai-He-Lai[15] 提出对正交集特别是谱的刻画应该选择 $\{-1,0,1,2\}$ 作为剩余集, 因为前面的剩余集不能对所有的整数都给出很好的进制表示. 更为重要的是, 剩余集中的 0 起着非常特殊的作用, 从而不能把它放在 "边上"(如对于 N-Bernoulli 卷积, 可以根据需要选择 $\{-i,i+1,\cdots,0,1,\cdots,N-i-1\}$ 对某个 $1\leqslant i\leqslant N-2$ 作为剩余系, 而不要选择 $\{0,1,\cdots,N-1\}$). 读者可以通过下文了解其中的一些内在因素.

由自相似测度的 Fourier 变换知,

$$\widehat{\mu}_{4,\{0,2\}}(\xi)=\prod_{k=1}^{\infty}M_{\{0,2\}}(4^{-k}\xi), \tag{4.1}$$

其中 $M_{\{0,2\}}(\xi)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}2\xi}$. 因此,

$$R(\widehat{\mu}_{4,\{0,2\}})=\bigcup_{k=1}^{\infty}R\left(M_{\{0,2\}}(4^{-k}\xi)\right)=\bigcup_{k=1}^{\infty}4^k\frac{2\mathbb{Z}+1}{4}=\bigcup_{k=0}^{\infty}4^k(2\mathbb{Z}+1). \tag{4.2}$$

假设 Λ 是测度 $\mu_{4,\{0,2\}}$ 的正交集且 $0\in\Lambda$, 由 (2.1) 可知 $\Lambda\subset\mathbb{Z}$. 从而对任意的 $\lambda\in\Lambda$, 有如下的进制表示:

$$\lambda=\sum_{i=0}^{\infty}4^{i-1}d_i,$$

其中 $d_i\in\{-1,0,1,2\}$, 且只有有限个 $d_i\neq 0$. 若 $d_0\neq 0$, 则由 $\lambda\in R(\widehat{\mu}_{4,\{0,2\}})$ 可以得出 $d_0\in\{-1,1\}$. 进一步, 若 $\lambda'\in\Lambda$ 且

$$\lambda'=d_0+\sum_{i=1}^{\infty}4^{i-1}d_i',$$

其中 $d_i'\in\{-1,0,1,2\}$, $d_1'\neq d_1$, 则由正交性可以得到 $\lambda'-\lambda\in R(\widehat{\mu}_{4,\{0,2\}})$, 故

$$\{d_1,d_1'\}\in\big\{\{-1,0\},\{-1,2\},\{0,1\},\{1,2\}\big\}.$$

以此类推, 如果 Λ 中的两个元素 λ 与 λ' 的前 k 项系数相同, 而第 $k+1$ 项系数不同, 即 $d_i=d_i', i=0,1,\dots,k-1$, $d_k\neq d_k'$, 那么就有

$$\{d_k,d_k'\}\in\big\{\{-1,0\},\{-1,2\},\{0,1\},\{1,2\}\big\}.$$

受此启发, 我们借助符号系统来建立极大正交集的树型表示. 记 $\{0,1\}^*=\bigcup_{k=0}^{\infty}\{0,1\}^k$, 其中 $\{0,1\}^0=\emptyset$, $\{0,1\}^k=\{I=i_1i_2\cdots i_k: i_j\in\{0,1\}, 1\leqslant j\leqslant k\}$; 及 $\{0,1\}^\infty=\{I=i_1i_2\cdots: i_k\in\{0,1\}, 1\leqslant k\}$. 任给 $I\in\{0,1\}^\infty$, 记 I 的 k 截断为 $I|_k\in\{0,1\}^k$.

定义4.1 我们称映射 $\tau:\{0,1\}^*\mapsto\{-1,0,1,2\}$ 为正交树映射, 如果它满足:

(i) 对所有 $n\geqslant 1$ 有 $\tau(0^n)=0$ (保证 $0\in\Lambda$);

(ii)(正交性) 任给 $I=i_1i_2\cdots i_n\in\{0,1\}^*$, $\tau(I)\in(i_n+2\mathbb{Z})\cap\{-1,0,1,2\}$.

并且, 我们称 τ 为极大树映射, 如果它还满足:
(iii)(极大性) 任给 $I=i_1i_2\cdots i_n\in\{0,1\}^*$, 存在 $J=j_1j_2\cdots j_m\in\{0,1\}^*$ 使得序列 $\{\tau((IJ)|_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 中仅有有限项不等于 0, 这里 IJ 表示复合词 $i_1i_2\cdots i_nj_1j_2\cdots j_m$.

对任意的 $I\in\{0,1\}^\infty$, 如果仅有有限个 k 使得 $\tau(I|_k)\neq 0$, 则定义

$$\Pi_\tau(I)=\sum_{k=1}^{\infty}\tau(I|_k)4^{k-1}. \tag{4.3}$$

记 $\{0,1\}_\#=\bigcup_{I\in\{0,1\}^*}I0^\infty$. 显然, $\Pi_\tau(I)$ 有意义的必要条件是 $I\in\{0,1\}_\#$, 但不是充分的. 因此定义

$$\{0,1\}_\#^\tau=\{I\in\{0,1\}_\#:\Pi_\tau(I)\in\mathbb{Z}\}. \tag{4.4}$$

文献 [15, 22] 都给出了如下 (极大) 正交集的刻画:

定理4.1　$0\in\Lambda$ 为自相似测度 $\mu_{4,\{0,2\}}$ 的 (极大) 正交集的充要条件为: 存在 (极大) 正交树映射 τ 满足 $\Lambda=\Pi_\tau(\{0,1\}_\#^\tau)$, 且任给 $k\geqslant 1$,

$$\{I|_k: I\in\{0,1\}_\#^\tau\}=\{0,1\}^k.$$

定理 4.1 说明任何一个极大正交集都有唯一的树映射和它对应, 接着有以下问题.

问题4.1　如何判定一个极大正交集的完备性?

这是一个具有挑战性的问题. Dai-He-Lai[15] 给出了映射满足正则条件的一个判别法. 其中, 称正交树映射 τ 为正则的, 若其满足

$$\{0,1\}_\#^\tau=\{0,1\}_\#.$$

任给 $I=i_1i_2\cdots i_k\cdots\in\{0,1\}_\#$ 且 k 为满足 $i_k=1$ 的最大指标, 则称 k 为 I 的有效长度, 记为 $\ell(I)=k$, 并称 I 为第 k 层词. 任给 $I\in\{0,1\}_\#$, 记

$$N_I^\tau=\#\{n>\ell(I):\tau(I|_n)\neq 0\}, \tag{4.5}$$

称之为词 I 的尾巴数 (最小值为 0). 记第 k 层的最大尾巴数和最小尾巴数分别为

$$M_k^\tau=\max\{N_I^\tau:\ell(I)=k\},\quad L_k^\tau=\min\{N_I^\tau:\ell(I)=k\}. \tag{4.6}$$

文献 [15] 的定理 2.7 实质上给出了以下关于极大正交集的完备性的充分和必要的判据:

定理4.2　设 $\tau:\{0,1\}_\#\to\mathbb{Z}$ 为正则映射且 $\Lambda=\Pi_\tau(\{0,1\}_\#)$.
(i) 如果存在 M 使得 $M_k^\tau\leqslant M, k\in\mathbb{N}$, 那么 Λ 是 $\mu_{4,\{0,2\}}$ 的谱.
(ii) 如果存在 k_0, 使得 $L_k^\tau\geqslant 4\ln k, k\geqslant k_0$, 那么 Λ 不是 $\mu_{4,\{0,2\}}$ 的谱.

上述定理表明极大正交集的完备性与它的树表示的尾巴数密切相关, 而尾巴数是把 0 排除在外的, 这就是之前提到的剩余集中 0 的特殊性. 实际上, 文献 [15] 给出的充分性条件要比定理 4.2(i) 更弱一些, 它包含一些尾巴数具有一定增长速度的情形. 由于需要涉及很多与词相关的概念与定义, 在此我们不再详细论述.

由定理 4.2, 可以直接得到任意稀疏的谱的存在性.

推论4.1　设 $g(x):[0,\infty)\to(0,\infty)$ 为满足 $\lim_{x\to\infty}g(x)=\infty$ 的任何单调增加函数, 则存在 $\mu_{4,\{0,2\}}$ 的谱 Λ 满足

$$\lim_{R\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{\#\Lambda\cap(x-R,x+R)}{g(R)}=0.$$

推论4.2 存在 $\mu_{4,\{0,2\}}$ 的谱 $\Lambda=\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$, 满足 $\lambda_0=0$, $\lambda_{k+1}\geqslant c\lambda_k, k\in\mathbb{N}$, 其中 c 为某个大于 1 的常数.

文献 [15] 的微小不足之处在于定理 4.2 的正则性条件限制. 这一点在 Dai[12] 中得到了弥补. 本节的最后, 我们描述性地介绍一下 [12] 的工作. 在树映射的基础上, 文献 [12] 进一步对符号空间中的词给出量化定义, 把定理 4.2 推广到一般的情形. 并证明了在谱 Λ 的尾巴数一致有界时, 对任意的奇数 K, $K\Lambda$ 的尾巴数也一致有界 (注: 尾巴数定义不同于 (4.5), 否则这个结论不正确). 这导致了 $K\Lambda$ 是否为谱等价于 $K\Lambda$ 是否为极大正交集, 并且还通过循环节给出了 $K\Lambda$ 是否为极大正交集的等价刻画 (见第 6 节定理 6.2 及相关内容). 此外, 文献 [12] 中还讨论了反谱特征值问题 (Sharp 问题), 即 $K\Lambda$ 是谱, 而 Λ 是极大正交集但不是谱. 该现象在 N-Bernoulli 卷积测度中普遍存在, 除了 $\mu_{4,\{0,2\}}$. 而 $\mu_{4,\{0,2\}}$ 是否有这种反谱特征值例子, 目前还不清楚.

5 谱的分布

本节讨论奇异连续谱测度的谱的分布问题. Dutkay-Han-Sun-Weber[24] 首先采用上 Beurling 密度和上 Beurling 维数刻画自相似测度的框架谱; 他们猜测经典 Fourier 分析中的 Landau 准则 [57] 在奇异测度谱理论中也有类似结果, 即谱的上 Beurling 维数应该等于谱测度支集的 Hausdorff 维数. 这个猜测被文献 [15] 否定, 见推论 4.1. 后来, 研究工作者们发现了更多关于谱的密度和维数的奇特现象, 并且该类现象和分形与动力系统的重要概念密切相关, 展现了其研究内容的丰富多彩性.

Beurling 密度和维数是研究可数集的分布的重要工具. 此处首先给出它们的精确定义.

定义5.1 对任意的 $r>0$, 可数集 $\Lambda\subset\mathbb{R}$ 的上、下 r-Beurling密度分别定义为

$$D_r^+(\Lambda)=\limsup_{R\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{\#\Lambda\cap(x-R,x+R)}{R^r},\quad D_r^-(\Lambda)=\liminf_{R\to\infty}\inf_{x\in\mathbb{R}}\frac{\#\Lambda\cap(x-R,x+R)}{R^r}.$$

由于奇异连续谱测度的谱的下 Beurling 密度为 0[44], 故只需讨论其上 Beurling 密度, 并定义 Beurling维数为:

$$\dim_{Be}(\Lambda)=\inf\{r:D_r^+(\Lambda)=0\}=\sup\{r:D_r^+(\Lambda)=\infty\}.$$

不难证明, 一个谱测度的谱的 Beurling 维数会被该测度的 Fourier 维数和上熵维数所控制 [48, 71], 即

定理5.1 对任意的奇异谱测度 μ, 它的谱 Λ 都满足

$$\dim_F\mu\leqslant\dim_{Be}\Lambda\leqslant\overline{\dim}_e\mu.$$

这里, 测度 μ 的 Fourier维数定义为

$$\dim_F\mu=\sup\{s\geqslant 0:|\widehat{\mu}(\xi)|\leqslant C|\xi|^{-s/2},\forall\xi\in\mathbb{R}\};$$

测度 μ 的上熵维数定义为

$$\overline{\dim}_e\mu=\limsup_{n\to\infty}\frac{H_n(\mu)}{\log 2^n},$$

其中 $H_n(\mu)=-\sum_{Q\in P_n}\mu(Q)\log\mu(Q)$, $P_n=\{[k2^{-n},(k+1)2^{-n}):k\in\mathbb{Z}\}$ 为第 n 层的 2 进区间.

定理 5.1 展示了谱测度的谱的 Beurling 维数具有有限稳定性. 自然地, 我们有以下的问题:

问题5.1　定理 5.1 中的上界和下界是否为最佳的?

实际上, 我们认为以下猜测成立的可能性更大:

猜测5.1　任意的奇异连续谱测度 μ, 它的 Fourier 维数都为 0.

下面, 我们给出有关维数和密度的两个介值猜测:

猜测5.2 (维数介值猜测)　若一个奇异连续谱测度的谱的 Beurling 维数的最佳上界和下界分别为 b 与 a, 则对任意的 $t \in (a, b)$, 存在该测度的谱 Λ 满足 $\dim_{Be} \Lambda = t$, 并且

$$\{\Lambda : 0 \in \Lambda, \dim_{Be} \Lambda = t\}$$

具有连续统的势.

猜测5.3 (密度介值猜测)　若一个奇异谱测度存在 Beurling 维数为 r 的谱, 则该测度的所有 Beurling 维数为 r 的谱 Λ 的上 r-Beurling 密度组成的集合

$$G = \{D_r^+(\Lambda) : \dim_{Be} \Lambda = r\}$$

为一个有界区间, 并且对任意的 $t \in G$,

$$\{\Lambda : 0 \in \Lambda, D_r^+(\Lambda) = t\}$$

具有连续统的势.

下面回到自相似测度的情形. 先介绍一些相关概念:

定义5.2　称函数迭代系统 $\Phi = \{\phi_i(x) = \rho_i^{-1}(x + d_i)\}_{i=1}^N$ 满足开集条件, 如果存在有界开集 Ω 满足

$$\bigcup_{i=1}^N \phi_i(\Omega) \subset \Omega, \quad \phi_i(\Omega) \cap \phi_j(\Omega) = \emptyset, \qquad \forall i \neq j.$$

定义5.3　一个离散集 Λ 被称为空间 $L^2(\mu)$ 的 Bessel集, 如果存在常数 B 满足

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |\langle f, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \lambda x} \rangle_{L^2(\mu)}|^2 \leqslant B \|f\|_{L^2(\mu)}^2, \qquad \forall f \in L^2(\mu).$$

Dutkay-Han-Sun-Weber[24] 证明了以下定理:

定理5.2　设函数迭代系统 $\Phi = \{\phi_i(x) = \rho^{-1}(x + d_i)\}_{i=1}^N$ 满足开集条件. 若 Λ 为由 Φ 生成的等概率权自相似测度 μ_Φ 的 Bessel 集, 则

$$\dim_{be} \Lambda \leqslant \log_\rho N, \quad D_{\log_\rho N}^+(\Lambda) < \infty.$$

进一步, 若 Λ 是 μ_Φ 的框架谱, 并且存在 $k \geqslant 1$ 满足

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{dist}(\rho^{-k} \lambda, \Lambda) < \infty,$$

则 $\dim_{Be} \Lambda = \log_\rho N$.

在上述定理基础上, He-Kang-Tang-Wu[43] 证明了如下结果:

定理5.3　设函数迭代系统 $\Phi = \{\phi_i(x) = \rho_i^{-1}(x + d_i)\}_{i=1}^N$ 满足开集条件. 任给非零概率权 $P = \{p_i\}_{i=1}^N$, 若 Λ 为由 $\{\Phi, P\}$ 生成的自相似测度 $\mu_{\Phi,P}$ 的 Bessel 集, 则

$$\dim_{Be} \Lambda \leqslant \dim_H T_\Phi,$$

其中 $\dim_H$ 表示 Hausdorff 维数, T_Φ 为 Φ 生成的自相似集, 它满足

$$T_\Phi = \bigcup_{i=1}^{N} \phi_i(T_\Phi).$$

进一步, 若存在 Bessel 集 Λ 使得 $\dim_{Be}\Lambda = \dim_H T_\Phi$, 则 $p_i = \rho_i^s$, 其中 s 为自相似维数, 即满足 $\sum_{i=1}^N \rho_i^s = 1$ 的实数.

注5.1 定理 5.3 的结论对非自相似测度不成立, 文献 [60,70] 证明了存在谱测度 μ 和它的一个谱 Λ, 满足 $\dim_H \mathrm{Supp}(\mu) < \dim_{Be}\Lambda = \overline{\dim}_e \mu$.

猜测5.4 定理 5.3 中开集条件是可以去掉的.

据我们所知, 目前还没有谱的密度介值方面的研究工作. 而在维数介值问题方面, Li-Wu[60] 证明了维数介值猜测对下列典型的齐次 Moran 测度成立:

$$\mu_{\{b_i,q_i\}} = \delta_{b_1^{-1}\{0,1,\dots,q_1-1\}} * \delta_{b_1^{-1}b_2^{-1}\{0,1,\dots,q_2-1\}} * \cdots. \tag{5.1}$$

注5.2 关于 (5.1) 这类典型齐次 Moran 测度的谱性, An-He[2], Dai-Sun[18] 与 Gabardo-Lai[41] 独立证明了在 $q_i | b_i$ 的条件下, 它们是谱测度, 后来 Yan[80] 给出了这个论断的一个非常简单的证明. 最近, Wu-Xiao[79] 和 An-Li-Zhang[7] 证明该论断的逆命题也成立.

文献 [60] 的关键工具是第 4 节中定义的树映射和下述的整 Moran 集的性质, 即命题 5.1.

设 $\{t_k\}, \{n_k\}, \{m_k\}$ 为三个自然数列, 其中 $n_0 = 1$, 并且满足对所有 $k \geqslant 1$, 都有

$$t_{k+1} n_1 n_2 \cdots n_k > \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) t_i n_1 n_2 \cdots n_{i-1}$$

成立. 记

$$\mathcal{M}_k = \left\{ \sum_{i=1}^{k} x_i t_i n_1 \cdots n_{i-1} : x_i \in \{0, 1, \dots, m_i - 1\} \right\}.$$

这时称

$$\mathcal{M}(\{m_i, n_i, t_i\}) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k$$

为由 $\{m_i, n_i, t_i\}$ 生成的整 Moran 集.

命题5.1 (Li-Wu[60]) 设 $\mathcal{M}(\{m_i, n_i, t_i\})$ 为整 Moran 集, 则

$$\dim_{Be}(\mathcal{M}(\{m_i, n_i, t_i\})) = \limsup \frac{\log m_1 m_2 \cdots m_k}{\log m_k t_k n_1 n_2 \cdots n_{k-1}}.$$

关于谱的分布这个课题, 这里的问题很多, 但研究成果很少. 值得我们进一步深入地、系统地展开研究.

6 谱特征值问题

对于一维谱集, 人们普遍认为它们都仅有有限个包含原点的谱 (这个猜测还没有得到证明). 而对于奇异谱测度, 普遍的猜测是:

猜测6.1 所有的奇异连续谱测度都有无穷多个包含原点的谱.

猜测 6.1 对所有已知的奇异连续谱测度都成立. 然而目前我们对谱测度的认识仅限于一些具有相似性质的分形测度. 因此, 很难对这个猜测给出判定. 在这里我们针对容许对和谱对, 提出以下较为具体的问题和猜测.

问题6.1　当 (b, D) 为容许对时, 上述猜想对自相似谱测度 $\mu_{b,D}$ 是否成立?

猜测6.2　任给奇异连续谱对 (μ, Λ), 存在无穷多个实数 t 使得 $(\mu, t\Lambda)$ 也是谱对.

实际上, 猜测 6.2 代表了近年来形成的一个新课题: 谱特征值问题. 该问题主要有以下两种形式:

定义6.1　设 μ 为奇异连续谱测度.

第一型谱特征值问题: 任给谱对 (μ, Λ), 刻画 $t \in \mathbb{R}$ 使得 $(\mu, t\Lambda)$ 也是谱对.

第二型谱特征值问题: 刻画 $t \in \mathbb{R}$ 使得, 存在谱 Λ, 使得 $t\Lambda$ 也是 μ 的一个谱.

谱特征值现象是 Strichartz[73] 在 2000 年首先发现的, 两年后Łaba-Wang[54] 再次独立发现该现象, 10 多年后 (2016 年) Dutkay-Haussermann[25] 首次系统研究第一型谱特征值问题. 谱特征值问题是奇异连续谱测度特有的问题, 更有意思的是不同谱特征值给出的谱对应的 Fourier 级数有不同的收敛或者发散性质 (见文献 [23, 73, 74])(注: Dai[12] 也是最早研究第一型谱特征值问题的工作之一, 由于前面已有详细介绍, 这里不再重复). 关于第一型谱特征值问题的猜测 6.2, 现有完整的成果不多, 主要集中在一些非常特殊的自相似谱测度及其典型谱等方面. 这里有很多简明的问题, 如:

问题6.2　任给 $k \geqslant 1$, 关于 $\mu_{3q,\{0,1,2+3kq\}}$ 及其典型谱, 猜测 6.2 是否成立?

问题6.3　$t \in \mathbb{N}$ 何时为谱对 $(\mu_{4,\{0,2\}}, \Lambda_4)$ 的谱特征值?

这里 Λ_4 是 $\mu_{4,\{0,2\}}$ 的典型谱, 见 (1.2), 或者:

$$\Lambda_4 := \bigcup_{k=1}^{\infty}(\{0,1\} + 4\{0,1\} + \cdots + 4^{k-1}\{0,1\}) = \sum_{k=1}^{\infty} 4^{k-1}\{0,1\}.$$

关于问题 6.3, 已有不少认知. 例如, 任给素数 $p > 3$, 对所有自然数 n, p^n 都是谱对 $(\mu_{4,\{0,2\}}, \Lambda_4)$ 的谱特征值, 但 $3\mathbb{N}$ 都不是. 关于第一型谱特征值的认识仍在开始阶段. 作为对比, 对第二型谱特征值问题, 大部分已知的分形谱测度都有完整的刻画 [36, 37]. 本节仅利用 $\mu_{4,\{0,2\}}$, 简单描述文献 Fu-He-Wen[37] 关于第二型谱特征值的相关结论和证明思路.

定理6.1 (Fu-He-Wen[37])　实数 $t \in \mathbb{R}$ 是 $\mu_{4,\{0,2\}}$ 的第二型谱特征值的充要条件为 t 是两个奇数的商.

该定理的必要性证明需要详细分析 $\widehat{\mu}_{4,\{0,2\}}$ 的零点集结构, 而充分性证明的思路为: 对 $I = i_1 i_2 \cdots \in \{-1, 1\}^{\infty}$, 定义

$$\Lambda_4^I = \sum_{k=1}^{\infty} 4^{k-1}\{0, i_k\}.$$

则所有 Λ_4^I 都是 $\mu_{4,\{0,2\}}$ 的谱 (具有连续势). 利用这些候选谱, 可以证明定理 6.1 的充分性, 以及下面的猜测 6.3 对 $\mu_{4,\{0,2\}}$ 是成立的 (详见文献 [35]).

猜测6.3　若奇异连续谱测度 μ 有谱特征值 t, 则有无穷多个谱 Λ(数量应该具有连续统的势), 使得 $t\Lambda$ 也是谱.

接下来重点介绍第一型谱特征值的一些方法和结果. 关于奇异连续谱测度的第一型谱特征值的一个基本问题是:

问题6.4　任给奇异连续谱对 (μ, Λ) 与素数 p, 判定 p^n 是否为该谱对的谱特征值.

以谱对 $(\mu_{4,\{0,2\}},\Lambda_4)$ 为例. 若 t 为谱特征值, 则它一定是奇数 (否则 $t\Lambda_4$ 不是正交集); 并且, 若 t 是 Λ_4 的谱特征值, 则 $-t$ 也是 Λ_4 的谱特征值. 因此, 我们可以假设 $t\in 2\mathbb{N}-1$, 并通过它的 (四进制) 循环节来验证是否为谱特征值[12,45]:

定理6.2 任给 $t\in 2\mathbb{N}-1$, 则下列条件等价:

(i) t 为谱对 $(\mu_{4,\{0,2\}},\Lambda_4)$ 的非谱特征值;

(ii) 存在关于 $(4,\{0,t\})$ 的非零整循环 $X=\{x_0,x_1,\dots,x_{n-1}\}\subset\mathbb{Z}$ 满足

$$x_{k+1}=\frac{x_k+tc_k}{4},\quad c_k\in\{0,1\},\quad 0\leqslant k<n,\quad x_n=x_0.$$

(iii) 存在 $c_k\in\{0,1\}$ 使得

$$t\frac{c_0+4c_1+\cdots+4^{n-1}c_{n-1}}{4^n-1}\in\mathbb{N},$$

(iv) $T(4,\{0,t\})\cap\mathbb{N}\neq\emptyset$.

(v) $t\Lambda_4$ 为极大正交集.

注6.1 定理 6.2(iii) 的一个直观解释是: 存在 $j\in\mathbb{N}$, 使得 $\frac{j}{t}=(0.\overline{c_{n-1}\cdots c_1c_0})_{(4)}$, 即 t 有一个由 0 和 1 组成的四进制的 (非平凡) 循环节. 如: $\frac{1}{3}=(0.\overline{1})_{(4)}$, 因此 3 不是 $(\mu_{4,\{0,2\}},\Lambda_4)$ 的谱特征值. 由于 t 的循环节自然是 kt 的循环节, 因此当 t 不是谱特征值时 kt 都不是谱特征值. 但是反过来不对, 容易验证 11 和 31 都是 $(\mu_{4,\{0,2\}},\Lambda_4)$ 的谱特征值, 而 $341=11\times31$ 不是它的谱特征值 (注: $\frac{7}{341}=(0.\overline{00111})_{(4)}$).

定义6.2 若 $t\in\mathbb{N}$ 不是谱对 $(\mu_{4,\{0,2\}},\Lambda_4)$ 的谱特征值, 而 t 的真因子都是 $(\mu_{4,\{0,2\}},\Lambda_4)$ 的谱特征值, 则称 t 为 $(\mu_{4,\{0,2\}},\Lambda_4)$ 的*本性非谱特征值*.

为了进一步讨论谱特征值问题, 我们需要一些经典数论知识.

设 $\gcd(b,t)=1$, 由欧拉定理可知

$$b^{\varphi(t)}=1\pmod t,$$

其中 $\varphi(t)$ 为欧拉函数. 一般情况下, 欧拉函数不是满足上式的最小的自然数. 因此, 我们定义

$$O_b(t)=\min\{k:b^k=1\pmod t\},$$

并称之为 b 模 t 的阶, 显然 $O_b(t)\mid\varphi(t)$. 关于这个阶, 有以下著名的猜想和常用性质 (猜想 6.1 和定理 6.3):

猜想6.1 (Artin 猜想) 若 $b\neq-1$ 且不是完全平方数, 则存在无穷多个素数 p 满足 $O_b(p)=p-1$.

定理6.3 设 $\gcd(b,t)=\gcd(b,m)=\gcd(b,n)=1$. 则下列陈述成立:

(i) $O_b(mn)=\operatorname{lcm}(O_b(m),O_b(n))$.

(ii) 任给 $n\geqslant1$, 则

$$O_{b^n}(t)=\frac{O_b(t)}{\gcd(O_b(t),n)}.$$

(iii) 当 $n\leqslant\ell_b(t)$ 时, $O_b(t^n)=O_b(t)$; 当 $n\geqslant\ell_b(t)$ 时, $O_b(t^n)=O_b(t)b^{n-\ell_b(t)}$, 这里

$$\ell_b(t)=\max\{k:O_b(t^k)=O_b(t)\}.$$

记模 t 的商群为

$$\mathbb{Z}_t=\frac{\mathbb{Z}}{t\mathbb{Z}}=\{[0]_t,[1]_t,\dots,[t-1]_t\}.$$

它的乘法子群

$$G_b(t) = \{[b]_t, [b^2]_t, \ldots, [b^{O_b(t)}]_t = [1]_t\} \subset \mathbb{Z}_t \tag{6.1}$$

在研究第一型谱特征值中起着十分重要的作用, 如以下关于定理 6.2 的细化结果:

定理6.4　若奇数 t 是谱对 $(\mu_{4,\{0,2\}}, \Lambda_4)$ 的本性非谱特征值, 则下列条件等价:

(i) 存在关于 $(4, \{0, t\})$ 的非零整循环 $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_{O_4(t)-1}\} \subset \mathbb{Z}$ 满足

$$x_{k+1} = \frac{x_k + tc_k}{4}, \quad c_k \in \{0, 1\}, 0 \leqslant k < O_4(t), \quad x_{O_4(t)} = x_0.$$

(ii) 存在 $c_k \in \{0, 1\}$ 使得

$$t\frac{c_0 + 4c_1 + \cdots + 4^{O_4(t)-1}c_{O_4(t)-1}}{4^{O_4(t)} - 1} \in \mathbb{N}.$$

(iii) 存在 $x \in \mathbb{N}$ 使得

$$\{[4^j x]_t\}_{j=1}^{O_4(t)} \subset T(4, \{0, t\}).$$

在上述结论中, $O_4(t)$ 是满足要求的最小正整数.

定理 6.2 与定理 6.4 在 N-Bernoulli 谱测度中都有相应结果. 利用它们可以得到: (i)猜测 6.2 对谱对 $(\mu_{4,\{0,2\}}, \Lambda_4)$ 成立; (ii) 有无穷多个关于谱对 $(\mu_{4,\{0,2\}}, \Lambda_4)$ 的本性非谱特征值.

针对基本问题 (问题 6.4), Dutkay-Haussermann[25] 给出了以下结果.

定理6.5　设奇数 $t > 12$, 若存在整数 k, $-2 \leqslant k \leqslant 12$ 但 $k \neq 0, 1, 4$, 使得 $[k]_t \in G_4(t)$, 则 t 为谱特征值.

同时, 结合上述理论, 他们得到了以下推论.

推论6.1　任给素数 $p > 3$ 与 $n \in \mathbb{N}$, 则 $p^n, 4^n + 1, 4^n - 3, 2 \cdot 4^n \pm 1$ 等都是谱对 $(\mu_{4,\{0,2\}}, \Lambda_4)$ 的谱特征值.

并且, 他们还在论文中给出了下述具有启发意义的两个定理和一个猜测.

定理6.6　设 $p_1, p_2, \ldots, p_r$ 为两两不同的奇素数. 记 l_i 为满足下式的最大值

$$p_i^{l_i} \mid \operatorname{lcm}(O_4(p_1), O_4(p_2), \ldots, O_4(p_r)), \qquad 1 \leqslant i \leqslant r.$$

如果数 $p_1^{\ell_4(p_1)+l_1} p_2^{\ell_4(p_2)+l_2} \cdots p_r^{\ell_4(p_r)+l_r}$ 为谱对 $(\mu_{4,\{0,2\}}, \Lambda_4)$ 的谱特征值, 则对所有 $n_i \geqslant 0$ 有 $p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_r^{n_r}$ 都是谱对 $(\mu_{4,\{0,2\}}, \Lambda_4)$ 的谱特征值.

定理6.7　奇数 $t \in 2\mathbb{N} - 1$ 是谱对 $(\mu_{4,\{0,2\}}, \Lambda_4)$ 的谱特征值, 如果下列条件成立:

(i)任给 $t' \mid t$, $t' < t$, t' 是谱对 $(\mu_{4,\{0,2\}}, \Lambda_4)$ 的谱特征值;

(ii)存在 $n \geqslant 0$ 使得

$$O_4(t) > \min\left\{2^n \lceil \frac{t}{3 \cdot 4^n} \rceil\right\}, \tag{6.2}$$

其中 $\lceil x \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z} : x \leqslant k\}$ 为上取整函数. 特别地, 如果只有 (6.2) 成立, 则 t 不是本性非谱特征值.

利用定理 6.7, 可以得到很多有意思的推论 (见文献 [25] 等). 如果将这些工作与 Artin 猜想结合起来, 自然可以得到更多有意思的结果. 我们以 Dutkay-Haussermann 的以下猜测来结束本节.

猜测6.4 设 $q=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_r^{k_r}$ 为奇数 q 的素数分解且 $3\nmid q$. 若

$$O_4(p_1),O_4(p_2),\ldots,O_4(p_r),p_1,p_2,\ldots,p_r$$

两两互素, 则 q 为谱对 $(\mu_{4,\{0,2\}},\Lambda_4)$ 的谱特征值.

7 奇异谱测度的 Fourier 级数敛散性

本节讨论奇异谱测度的 Fourier 级数的收敛和发散性质. 该课题起源于著名数学家 Strichartz 的奠基性工作 [73,74]. 本节将直观阐释文献 [73,74] 及 Dutkay-Han-Sun[23], Fu-Tang-Wen[38] 和 Pan-Ai[68] 在该课题研究方面取得的一些进展.

本节总假设 μ 为 $\mathbb{R}$ 上的一个紧支 Borel 概率测度. 因此, 可自然考虑关于测度 μ 绝对可积的函数空间 $L^1(\mu)$ 的 Fourier 级数理论. 具体地,

定义7.1 设 $f\in L^1(\mu)$, 且 $\Lambda\subset\mathbb{R}$ 是一个离散集. 定义函数 f 的 Fourier系数为

$$\widehat{f}(\lambda)=\int f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\lambda x}d\mu(x),\qquad(\lambda\in\Lambda),\tag{7.1}$$

定义函数 f 的 Fourier级数为如下三角级数

$$S[\mu,f](x)\sim\sum_{\lambda\in\Lambda}\widehat{f}(\lambda)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\lambda x},\qquad(x\in T_\mu),\tag{7.2}$$

其中, T_μ 表示测度 μ 的紧支集. 定义 Fourier 级数 $S[\mu,f]$ 的部分和为

$$S_N[\mu,f](x)=\sum_{\lambda\in\Lambda\cap[-N,N]}\widehat{f}(\lambda)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\lambda x},\qquad(x\in T_\mu,N\in\mathbb{N}).\tag{7.3}$$

注7.1 对于奇异测度 μ 而言, 由于式 (7.1) 和式 (7.2) 在形式上分别对应于圆周群 $\mathbb{T}:=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上 Lebesgue 可积函数 $f\in L^1(\mathbb{T})$ 的第 n 项 Fourier 系数

$$\widehat{f}(n)=\int f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}nx}dx,\qquad(n\in\mathbb{Z}),$$

和 Fourier 级数

$$S[f](x)\sim\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(n)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\lambda x},\qquad(x\in\mathbb{T}),$$

故文献 [73,74] 分别将式 (7.1) 和式 (7.2) 称作伪 *Fourier* 系数和伪 *Fourier* 级数. 为表述方便起见, 本文将采用术语 Fourier 系数和 Fourier 级数.

固定一个奇异测度 μ. 对于式 (7.2) 中函数 $f\in L^1(\mu)$ 的 Fourier 级数 $S[\mu,f]$, 有如下基本问题:

(a) Fourier 级数 $S[\mu,f]$ 的展开式是否唯一?

(b) Fourier 级数 $S[\mu,f]$ 是否收敛于 f? 若收敛, 它将在何种意义 (一致收敛、范数、点态) 下收敛?

(c) 是否有好的求和方法 (例如, Cesàro 求和法, Abel 求和法和 Poisson 求和法) 来讨论所有 $L^1(\mu)$ 函数 (或所有连续函数) 的 Fourier 级数的 $L^1(\mu)$ 极限 (或一致极限)?

本节将围绕上述问题展开论述. 首先陈述 Fourier 级数收敛方式的定义.

定义7.2　称函数 $f \in L^1(\mu)$ 的 Fourier 级数 $S[\mu, f]$ 点态收敛于 f, 若

$$\lim_{N\to\infty} S_N[\mu, f](x) = f(x) \qquad (x \in T_\mu).$$

称连续函数 f 的 Fourier 级数 $S[\mu, f]$ 一致收敛于 f, 若

$$\lim_{N\to\infty} \|S_N[\mu, f] - f\|_\infty := \lim_{N\to\infty} \sup_{x\in T_\mu} |S_N[\mu, f](x) - f(x)| = 0.$$

称函数 $f \in L^p(\mu)(p \geqslant 1)$ 的 Fourier 级数 $S[\mu, f]$ 依 $L^p(\mu)$- 范数收敛于 f, 若

$$\lim_{N\to\infty} \|S_N[\mu, f] - f\|_{L^p(\mu)} = 0.$$

显然, 若 (μ, Λ) 是一个谱对, 则式 (7.2) 中函数 $f \in L^2(\mu)$ 的 Fourier 级数 $S[\mu, f](x)$ 依 $L^2(\mu)$ 范数收敛.

2000 年, Strichartz 在文献 [73] 中重点研究紧支一致齐次 Moran 测度 μ 的函数空间 $L^1(\mu)$ 中连续函数的 Fourier 级数的一致收敛性. 他的主要研究方法基于如下基本观察.

引理7.1　假设 (μ, Λ) 是一个谱对, f 是定义在 T_μ 上的一个连续函数. 若

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} |\widehat{f}(\lambda)| < \infty, \tag{7.4}$$

则式 (7.2) 中的 Fourier 级数 $S[\mu, f]$ 将在支集 T_μ 上绝对收敛且一致收敛于 f.

注7.2　(1) 该引理的结论非常强: Fourier 级数 $S[\mu, f]$ 绝对收敛意味着对它进行重排不影响级数的收敛性; 一致收敛性意味着 Fourier 级数 $S[\mu, f]$ 的展开式是唯一的, 这在条件 (7.4) 下回答了上述问题 (a). 另外, 由该引理知: 若要讨论级数 $S[\mu, f]$ 的点态收敛, 必须放弃式 (7.4) 中条件.

(2) 文献 [73] 中所考虑的齐次 Moran 谱测度的支集是非离散的完全不连通集, 这可保证支集上的特征函数均是连续函数. 因此, 文献 [73] 剩余的主要工作是在一些较为复杂的技术性条件下验证支集上的特征函数是否满足条件 (7.4). 若满足该条件, 则特征函数有一致收敛的 Fourier 级数.

2006 年, Strichartz 在文献 [74] 中研究奇异谱测度 μ 的 Fourier 级数的一致收敛性、点态收敛性和依范数收敛性, 其核心工具是 Dirichlet 核和 (Hardy-Littlewood) 极大算子理论. 本节将以自相似测度 $\mu_\rho := \mu_{\rho,\{0,\frac{\rho}{2}\}}$ 为例具体阐释 Strichartz 的求和条件、方法和结果, 其中, $\rho \geqslant 4$ 为偶数. 稍后将会发现文献 [74] 实质是要尝试回答上述问题 (b) 和 (c), 但并没有完全给出解答结果. μ_ρ 的支集为自相似集 T_ρ :

$$T_\rho = \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{-k} \left\{0, \frac{\rho}{2}\right\} = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} \rho^{-k} d_k : d_k \in \left\{0, \frac{\rho}{2}\right\}\right\}. \tag{7.5}$$

注意到该自相似测度 μ_ρ 的典型谱集(参考文献 [11, 49]) 为

$$\Lambda := \bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n, \qquad \Lambda_n := \{0, 1\} + \rho\{0, 1\} + \cdots + \rho^{n-1}\{0, 1\}.$$

每个 Λ_n 为 Λ 中基数为 2^n 的子集, Strichartz 定义 Dirichlet核为

$$K_n(x, y) := \sum_{\lambda\in\Lambda_n} \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\lambda(x-y)},$$

且定义谱对 (μ,Λ) 的 Fourier 级数 $S[\mu,f]$ 的第 n 个部分和为

$$s_n[\mu_\rho,f](x)=\sum_{\lambda\in\Lambda_n}\widehat{f}(\lambda)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\lambda\cdot x}. \tag{7.6}$$

根据 (7.1) 可得

$$s_n[\mu_\rho,f](x)=\int f(y)K_n(x,y)d\mu_\rho(y)\qquad(x\in T_\rho). \tag{7.7}$$

定义7.1 定义部分和 $s_n[\mu_\rho,f]$ 的极大算子为

$$Mf(x)=\sup_n|s_n[\mu_\rho,f](x)|.$$

定义 Hardy-Littlewood极大算子为

$$M_{\mu_\rho}f(x)=\sup_r\frac{1}{\mu_\rho(x-r,x+r)}\int_{x-r}^{x+r}|f(y)|d\mu_\rho(y).$$

Strichartz[74] 证明 Dirichlet 核 $\{K_n(x,y)\}_{n=1}^\infty$ 是一个 " 渐近单位" 或者 "逼近单位". 即如下命题:

命题7.1 采用如上术语, Dirichlet 核 $\{K_n(x,y)\}_{n=1}^\infty$ 满足如下性质:

(i) (规范性) $\int K_n(x-y)d\mu_\rho(y)=1$ 对所有 $x\in T_\rho$ 和所有 $n\in\mathbb{N}$ 成立;

(ii) (一致有界性) 对于偶数 $\rho\geqslant 4$, 存在一个仅依赖于 ρ 的常数 C 使得

$$\int|K_n(x,y)|d\mu_\rho(y)\leqslant C\quad\text{对所有的 } x\in T_\rho \text{ 和} n\in\mathbb{N}\text{ 成立.}$$

对于偶数 $\rho\geqslant 6$, 存在一个仅依赖于 ρ 的常数 c 使得对于 $\varepsilon=\frac{\rho}{2(\rho-1)}\rho^{-\ell}(\ell\in\mathbb{N})$ 有

$$|K_n(x,y)|\leqslant c\left(\frac{2(\rho-1)}{\pi}\right)^\ell\left(\frac{\pi}{\rho-1}\right)^n\quad\text{对所有} n\geqslant\ell\text{ 和}|x-y|\geqslant\varepsilon\text{成立.}$$

(iii) (一致集中性) 令 $\varepsilon=\frac{\rho}{2(\rho-1)}\rho^{-\ell}(\ell\in\mathbb{N})$. 则存在一个仅依赖于 ρ 的常数 c 使得

$$\int_{|x-y|\geqslant\varepsilon}|K_n(x,y)|d\mu_\rho(y)\leqslant c\eta^{n-\ell}\quad\text{对所有的 } x\in T_\rho\text{ 和} n\geqslant\ell\text{ 成立,}$$

其中 $\eta:=\frac{1}{\rho}+\frac{\pi}{2(\rho-1)}<1$.

注7.3 针对奇异测度定义的 Dirichlet 核与圆周群 $\mathbb{T}$ 上的 Dirichlet 核 $D_N(x):=\sum_{j=-n}^n\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}jx}$ 有着显著差异. 事实上, $D_N(x)$ 并不是一个渐近单位 (参见文献 [50]), 这是因为其 Lebesgue 常数 $L_N=\|D_N\|_{L^1(\mathbb{T})}$ 满足 $L_N=\frac{4}{\pi^2}\log N+O(1)$. 另外, 也会存在奇异测度 μ 的 Dirichlet 核不是渐近单位, 且 $\|K_n\|_{L^1(\mu)}$ 呈幂次增长速度, 见下文的定理 7.4(ii).

利用命题 7.1, 文献 [74] 得到部分和 $s_n[\mu_\rho,f](x)$ 的一致收敛和点态收敛结果如下:

定理7.1 (i) 当 $\rho\geqslant 4$ 时, 任意连续函数 f 的部分和 $s_n[\mu_\rho,f]$ 一致收敛到 f.

(ii) 当 $\rho\geqslant 6$ 时, 任给 $f\in L^1(\mu_\rho)$, 存在常数 c 使得

$$Mf(x)\leqslant cM_{\mu_\rho}f(x),\qquad\forall x\in T_\rho.$$

故

$$\lim_{n\to\infty}s_n[\mu_\rho,f](x)=f(x),\qquad\mu_\rho-\text{a.e.}\quad x\in T_\rho.$$

问题7.1 (Strichartz[74])　定理 7.1(ii) 对 $\rho=4$ 是否成立?

关于函数 $f\in L^p(\mu_\rho)(p\geqslant 1)$ 的部分和 $s_n[\mu_\rho,f](x)$ 是否依 $L^p(\mu_\rho)$ 范数收敛于 f 的问题可采用 Riesz-Thorin 插值定理 (参考文献 [50]) 处理. 具体地, 当 $\rho\geqslant 4$, 由命题 7.1(ii) 和式 (7.7) 可得

$$\|s_n[\mu_\rho,f](x)\|_\infty\leqslant C\|f\|_\infty,\qquad \forall f\in L^\infty(\mu_\rho).$$

另一方面, 根据 Fubini-Tonelli 定理和命题 7.1(ii) 可验证

$$\|s_n[\mu_\rho,f](x)\|_1\leqslant K\|f\|_1,\qquad \forall f\in L^1(\mu_\rho).$$

利用 Riesz-Thorin 插值定理得

$$\|s_n[\mu_\rho,f]\|_{L^p(\mu_\rho)}\leqslant K\|f\|_{L^p(\mu_\rho)},\qquad \forall f\in L^p(\mu_\rho),\quad 1\leqslant p\leqslant\infty.$$

因此,

$$\lim_{n\to\infty}\|s_n[\mu_\rho,f]-f\|_{L^p(\mu_\rho)}=0,\qquad \forall f\in L^p(\mu_\rho),\quad 1\leqslant p<\infty.$$

Strichartz 将处理 μ_ρ 的技巧与方法应用于一致齐次Moran 谱测度的研究工作, 得到了一些类似的结果. 同时, 他提出一个问题 (见文献 [74] 第 336 页最后一段): 该类结果对于更加一般的谱测度及其谱是否成立呢? 受此启发, Fu-Tang-Wen[38] 开始研究一般齐次 Moran 测度 $\mu_{\mathcal P}$ 的 Fourier 级数的收敛性质. 主要在 2 个方面完成了 Strichartz 结果的推广: 1) 测度的压缩比的倒数及数字集的选取可以无界; 2) 给定测度 μ, 谱的选取有连续势个. 具体地, 齐次 Moran 测度 $\mu_{\mathcal P}$ 可以表述为如下无穷卷积形式

$$\mu_{\mathcal P}:=\delta_{\rho_1^{-1}D_1}*\delta_{(\rho_1\rho_2)^{-1}D_2}*\cdots,\tag{7.8}$$

其中, 正整数列 $\mathcal P=\{\rho_n,d_n\}_{n=1}^\infty$ 和数字集合 $D_n=\{0,d_n\}$ 满足 $\rho_n\geqslant 2$, $0<d_n<\rho_n$. 显然, 测度 $\mu_{\mathcal P}$ 的支集为

$$T_{\mathcal P}:=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{\rho_1\ldots\rho_n}D_n=\left\{\sum_{n=1}^\infty\frac{d^{(n)}}{\rho_1\ldots\rho_n}:d^{(n)}\in D_n\right\}(\subseteq[0,1]).$$

文献 [1,21,42] 已经在测度 $\mu_{\mathcal P}$ 的谱性质研究方面取得了一些成果. 假设

$$P_n=\rho_1\rho_2\ldots\rho_n, d_n=2^{l_n}d_n', \rho_n=2^{l_n+1}\rho_n',$$

其中, $d_n'\in 2\mathbb N-1$ 且 $l_n\in\mathbb N_0$, $\rho_n'\in\mathbb N$. 易验证, 对于任意一个无穷词 $\sigma=\sigma_1\sigma_2\cdots\in\{-1,1\}^{\mathbb N}$, 如下集合

$$\Lambda^\sigma=P_1\left\{0,\frac{\sigma_1}{2^{1+l_1}}\right\}+P_2\left\{0,\frac{\sigma_2}{2^{1+l_2}}\right\}+\cdots+P_n\left\{0,\frac{\sigma_n}{2^{1+l_n}}\right\}+\cdots$$

构成测度 $\mu_{\mathcal P}$ 的一个正交集. 类似于 (7.2), 定义 $f\in L^1(\mu_{\mathcal P})$ 的 Fourier 级数如下

$$S^\sigma[\mu_{\mathcal P},f](x)=\sum_{\lambda\in\Lambda^\sigma}\widehat f(\lambda)\mathrm e^{2\pi\mathrm i\lambda x}\qquad(\lambda\in\Lambda^\sigma),$$

考虑 (截断) 部分和如下

$$s_n^\sigma[\mu_{\mathcal P},f](x)=\sum_{\lambda\in\Lambda^{\sigma|_n}}\widehat f(\lambda)\mathrm e^{2\pi\mathrm i\lambda x},\qquad(n\in\mathbb N),\tag{7.9}$$

其中 $\sigma|_n=\sigma_1\cdots\sigma_n\in\{-1,1\}^n$,

$$\Lambda^{\sigma|_n}=P_1\left\{0,\frac{\sigma_1}{2^{1+l_1}}\right\}+P_2\left\{0,\frac{\sigma_2}{2^{1+l_2}}\right\}+\cdots+P_n\left\{0,\frac{\sigma_n}{2^{1+l_n}}\right\}.$$

文献 [38] 的主要结果陈述如下.

定理7.2 假设测度 $\mu_{\mathcal{P}}$ 如式 (7.8) 所示, 对每一个 $n\in\mathbb{N}$ 均存在离散集 $C_n\subseteq\mathbb{Z}$ 使得 (ρ_n, D_n, C_n) 构成 Hadamard 对, 并且 $\mathcal{P}=\{\rho_n, d_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一列正整数使得 $0<d_n<\rho_n$. 记 r, l_n 和 $\mathbf{m}_n$ 分别如下:

$$r := \sup_{n\geqslant 1}\frac{d_n}{\rho_n}, \quad d_n = 2^{l_n}d_n', \quad \rho_n = 2^{l_n+1}\rho_n', \quad \mathbf{m}_n = \min_{j\geqslant n}\rho_j,$$

其中 $l_n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $\rho_n'\in\mathbb{N}$, 且 d_n' 是奇数. 假设

$$c_r := \sup_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{\rho_n}+\frac{r\pi}{2^{l_n+1}(1-\mathbf{m}_{n+1}^{-1})}\right)<1.$$

则对于每一个 $\sigma=\sigma_1\sigma_2\ldots\in\{-1,1\}^{\mathbb{N}}$, 均有如下结论成立.

(i)若 $f\in L^{\infty}(\mu_{\mathcal{P}})$ 在点 $x\in T_{\mathcal{P}}$ 连续, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n^{\sigma}[\mu_{\mathcal{P}}, f](x)=f(x)$. 进一步, 若 f 在集合 $T_{\mathcal{P}}$ 上处处连续, 则 $s_n^{\sigma}[\mu_{\mathcal{P}}, f](x)$ 在紧集 $T_{\mathcal{P}}$ 上一致收敛于 $f(x)$.

(ii)若 $f\in L^p(\mu_{\mathcal{P}})(1\leqslant p<\infty)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\|s_n^{\sigma}[\mu_{\mathcal{P}}, f](x)-f(x)\|_p=0$.

(iii)若 $\mathcal{P}=\{\rho_n, d_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足

$$e_r := \sup_{n\geqslant 1}\left(\frac{r\pi}{2^{l_n}(1-\mathbf{m}_{n+1}^{-1})}\right)<1,$$

则对于任意的 $f(x)\in L^p(\mu_{\mathcal{P}})(p\geqslant 1)$, 有 $s_n^{\sigma}[\mu_{\mathcal{P}}, f](x)$ 点态收敛于 $f(x)$, 关于测度 $\mu_{\mathcal{P}}$ 几乎处处成立.

注7.4 该定理的证明依赖于 Strichartz[74] 发展起来的 Dirichlet 核和极大算子理论技巧. 同时也依赖于测度本身的一些性质, 比如需要验证测度 $\mu_{\mathcal{P}}$ 满足加倍性质: 存在常数 $c>0$ 使得 $\mu_{\mathcal{P}}(x-2r, x+2r)\leqslant c\mu_{\mathcal{P}}(x-r, x+r)$ 对于任意的 $x\in T_{\mathcal{P}}$ 和 $r>0$ 成立. 这确保可以使用 Vitali 覆盖定理等几何测度论工具. 另外, 由证明过程可知, 该套方法实质上并不需要预先假设 (μ,Λ) 构成一个谱对, 只需要离散集 Λ 构成测度 μ 的一个 (极大) 正交集即可.

鉴于本文第 4, 5, 6 节提供了大量的谱对 (μ,Λ), 因此一个自然的问题是:

问题7.2 对于哪些谱对 (μ,Λ), 可以得到类似于定理 7.1 和定理 7.2 的结果?

注意到式 (7.6) 和式 (7.9) 中的部分和不是式 (7.3) 中所定义的部分和, 它们实质上是一种截断求和方式, 并不能全面反映 Fourier 级数收敛性质. 换言之, 定理 7.1 和定理 7.2 并没有给出问题 (b) 和问题 (c) 的完整解答. 因此, 文志英教授提出如下问题:

问题7.3 给定一个谱对 (μ,Λ). 若 $N\to\infty$, 则式 (7.2) 中 Fourier 级数 $S[\mu, f]$ 的部分和 $S_N[\mu, f]$ (见式 (7.3)) 是否收敛于 f? 若收敛, 它将在何种意义 (一致收敛、范数、点态) 下收敛?

特别地, 对于四分 Cantor 测度 $\mu_{4,\{0,2\}}$ 及其典范谱 Λ_4 (见式 (1.2)), 若 f 是测度 $\mu_{4,\{0,2\}}$ 的支集上的一个连续函数, 是否有 $\sum_{\lambda\in\Lambda\cap[0,N]}\widehat{f}(\lambda)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\lambda x}$ 点态收敛于 f?

2014 年, Dutkay-Han-Sun[23] 研究自相似谱测度的 Fourier 级数的发散性质, 为了更精确地陈述他们的结果, 我们需要引入一些概念和记号. 假设 $\rho>1$ 是一个正整数, $D, C\subset\mathbb{Z}$ 是有限数字集使得 $0\in D\cap C$, $N:=\#D=\#C$ 且 (ρ, D, C) 构成 Hadamard 三元组. 考虑迭代函数系统 $\{\sigma_c(x)=\rho^{-1}(x+c): c\in C\}$ 以及函数

$$m_D(x)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{d\in D}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}dx}, \qquad m_C(x)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{c\in C}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}cx} \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

定义7.3 称集合 $\mathfrak{C}:=\{x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}\}$ 为 C-循环, 若存在元素 $c_0, c_1, \ldots, c_{p-1}\in C$ 使得 $x_1=\sigma_{c_0}x_0, \ldots, x_{p-1}=\sigma_{c_{p-2}}x_{p-2}$ 且 $\sigma_{c_{p-1}}x_{p-1}=x_0$. 称 $\mathfrak{C}$ 为极限 C- 循环, 若额外要求 $|m_D(x_i)|=1$ 对于所有 $i\in\{0,1,\ldots,p-1\}$ 成立; 此时, 称 $\mathfrak{C}$ 中的元素为极限循环点.

Dutkay-Jorgensen[27–29](另一种证明方法参见文献 [31]) 证得如下结果.

定理7.3　假设 (ρ, D, C) 构成一个 Hadamard 三元组, 且令 Λ 为满足如下性质的最小集合:

(i) $R\Lambda + C \subseteq \Lambda$;

(ii) $-\mathfrak{C} \subset \Lambda$ 对于所有的极限 C- 循环 $\mathfrak{C}$ 成立.

则自相似测度 $\mu_{\rho,D}$ 是一个谱测度, 且其谱为 Λ. 进一步, Λ 可具体表述为如下集合

$$\Lambda = \left\{c_0 + \rho c_1 + \ldots + \rho^{n-1} c_{n-1} + \rho^n(-c) : c_0, \ldots, c_{n-1} \in C, n \geqslant 0, \text{ c 是极限循环点}\right\}. \tag{7.10}$$

显然, 式 (7.10) 中离散集 Λ 满足性质 $\Lambda = C + \rho\Lambda$, 并且可被写成 $\Lambda = \cup_{n=0}^{\infty}\Lambda_n$, 其中集合

$$\Lambda_0 := \bigcup\{-\mathfrak{C} : \mathfrak{C} \text{ 是极限 } C\text{- 循环}\}, \quad \Lambda_{n+1} := \rho\Lambda_n + C \quad (n \geqslant 0).$$

特别地, 若所有的极限 C- 循环 $\mathfrak{C}$ 满足条件 $\mathfrak{C} = \{0\}$, 则谱 $\Lambda = \cup_{n=0}^{\infty}(C + \rho C + \rho^2 C + \cdots + \rho^n C)$.

Dutkay-Han-Sun[23] 定义 Dirichlet核如下

$$K_n(x) := \sum_{\lambda \in \Lambda_n} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \lambda x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

若 $f \in L^1(\mu_{\rho,D})$, 则定义 Fourier 级数部分和为

$$s_n[\mu_{\rho,D}, f](x) = \sum_{\lambda \in \Lambda_n} \left(\int f(y) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} \lambda y} d\mu_{\rho,D}(y)\right) \cdot \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \lambda x} = \int f(y) K_n(x-y) d\mu_{\rho,D}(y) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

现陈述 Dutkay-Han-Sun[23] 的主要结果如下:

定理7.4　采用如上记号, 设

$$\triangle\,(Nm_C) := \exp\left(\int \log|Nm_C(x)| d\mu(x)\right). \tag{7.11}$$

若 $\triangle(Nm_C) > 1$, 则

(i) Dirichlet 核的 L^1- 范数呈幂次增长速度, 即对于任意 $1 < \gamma < \triangle(Nm_L)$ 存在常数 C 使得当 n 充分大时有

$$\|K_n\|_{L^1(\mu_{\rho,D})} := \int |K_n(x)| d\mu_{\rho,D}(x) \geqslant C\gamma^n.$$

(ii) 存在连续函数 f 使得 Fourier 级数在 0 处发散, 即函数列 $\{s_n[\mu_{\rho,D}, f](0)\}_n$ 无界.

注7.5　尽管定理 7.4 考虑的也是对谱做截断求和方式, 但由于此处考虑的是 Fourier 级数的发散性质, 故该定理在式 (7.11) 中的量严格大于 1 的条件下确定地回答了问题 (b). 缺点是该条件较难判定, 需要计算机的帮助才行. 文献 [23] 将定理 7.4 分别应用于谱对 $(\mu_{4,\{0,2\}}, t\Lambda_4)$ 和 $C = \{0, t\}$, 其中, $t = 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29$, 证得: 只有分别取 $t = 17, 23, 29$ 时, 其对应的式 (7.11) 中的量严格大于 1, 故其对应的 Fourier 级数在原点发散.

2023 年, Pan-Ai[68] 采用极大算子这一工具给出满足加倍条件的谱测度 μ 的 Fourier 级数发散的一个新条件, 该条件可以确保存在一个 $L^1(\mu)$ 函数, 其 Fourier 级数在一个 μ 正测度集合上发散. 作为应用, 他们验证了该条件对谱对 $(\mu_{4,\{0,2\}}, 17\Lambda_4)$ 成立.

致谢　作者诚挚地感谢文志英教授对谱测度领域研究的关心、指导和支持. 感谢审稿人对本文的修改建议.

参考文献

1 An L X, Fu X Y, Lai C K. On spectral Cantor-Moran measures and a variant of Bourgain's sum of sine problem. Adv Math, 2019, 349: 84–124

2 An L X, He X G. A class of spectral Moran measures. J Funct Anal, 2014, 266: 343–354

3 An L X, He X G, Lau K S. Spectrality of a class of infinite convolutions. Adv Math, 2015, 283: 362–376

4 An L X, He X G, Li H X. Spectrality of infinite Bernoulli convolutions. J Funct Anal, 2015, 269: 1571–1590

5 An L X, He X G, Lai C K. Classification of spectral self-similar measures with four-digit elements. Asian J Math, 2023, 27: 467–492

6 An L X, Lai C K. Product-form Hadamard triples and its spectral self-similar measures. Adv Math, 2023, 431: No. 109257

7 An L X, Li Q, Zhang M M. The generalized Fuglede's conjecture holds for a class of Cantor-Moran measures. Pacific J Math, 2025, 334: 189–209

8 An L X, Wang C. On self-similar spectral measures, J Funct Anal, 2021, 280: No. 108821

9 Bose D, Madan S. Spectrum is periodic for n-intervals. J Funct Anal, 2011, 260: 308–325

10 Bose D, Madan S. "Spectral implies tiling" for three intervals revisited. Forum Math, 2014, 26: 1247–1260

11 Dai X R. When does a Bernoulli convolution admit a spectrum? Adv Math, 2012, 231: 1681–1693

12 Dai X R. Spectra of Cantor measures. Math Ann, 2016, 366: 1621–1647

13 Dai X R, Fu X Y, Yan Z H. Spectrality of self-affine Sierpinski-type measures on $\mathbb{R}^2$. Appl Comput Harmon Anal, 2021, 52: 63–81

14 Dai X R, Fu X Y, Yan Z H. Spectral properties of Sierpinski measures on $\mathbb{R}^n$. Constr Approx, 2024, 60: 165–196

15 Dai X R, He X G, Lai C K. Spectral property of Cantor measures with consecutive digits. Adv Math, 2013, 242: 187–208

16 Dai X R, He X G, Lai C K. Law of pure types and some exotic spectra of fractal spectral measures. Geometry and analysis of fractals, Springer Proc Math Stat, 2014, 88: 47–64, Springer, Heidelberg

17 Dai X R, He X G, Lau K S. On spectral N-Bernoulli measures. Adv Math, 2014, 259: 511–531

18 Dai X R, Sun Q Y. Spectral measures with arbitrary Hausdorff dimensions. J Funct Anal, 2015, 268: 2464–2477

19 Deng Q R, Chen J B. Uniformity of spectral self-affine measures. Adv Math, 2021, 380: No. 107568

20 Deng Q R, Lau K S. Sierpinski-type spectral self-similar measures. J Funct Anal, 2015, 269: 1310–1326

21 Deng Q R, Li M T. Spectrality of Moran-type Bernoulli convolutions. Bull Malays Math Sci, 2023, 46: No. 136

22 Dutkay D E, Han D G, Sun Q Y. On the spectra of a Cantor measure. Adv Math, 2009, 221: 251–276

23 Dutkay D E, Han D G, Sun Q Y. Divergence of the mock and scrambled Fourier series on fractal measures. Trans Amer Math Soc, 2014, 366: 2191–2208

24 Dutkay D E, Han D G, Sun Q Y, Weber E. On the Beurling dimension of exponential frames. Adv Math, 2011, 226: 285–297

25 Dutkay D E, Haussermann J. Number theory problems from the harmonic analysis of a fractal. J Number Th, 2016, 159: 7–26

26 Dutkay D E, Haussermann J, Lai C K. Hadamard triples generate self-affine spectral measures. Trans Amer Math Soc, 2019, 371: 1439–1481

27 Dutkay D E, Jorgensen P E T. Iterated function systems, Ruelle operators, and invariant projective measures. Math. Comput., 2006, 75: 1931–1970

28 Dutkay D E, Jorgensen P E T. Fourier frequencies in affine iterated function systems. J. Funct. Anal., 2007, 247: 110–137

29 Dutkay D E, Jorgensen P E T. Probability and Fourier duality for affine iterated function systems. Acta Appl. Math., 2009, 107: 293–311

30 Dutkay D E, Lai C K. Uniformity of measures with Fourier frames. Adv Math, 2014, 252: 684–707

31 Dutkay D E, Lai C K. Spectral measures generated by arbitrary and random convolutions. J. Math. Pures Appl., 2017 9: 183–204

32 Fan A H, Fan S L, Liao L M, Shi R X. Fuglede's conjecture holds in $\mathbb{Q}_p$. Math Ann, 2019, 375: 315–341

33 Feng D J, Wen Z Y, Wu J. Some dimensional results for homogeneous Moran sets. Sci China Ser A, 1997, 40: 475–482

34 Fu X Y, He X G, Lau K S. Spectrality of self-similar tiles. Constr Approx, 2015, 42: 519–541

35 Fu Y S. A characterization on the spectra of self-affine measures. J Fourier Anal Appl, 2019, 25: 732–750

36 Fu Y S, He L. Scaling of spectra of a class of random convolution on $\mathbb{R}$. J Funct Anal, 2017, 273: 3002–3026

37 Fu Y S, He X G, Wen Z X. Spectra of Bernoulli convolutions and random convolutions. J Math Pures Appl, 2018, 116: 105–131

38 Fu Y S, Tang M W, Wen Z Y. Convergence of mock Fourier series on generalized Bernoulli convolutions. Acta Appl Math, 2022, 179: No.14

39 Fu Y S, Wen Z X. Spectrality of infinite convolutions with three-element digit sets. Monatsh Math, 2017, 183: 465–485
40 Fuglede B. Commuting self-adjoint partial differential operators and a group theoretic problem. J Funct Anal, 1974, 16: 101–121
41 Gabardo J P, Lai C K. Spectral measures associated with the factorization of the Lebesgue measure on a set via convolution. J Fourier Anal Appl, 2014, 20: 453–475
42 He L, He X G. On the Fourier orthonormal bases of Cantor-Moran measures. J Funct Anal, 2017, 272: 1980–2004
43 He X G, Kang Q C, Tang M W, Wu Z Y. Beurling dimension and self-similar measures. J Funct Anal, 2018, 274: 2245–2264
44 He X G, Lai C K, Lau K S. Exponential spectra in $L^2(\mu)$. Appl Comput Harmon Anal, 2013, 34: 327–338
45 He X G, Tang M W, Wu Z Y. Spectral structure and spectral eigenvalue problems of a class of self-similar spectral measures. J Funct Anal, 2019, 277: 3688–3722
46 Hu T Y, Lau K S. Spectral property of the Bernoulli convolutions. Adv Math, 2008, 219: 554–567
47 Iosevich A, Kolountzakis M N. Periodicity of the spectrum in dimension one. Anal PDE, 2013, 6: 819–827
48 Iosevich A, Lai C K, Liu B C, Wyman E. Fourier frames for surface-carried measures. Int Math Res Not IMRN, 2022, 3: 1644–1665
49 Jorgensen P E T, Pedersen S. Dense analytic subspaces in fractal L^2 spaces. J Anal Math, 1998, 75: 185–228
50 Katznelson Y. An introduction to harmonic analysis. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
51 Kershner R. On singular Fourier–Stieltjes transforms. Amer J Math, 1936, 58: 450–452.
52 Łaba I. Fuglede's conjecture for a union of two intervals. Proc Amer Math Soc, 2001, 129: 2965–2972
53 Łaba I, Londner I. The Coven-Meyerowitz tiling conditions for 3 odd prime factors. Invent math, 2023, 232: 365–470
54 Łaba I, Wang Y. On spectral Cantor measures. J Funct Anal, 2002, 193: 409–420
55 Łaba I, Wang Y. Some properties of spectral measures. Appl Comput Harmon Anal, 2006, 20: 149–157
56 Lagarias J C, Wang Y. Tiling the line with translates of one tile. Invent Math, 1996, 124: 341–365
57 Landau H. Necessary density conditions for sampling and interpolation of certain entire functions. Acta Math, 1967, 117: 37–52
58 Lev N, Matolcsi M. The Fuglede conjecture for convex domains is true in all dimensions. Acta Math, 2022, 228: 385–420
59 Li J J, Wu M. Pointwise dimensions of general Moran measures with open set condition. Sci China Math, 2011, 54: 699–710
60 Li J J, Wu Z Y. On the intermediate value property of spectra for a class of Moran spectral measures. Appl Comput Harmon Anal, 2024, 68: No.101606
61 Li J L. $\mu_{M,D}$-orthogonality and compatible pair. J Funct Anal, 2007, 244: 628–638
62 Li J L. Spectra of a class of self-affine measures. J Funct Anal, 2011, 260: 1086–1095
63 Li W X, Miao J J, Wang Z Q. Weak convergence and spectrality of infinite convolutions. Adv Math, 2022, 404: No. 108425
64 Liu J C, Dong X H, Li J L. Non-spectral problem for the planar self-affine measures. J Funct Anal, 2017, 273: 705–720
65 Liu, J C, Luo J J, Spectral property of self-affine measures on $\mathbb{R}^n$. J Funct Anal, 2017, 272: 599–612
66 Liu Q H, Wen Z Y. On dimensions of multitype Moran sets. Math Proc Cambridge Philos Soc, 2005, 139: 541–553
67 Lu Z Y, Dong X H, Zhang P F. Spectrality of some one-dimensional Moran measures. J Fourier Anal Appl, 2022, 28: No. 63
68 Pan W Y, Ai W H. Divergence of mock Fourier series for spectral measures. Proc Roy Soc Edinburgh Sect A, 2023, 153: 1818–1832
69 Rao H, Wen Z Y, Wu J. Net measure properties of Moran sets and applications. Chinese Sci Bull, 1998, 43: 386–389
70 Shi R X. Spectrality of a class of Cantor-Moran measures. J Funct Anal, 2019, 276: 3767–3794
71 Shi R X. On dimensions of frame spectral measures and their frame spectra. Ann Fenn Math, 2021, 46: 483–493
72 Strichartz R S. Remarks on: "Dense analytic subspaces in fractal L^2-spaces" [J Anal Math 75 (1998), 185-228; MR1655831] by P E T Jorgensen and S Pedersen. J Anal Math, 1998, 75: 229–231
73 Strichartz R S. Mock Fourier series and transforms associated with certain Cantor measures. J Anal Math, 2000, 81: 209–238
74 Strichartz R S. Convergence of mock Fourier series. J Anal Math, 2006, 99: 333–353
75 Tao T. Fuglede's conjecture is false in 5 and higher dimensions. Math Res Lett, 2004, 11: 251–258
76 Wen Z Y. Mathematical Foundation of Fractal Geometry (in Chinese). Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House, 2000 [文志英. 分形几何的数学基础. 上海: 上海科技教育出版社, 2000]
77 Wen Z Y. Moran sets and Moran classes. Chinese Sci Bull, 2001, 46: 1849–1856
78 Wu M. The multifractal spectrum of some Moran measures. Sci China Ser A, 2005, 48: 1097–1112

79 Wu S, Xiao Y Q. Spectrality of a class of infinite convolutions on R. Nonlinearity, 2024, 37: No. 055015
80 Yan Z H. Spectral properties of a class of Moran measures. J Math Anal Appl, 2019, 470: 375–387

The Theory of One-dimensional Spectral Measures

Xin-Rong Dai[1], Yan-Song Fu[2] & Xing-Gang He[3,4]

Abstract This article briefly introduces the core issues, important methods and recent significant advancements in the theory of spectral measures on $\mathbb{R}$. This contains the criterion for the spectrality of spectral measures, the representation and distribution of spectra, spectral-eignevalues problems, and the convergence and divergence problem of the associated Fourier series.

Keywords **spectral measures, spectra, spectral-eignevalues problems, distribution of spectra, Fourier series**

MSC(2020) 28A80, 42A85

doi: 10.1360/SSM-2022-XXXX