

# 一种考虑主应力空间特性的岩石强度准则

黄家军<sup>1</sup>, 李 斌<sup>2</sup>, 王 鹏<sup>2</sup>

(1. 宿州市埇桥区科学技术局, 安徽 宿州 234000; 2. 西南科技大学 环境与资源学院, 四川 绵阳 621010)

**摘要:** 基于现有岩石材料的主应力空间破坏曲面特征理论和试验结果, 针对传统强度准则参数多且物理意义不明确的问题, 通过分析常规三轴抗压强度曲线在双向等拉应力点(0,  $\sigma_{ti}$ ,  $\sigma_{ti}$ )的变化特点, 提出强度曲线在双向等拉应力点存在  $d(\sigma_1 - \sigma_3)/d\sigma_m = 3$  的观点, 同时建立含双向等拉强度  $\sigma_{ti}$  和三向等拉强度  $\sigma_{tiii}$  这 2 个参数的双曲线型强度准则, 该强度准则同时考虑了平均应力效应对子午线和  $\pi$  平面上强度曲线的影响, 参数物理意义明确。为验证其合理性与适用性, 利用该强度准则对以往研究中的 14 种岩石三轴试验数据进行拟合计算, 并与拟合精度较高的 Burzynski 抛物线准则和尤明庆指数准则进行对比分析。结果表明, 不论是针对常规三轴还是真三轴试验数据, 该准则拟合效果都比较好, 相关系数均在 0.99 以上, 且拟合得出的双向等拉强度  $\sigma_{ti}$  和三向等拉强度  $\sigma_{tiii}$  大小在合理范围内; 同时, 不同约束条件下的拟合结果也印证了在双向等拉应力点(0,  $\sigma_{ti}$ ,  $\sigma_{ti}$ )存在  $d(\sigma_1 - \sigma_3)/d\sigma_m = 3$  的观点。说明该准则的合理性与适用性较好, 可为岩石工程领域提供一定的实践指导价值。

**关键词:** 岩石力学; 主应力空间; 强度准则; 双向等拉应力点; 双曲线; 平均应力效应

**中图分类号:** TU 45

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1000 - 6915(2024)01 - 0157 - 13

## A rock strength criterion considering spatial properties of principal stresses

HUANG Jiajun<sup>1</sup>, LI Bin<sup>2</sup>, WANG Peng<sup>2</sup>

(1. Science and Technology Bureau of Yongqiao District, Suzhou, Anhui 234000, China;

2. School of Environment and Resources, Southwest University of Science and Technology, Mianyang, Sichuan 621010, China)

**Abstract:** Based on the existing theories and experimental conclusions on the spatial damage surface characteristics of the principal stresses of rock materials, and in response to the problem that the conventional strength criterion has many parameters and the physical significance is not clear, it is put forward that there exists a strength curve in the bi-directional isotropic tensile stress point with the point of view that  $d(\sigma_1 - \sigma_3)/d\sigma_m = 3$ , by analyzing the characteristics of the change of the conventional triaxial compressive strength curves in the bi-directional isotropic tensile stress point(0,  $\sigma_{ti}$ ,  $\sigma_{ti}$ ). Meanwhile, a hyperbolic-type strength criterion containing two parameters of two-way isotropic tensile strength  $\sigma_{ti}$  and three-way isotropic tensile strength  $\sigma_{tiii}$  is established, which takes into account both the average stress effect on the strength curves on the meridian and the  $\pi$ -plane, and the parameters have clear physical meanings. In order to verify its reasonableness and applicability, the strength criterion was utilized to fit and calculate the triaxial test data of 14 types of rocks in the published literature, and compared and analyzed with Burzynski's parabolic criterion and You Mingqing's exponential criterion, which have higher fitting accuracy. The results show that the fitting effect of this criterion is better for both conventional triaxial test data and true triaxial test data, with the correlation coefficients above 0.99, and the sizes of the fitted

**收稿日期:** 2023 - 08 - 08; **修回日期:** 2023 - 09 - 28

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(51904248)

Supported by the National Natural Science Foundation of China(Grant No. 51904248)

**作者简介:** 黄家军(1969 - ), 男, 1991 年毕业于哈尔滨工程大学动力工程系内燃机专业, 现任工程师, 主要从事岩土强度理论方面的研究工作。E-mail: 1060136387@qq.com

**DOI:** 10.13722/j.cnki.jrme.2023.0693

bidirectional isotropic tensile strengths  $\sigma_{tt}$  and the three-directional isotropic tensile strengths  $\sigma_{ttt}$  are in a reasonable range; at the same time, the fitting results under different constraints corroborate the idea that there exists  $d(\sigma_1 - \sigma_3)/d\sigma_m = 3$  at the bidirectional equal tensile stress points  $(0, \sigma_{tt}, \sigma_{tt})$ . It shows that the criterion is reasonable and applicable, and can provide some practical guidance value for the field of rock engineering.

**Key words:** rock mechanics; principal stress space; strength criterion; bidirectional equal tensile stress point; hyperbolic curve; average stress effect

## 1 引言

大量试验结果表明,在主应力空间岩石材料的破坏曲面有以下几个基本特征<sup>[1-4]</sup>: (1) 材料的破坏曲面在等压轴方向是开口的; (2) 破坏曲面外凸光滑; (3) 存在三轴等拉强度; (4) 破坏面具有三轴对称性。试验显示在常规三轴压缩条件下,岩石变形破坏随着围压增大由脆性向塑性转变<sup>[5-7]</sup>,常规三轴压缩条件下抗剪强度随着围压的增大趋于平缓<sup>[8-10]</sup>, N. Barton<sup>[11]</sup>提出岩石临界状态概念,认为在临界状态岩石抗剪强度达到最大值、抗剪强度梯度为 0,即  $d(\sigma_1 - \sigma_3)/d\sigma_3 \rightarrow 0$ , 李 斌等<sup>[12]</sup>把临界概念用于岩石强度准则的改进。尤明庆<sup>[13]</sup>通过指数强度准则反映临界围压的影响。在双向拉伸试验中,材料双向等拉强度小于单向拉伸强度,过镇海<sup>[14]</sup>给出的关系式为:  $\sigma_{ttt} = 0.9\sigma_t = 0.09\sigma_c$ , 其中,  $\sigma_{ttt}$ ,  $\sigma_t$  和  $\sigma_c$  分别为三向等拉伸强度、单向拉伸强度、单向压缩强度。陈积光等<sup>[15]</sup>试验得出特制混凝土的  $\sigma_{ttt}$  比  $\sigma_t$  小 15%~30%, 与普通混凝土一致。杜景峰等<sup>[16-17]</sup>得出铸铁双向拉伸强度也是小于单向拉伸强度。在双向拉伸应力状态下,材料应变减少,自由变形的能力减弱,通过变形来减弱材料内部应力集中的,材料脆性增加,导致材料双向等拉强度小于单向拉伸强度。

本文基于现有主应力空间岩石材料的破坏曲面特征理论和试验结论,分析了常规三轴抗压强度曲线在双向等拉应力点的变化特点,认为常规三轴抗压强度曲线在双向等拉应力点  $(0, \sigma_{tt}, \sigma_{tt})$  存在  $d(\sigma_1 - \sigma_3)/d\sigma_m = 3$ , 建立了含双向等拉强度  $\sigma_{tt}$  和三向等拉强度  $\sigma_{ttt}$  这 2 个参数的双曲线型强度准则,该强度准则同时考虑了平均应力效应对子午线和  $\pi$  平面上强度曲线的影响,参数物理意义明确。并利用已公开发表文献中 14 种岩石的三轴试验数据,验证上述观点以及该准则的合理性与适用性。

## 2 二参数双曲线型强度准则

### 2.1 岩石材料主应力空间特性

在主应力空间中,由静水压力轴与某一主应力

轴组成,且通过另 2 个主应力轴等分线的平面通常被称为拉、压子午面;拉、压子午面与破坏包络面的交线分别称为抗拉、抗压强度曲线。如图 1 所示,曲线  $AGBC$  为抗压强度曲线,在平面  $\sigma_1 - \sigma_3 (= \sigma_2)$  上,强度曲线  $AGBC$  随着  $\sigma_3$  增大而趋于  $EF$ ,  $EF$  平行于  $AOD$ , 在直线  $AOD$  上,  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ , 直线  $AOD$  是主应力空间等压线,强度曲线  $AGBC$  与  $AOD$  有一个交点  $A$ , 即岩石存在三向等拉强度,此点处有  $\sigma_{1A} = \sigma_{2A} = \sigma_{3A}$ 。

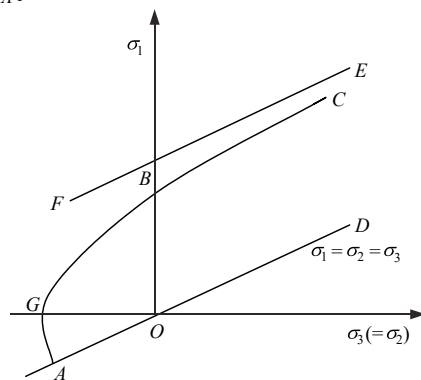


图 1 压子午面上破坏曲线

Fig.1 Damage curve on the meridional plane

图 1 中点  $G$  处应力状态是双向等拉伸状态,  $\sigma_{1G} = 0$ ,  $\sigma_{2G} = \sigma_{3G}$ , 在由点  $G$  到点  $A$  应力变化过程中,应力是从二向等拉应力状态向三向等拉应力状态转变,因此,材料应变变形会受限于拉应力,材料脆性进一步增加,参考双向等拉强度小于单向拉伸强度的结论,可推断出三向等拉强度小于双向等拉强度,  $GB$  段是拉压应力状态,  $GA$  段是三向拉伸应力状态,曲线  $GA$  向右侧倾斜,设材料双向等拉强度为  $\sigma_{tt}$ , 三向等拉伸强度为  $\sigma_{ttt}$ , 则在点  $G$  处有

$$\frac{d\sigma_1}{d\sigma_3} = \infty \quad (1)$$

$$|\sigma_{ttt}| \leq |\sigma_{tt}| \quad (2)$$

为了便于叙述,本文设压应力为正。

图 2 为三维空间破坏曲面,曲线  $ABC$  为抗压强度曲线,主应力空间可分为压应力区 ( $\sigma_1, \sigma_1, \sigma_3$  均大于 0), 拉压应力区 ( $\sigma_1, \sigma_1, \sigma_3$  中有的大于 0, 有的小于 0), 拉应力区 ( $\sigma_1, \sigma_1, \sigma_3$  均小于 0)。

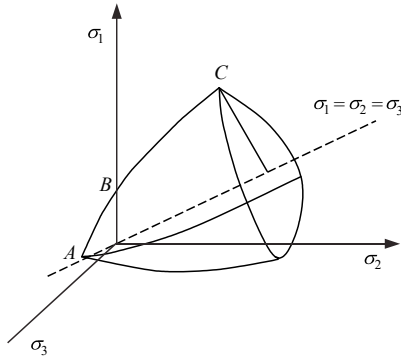


图2 三维空间破坏曲面

Fig.2 Failure surface in three-dimensional space

由上述分析可以推断：在破坏曲面和拉应力区交界处，破坏曲面与拉应力区平面相垂直，垂足轨迹线为图3所示的曲线  $MPN$ 。同时，曲线  $MPN$  还是双拉应力平面  $(-\sigma_1)O(-\sigma_2)$  上的破坏曲线，以直线  $\sigma_1 = \sigma_2$  为对称轴。图3中点  $Q$  是三向等拉伸点  $A$  在双拉应力平面  $(-\sigma_1)O(-\sigma_2)$  投影，在双向拉伸点  $P$  的内侧。

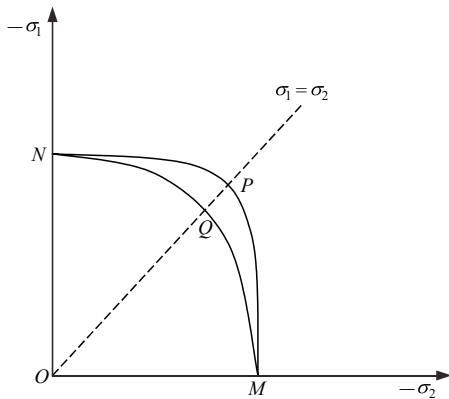


图3 破坏面与双拉平面相交线示意图

Fig.3 Diagram of intersection line between failure plane and double pull plane

本文以压应力为正值，点  $A$  平均应力  $\sigma_{mA} = (\sigma_A + \sigma_A + \sigma_A)/3 = \sigma_A$ ，为负值，点  $G$  平均应力  $\sigma_{mG} = (\sigma_G + \sigma_G + 0)/3 = 2\sigma_G/3$ ，为负值， $|\sigma_A| \leq |\sigma_G|$ 。要想点  $A$  外凸， $|\sigma_{mA}| > |\sigma_{mG}|$ ，则有  $\sigma_{mA} \leq 2\sigma_G/3$ ，即点  $A$  平均应力小于点  $G$  平均应力，也就是：

$$\sigma_{tt} \leq \frac{2}{3} \sigma_{tt} \quad (3)$$

## 2.2 强度准则的提出

由上述主应力空间特性研究及数据分析，在抗压强度曲线上 ( $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ )，假设： $\sigma_1 - \sigma_3 = f(\sigma_m)$ ，其中， $\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$  为平均应力，则有

$$\frac{d(\sigma_1 - \sigma_3)}{d\sigma_3} = \left( \frac{d\sigma_1}{3d\sigma_3} + \frac{2}{3} \right) f'(\sigma_m) \quad (4)$$

$$\left[ 1 - \frac{1}{3} f'(\sigma_m) \right] \frac{d\sigma_1}{d\sigma_3} = 1 + \frac{2}{3} f'(\sigma_m) \quad (5)$$

在双向等拉应力点  $(0, \sigma_{tt}, \sigma_{tt})$ ，若要  $\frac{d\sigma_1}{d\sigma_3} = \infty$ ，则有

$$f'(\sigma_m) = f'\left(\frac{2}{3} \sigma_{tt}\right) = 3 \quad (6)$$

在双向等拉应力点， $f'(\sigma_m)$  取值为 3，与抗压强度曲线具体表达式无关。假设  $f(\sigma_m)$  具体表达式为

$$f(\sigma_m) = \sigma_1 - \sigma_3 = a \left[ 1 - \frac{1}{1 + c(\sigma_m - \sigma_{tt})} \right] \quad (7)$$

式中： $a$  为材料极限抗剪切强度， $c$  为与材料有关的常数， $\sigma_m = (\sigma_1 + 2\sigma_3)/3$ 。

对式(7)求导有

$$\frac{d\sigma_1}{d\sigma_3} = \frac{1 + \frac{2ac}{3 \times [1 + c(\sigma_m - \sigma_{tt})]^2}}{1 - \frac{ac}{3 \times [1 + c(\sigma_m - \sigma_{tt})]^2}} \quad (8)$$

在点  $G$  若要  $\frac{d\sigma_1}{d\sigma_3} \rightarrow \infty$ ，则有

$$1 - \frac{ac}{3 \times [1 + c(\sigma_m - \sigma_{tt})]^2} = 0 \quad (9)$$

由于点  $G$  是双向等拉伸应力点，故  $\sigma_{1G} = 0$ ， $\sigma_{2G} = \sigma_{3G} = \sigma_{tt}$ ，由式(6)和(8)可分别得到

$$-\sigma_{tt} = a \left[ 1 - \frac{1}{1 + c\left(\frac{2}{3} \sigma_{tt} - \sigma_{tt}\right)} \right] \quad (10)$$

$$1 - \frac{ac}{3 \times \left[ 1 + c\left(\frac{2}{3} \sigma_{tt} - \sigma_{tt}\right) \right]^2} = 0 \quad (11)$$

联立式(10)和(11)可得

$$c = -\frac{9(\sigma_{tt} - \sigma_{tt})}{(2\sigma_{tt} - 3\sigma_{tt})^2} \quad (12)$$

$$a = -\frac{\sigma_{tt}^2}{3\sigma_{tt} - 3\sigma_{tt}} \quad (13)$$

将式(12)，(13)代入式(7)，则抗压强度曲线方程为

$$\sigma_1 - \sigma_3 = -\frac{\sigma_{tt}^2}{3\sigma_{tt} - 3\sigma_{tt}} \left[ 1 - \frac{1}{1 - \frac{9(\sigma_{tt} - \sigma_{tt})(\sigma_m - \sigma_{tt})}{(2\sigma_{tt} - 3\sigma_{tt})^2}} \right] \quad (14)$$

若假设在双向等拉状态下，有

$$\frac{d(\sigma_1 - \sigma_3)}{d\sigma_m} = n \quad (15)$$

式中： $n$  为过双向等拉应力点的强度曲线的导数值，

则

$$n = \frac{ac}{\left[1 + c\left(\frac{2}{3}\sigma_{tt} - \sigma_{ttt}\right)\right]^2} \quad (16)$$

联立式(10)和(16)求解可得到

$$a = -\frac{\sigma_{tt}^2}{\sigma_{tt} + n\left(\frac{2}{3}\sigma_{tt} - \sigma_{ttt}\right)} \quad (17)$$

$$c = -\frac{\sigma_{tt} + n\left(\frac{2}{3}\sigma_{tt} - \sigma_{ttt}\right)}{n\left(\frac{2}{3}\sigma_{tt} - \sigma_{ttt}\right)^2} \quad (18)$$

将式(17), (18)代入式(7)则有

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \left[ -\frac{\sigma_{tt}^2}{\sigma_{tt} + n\left(\frac{2}{3}\sigma_{tt} - \sigma_{ttt}\right)} \right] \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{\left[ 1 - \frac{\left[ \sigma_{tt} + n\left(\frac{2}{3}\sigma_{tt} - \sigma_{ttt}\right) \right] (\sigma_m - \sigma_{ttt})}{n\left(\frac{2}{3}\sigma_{tt} - \sigma_{ttt}\right)^2} \right]} \right\} \quad (19)$$

很显然, 式(14)是  $n=3$  时式(19)的特解。

式(14)和(19)通常适用于岩石常规三轴试验数据的拟合分析, 针对真三轴试验数据则需要引入角隅函数。

图 4 为  $\pi$  平面破坏曲线, 随着平均应力  $\sigma_m$  的增大, 破坏曲面趋于圆, 本文角隅函数采用黄家军<sup>[18]</sup>提出的角隅函数:

$$g(\theta) = \frac{1 - kf'(\sigma_m)}{1 - kf'(\sigma_m) \cos(3\theta)} \quad (20)$$

式中:  $\theta = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}(\sigma_2 - \sigma_3)}{2R}\right)$ ,  $k$  为与材料有关的

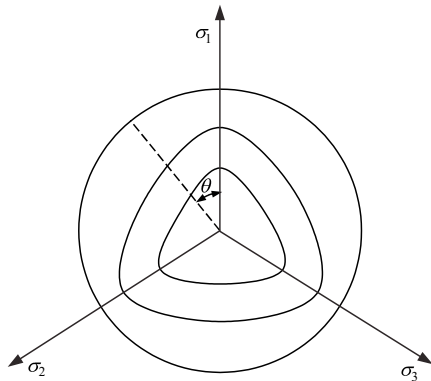


图 4  $\pi$  平面上破坏曲线

Fig.4 Damage curves on the  $\pi$  plane

常数,  $f'(\sigma_m)$  为抗压强度曲线函数的导数。式(20)满足三轴对称, 本质上反映了偏应力调和平均数<sup>[18]</sup>的影响, 具有统计特征,  $kf'(\sigma_m) < 1$ , 保证曲面外凸。同时随着  $f'(\sigma_m) \rightarrow 0$ ,  $\pi$  平面破坏曲面趋于圆。令

$$R = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}} \quad (21)$$

在 Haigh-Westergaard 坐标系下, 联合式(7), (20)和(21), 则有破坏曲面方程:

$$R = a \frac{1 - \frac{kac}{[c(\sigma_m - \sigma_{ttt}) + 1]^2}}{1 - \frac{kac}{[c(\sigma_m - \sigma_{ttt}) + 1]^2} \cos(3\theta)} \left[ 1 - \frac{1}{1 + c(\sigma_m - \sigma_{ttt})} \right] \quad (22)$$

将单向拉伸点(0, 0,  $\sigma_t$ )代入式(22), 则有

$k =$

$$k = \frac{a \left[ 1 - \frac{1}{1 + c\left(\frac{2}{3}\sigma_t - \sigma_{ttt}\right)} \right] + \sigma_t}{\left\{ a \left[ 1 - \frac{1}{1 + c\left(\frac{2}{3}\sigma_t - \sigma_{ttt}\right)} \right] - \sigma_t \right\} \frac{ac}{\left[ c\left(\frac{2}{3}\sigma_t - \sigma_{ttt}\right) + 1 \right]^2}} \quad (23)$$

其中,  $c$ ,  $a$ ,  $k$  分别由式(12), (13), (23)求出, 意义明确。当  $\theta = 0$  时, 即为式(7)。

由式(22)可知, 在同一  $\pi$  平面内  $\sigma_m$  相同, 拉压比  $\lambda$  计算如下:

$$\lambda = \frac{1 - \frac{kac}{[c(\sigma_m - \sigma_{ttt}) + 1]^2}}{1 + \frac{kac}{[c(\sigma_m - \sigma_{ttt}) + 1]^2}} \quad (24)$$

### 3 强度准则的验证

#### 3.1 适用性验证

基于客观原则, 引用国内外已公开发表文献中的 14 种岩石常规三轴试验结果, 对本文提出的强度准则进行验证, 具体试验数据如表 1<sup>[19-32]</sup>所示。

根据二参数双曲线型准则式(14), 即在双向等拉应力点  $n=3$  的情况下, 采用商业数据处理软件 1stOpt 7.0, 基于最小二乘法原理进行数据拟合, 所得拟合结果如表 2 所示。

表 1 14 种岩石常规三轴试验数据<sup>[19-32]</sup>Table 1 Conventional triaxial experimental data of 14 kinds of rocks<sup>[19-32]</sup>

MPa

| 姜玥<br>灰砂岩 <sup>[19]</sup> |            | 大冶<br>大理石 <sup>[20]</sup> |            | 卡拉拉<br>大理石 <sup>[21]</sup> |            | 瑞穗<br>粗面岩 <sup>[22]</sup> |            | 南阳<br>大理石 <sup>[23]</sup> |            | 鄂州<br>花岗岩 <sup>[24]</sup> |            | 锦屏<br>大理石 <sup>[25]</sup> |            | 汪斌<br>砂岩 <sup>[26]</sup> |            | 廷德尔<br>石灰岩 <sup>[27]</sup> |            | 平顶山<br>砂岩 <sup>[28]</sup> |            | 苏承东<br>红砂岩 <sup>[29]</sup> |            | 彭帅大<br>理石 <sup>[30]</sup> |            | 山口<br>大理石 <sup>[31]</sup> |            | 孚日<br>砂岩 <sup>[32]</sup> |            |
|---------------------------|------------|---------------------------|------------|----------------------------|------------|---------------------------|------------|---------------------------|------------|---------------------------|------------|---------------------------|------------|--------------------------|------------|----------------------------|------------|---------------------------|------------|----------------------------|------------|---------------------------|------------|---------------------------|------------|--------------------------|------------|
| $\sigma_3$                | $\sigma_1$ | $\sigma_3$                | $\sigma_1$ | $\sigma_3$                 | $\sigma_1$ | $\sigma_3$                | $\sigma_1$ | $\sigma_3$                | $\sigma_1$ | $\sigma_3$                | $\sigma_1$ | $\sigma_3$                | $\sigma_1$ | $\sigma_3$               | $\sigma_1$ | $\sigma_3$                 | $\sigma_1$ | $\sigma_3$                | $\sigma_1$ | $\sigma_3$                 | $\sigma_1$ | $\sigma_3$                | $\sigma_1$ | $\sigma_3$                | $\sigma_1$ | $\sigma_3$               | $\sigma_1$ |
| 0                         | 74.28      | 0                         | 96.2       | 0                          | 137        | 0                         | 100        | 0                         | 84.1       | 0                         | 83.22      | 0                         | 199.2      | 0                        | 61.6       | 0                          | 52         | 0                         | 115.1      | 0                          | 68         | 0                         | 156        | 0                         | 81         | 0.5                      | 33.5       |
| 5                         | 106.88     | 10                        | 145.4      | 25                         | 234        | 15                        | 193        | 5                         | 131.7      | 10                        | 155.96     | 10                        | 268.53     | 5                        | 109.5      | 5                          | 88         | 5                         | 157.7      | 2.5                        | 83.1       | 5                         | 210        | 6                         | 113        | 10                       | 83         |
| 10                        | 128.62     | 20                        | 193.4      | 50                         | 314        | 30                        | 253        | 10                        | 168.3      | 20                        | 212.41     | 20                        | 312.04     | 10                       | 138.6      | 10                         | 106        | 10.1                      | 197.1      | 5                          | 100.9      | 10                        | 235        | 12.5                      | 130        | 20                       | 114        |
| 20                        | 159.42     | 30                        | 232.9      | 68.4                       | 358        | 45                        | 300        | 20                        | 226.8      | 30                        | 250.29     | 30                        | 358.11     | 20                       | 174.6      | 15                         | 118        | 15.1                      | 224.3      | 10                         | 130.3      | 20                        | 289        | 25                        | 175        | 30                       | 134        |
| 30                        | 182.97     | 40                        | 246.4      | 85.5                       | 404        | 60                        | 339        | 30                        | 266.2      | 40                        | 276.85     | 40                        | 398.49     | 30                       | 209        | 20                         | 137        | 20.1                      | 238        | 15                         | 153.4      | 30                        | 326        | 40                        | 210        | 40                       | 149        |
| 40                        | 202.9      | 50                        | 272.4      | 161.8                      | 558        | 75                        | 365        | 40                        | 301.9      | 50                        | 299.43     | 50                        | 422.72     | 40                       | 240.5      | 25                         | 149        | 25                        | 258        | 20                         | 172.3      | 40                        | 351        | 55                        | 246        | 50                       | 167        |
| 50                        | 217.39     | 60                        | 308.0      |                            |            | 100                       | 419        |                           |            | 60                        | 328.67     | 60                        | 464.96     | 50                       | 263        | 30                         | 164        | 30                        | 283.5      | 25                         | 200.3      | 50                        | 395        | 70                        | 272        | 60                       | 174        |
|                           | 70         | 348.7                     |            |                            |            |                           |            |                           |            | 70                        | 343.83     | 70                        | 499.26     | 60                       | 288.5      | 35                         | 176        | 30                        | 284.1      | 30                         | 212.1      | 60                        | 426        | 85                        | 295        |                          |            |
|                           | 80         | 353.6                     |            |                            |            |                           |            |                           |            |                           |            |                           |            | 70                       | 305.4      | 40                         | 190        | 40                        | 305.7      | 35                         | 238.3      | 70                        | 460        | 100                       | 324        |                          |            |
|                           | 90         | 367.6                     |            |                            |            |                           |            |                           |            |                           |            |                           |            |                          |            |                            |            |                           |            | 45                         | 263.7      | 80                        | 491        | 150                       | 397        |                          |            |
|                           | 100        | 402.7                     |            |                            |            |                           |            |                           |            |                           |            |                           |            |                          |            |                            |            |                           |            |                            |            | 90                        | 527        | 200                       | 454        |                          |            |
|                           |            |                           |            |                            |            |                           |            |                           |            |                           |            |                           |            |                          |            |                            |            |                           |            |                            |            |                           | 100        | 570                       |            |                          |            |

表 2 14 种岩石试验数据双曲线型准则拟合结果

Table 2 Results of hyperbolic-type criterion fitting for 14 rock test data

| 岩石类型   | 相关系数    | $\sigma_{tt}/\text{MPa}$ | $\sigma_{tt}/\text{MPa}$ | $\sigma_c/\text{MPa}$ | $\sigma_c/\sigma_{tt}$ |
|--------|---------|--------------------------|--------------------------|-----------------------|------------------------|
| 姜玥灰砂岩  | 0.996 7 | -7.588                   | -7.647                   | 74.28                 | -9.71                  |
| 大冶大理石  | 0.995 9 | -3.896                   | -3.905                   | 96.2                  | -24.64                 |
| 卡拉拉大理石 | 0.998 0 | -6.736                   | -6.759                   | 137                   | -20.27                 |
| 瑞穗粗面岩  | 0.999 4 | -6.532                   | -6.554                   | 100                   | -15.26                 |
| 南阳大理石  | 0.999 9 | -3.020                   | -3.024                   | 84.1                  | -27.81                 |
| 鄂州花岗岩  | 0.998 7 | -4.996                   | -5.010                   | 83.22                 | -16.61                 |
| 锦屏大理石  | 0.999 5 | -12.586                  | -12.634                  | 199.2                 | -15.77                 |
| 汪斌砂岩   | 0.999 7 | -3.418                   | -3.426                   | 61.6                  | -17.98                 |
| 廷德尔石灰岩 | 0.998 8 | -3.148                   | -3.159                   | 52                    | -16.46                 |
| 平顶山砂岩  | 0.998 6 | -6.784                   | -6.804                   | 115.1                 | -16.92                 |
| 苏承东红砂岩 | 0.998 9 | -1.639                   | -1.641                   | 68                    | -41.45                 |
| 彭帅大理石  | 0.998 0 | -7.145                   | -7.161                   | 156                   | -21.78                 |
| 山口大理石  | 0.998 5 | -6.785                   | -6.828                   | 81                    | -11.86                 |
| 孚日砂岩   | 0.993 2 | -2.763                   | -2.777                   |                       |                        |

结果显示, 14 种岩石的相关系数均在 0.99 以上, 十分接近于 1, 并且各种类岩石的双向等拉强度  $\sigma_{tt}$  和三向等拉强度  $\sigma_{ttt}$  也十分接近, 前面分析认为, 双向等拉强度小于单向拉伸强度。尤明庆<sup>[33]</sup>指出岩石压拉强度比绝对值为 8.3~35, 那么单轴抗压强度和双向等拉强度比值应该更大, 表 2 中  $\sigma_c/\sigma_{ttt}$  的绝对值为 9.71~41.45, 基本上是和尤明庆<sup>[33]</sup>结论

相互印证的。为了更直观地展示二参数双曲线型准则式(14)的拟合效果, 将数据结果绘制成散点拟合曲线, 如图 5, 6 所示。很显然, 各个类型岩石的拟合曲线和试验数据均贴合得非常好, 拟合曲线经过了大部分试验点, 理论预测和试验数值符合较好。

### 3.2 二参数双曲线型准则与其他准则的比较

为探究二参数双曲线型准则在  $n$  取值无限制情况下拟合结果的合理性, 同样采用商业数据处理软件 1stOpt 7.0, 基于最小二乘法原理, 根据二参数双曲线型准则式(19), 对表 1 中 14 种岩石常规三轴试验数据进行数据拟合, 得到不同约束条件下的拟合结果, 如表 3 所示。

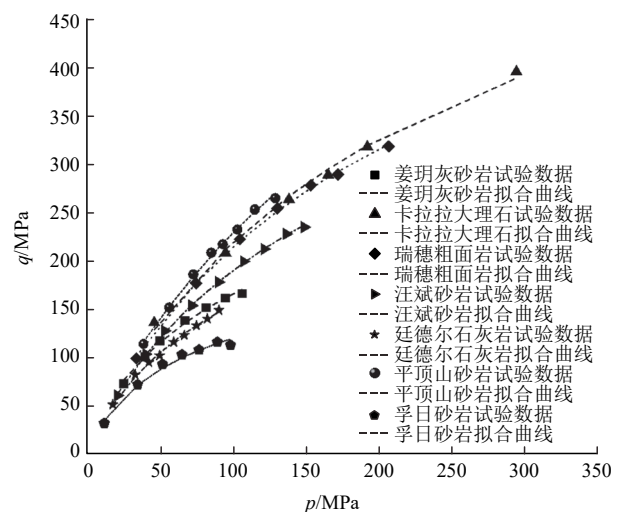


图 5 姜玥灰砂岩等 7 种岩石常规三轴试验数据拟合图

Fig.5 Fitting map of conventional triaxial test data of 7 kinds of rocks such as Jiangyue grey sandstone

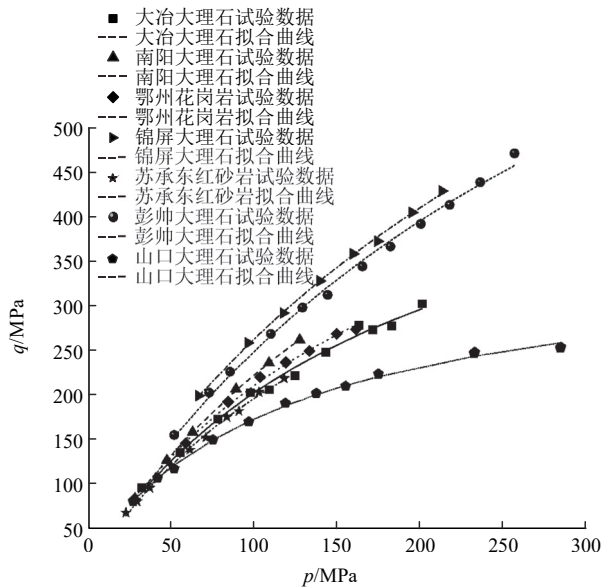


图6 大冶大理石等7种岩石常规三轴试验数据拟合图

Fig.6 Fitting map of conventional triaxial test data of 7 kinds of rocks such as Daye marble

同时, 由于 Burzynski 八面体剪应力抛物线准则<sup>[34]</sup>是最早提出的二次多项式形式强度准则, 具有很高的拟合精度, 且形式简单, 大约有 30 多篇文献提出了类似的公式, 最新修正是李 斌等<sup>[10]</sup>提出的修正公式。但 Burzynski 抛物线准则存在参数物理意义不明确的问题。因此, 基于客观原则, 将 Burzynski 抛物线准则作相应变换后, 以同样的方法获得数据拟合结果, 以此作为对比。

Burzynski 抛物线准则做如下变换:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = A(\sigma_m - \sigma_{\text{III}})^2 + B(\sigma_m - \sigma_{\text{III}}) \quad (25)$$

联合式(15), (25)则有

$$\sigma_1 - \sigma_3 =$$

$$\left[ \frac{n}{2\left(\frac{2\sigma_t}{3} - \sigma_{\text{III}}\right)} + \frac{\sigma_t + \frac{n}{2}\left(\frac{2\sigma_t}{3} - \sigma_{\text{III}}\right)}{\left(\frac{2\sigma_t}{3} - \sigma_{\text{III}}\right)^2} \right] (\sigma_m - \sigma_{\text{III}})^2 - \frac{2\sigma_t + n\left(\frac{2\sigma_t}{3} - \sigma_{\text{III}}\right)}{\frac{2\sigma_t}{3} - \sigma_{\text{III}}} (\sigma_m - \sigma_{\text{III}}) \quad (26)$$

同样采用商业数据处理软件 1stOpt 7.0, 基于最小二乘法原理, 根据 Burzynski 抛物线准则式(26), 对表 1 中 14 种岩石常规三轴试验数据进行拟合, 得到不同约束条件下的拟合结果如表 3 所示。

表 3 结果显示, 二参数双曲线型准则在没有约束条件下, 拟合出的岩石双向等拉强度比相应岩石

的单轴抗压强度还要大, 这显然不合理。而当增加约束条件  $2\sigma_t/3 - \sigma_{\text{III}} > 0$  后, 这个约束条件也是双曲线型准则从三向等拉点开始保持单调递增的必然要求, 拟合结果有很大改变, 有 8 种岩石  $|\sigma_{\text{III}}| \leq |\sigma_t|$ , 数量超过一半, 双向等拉点导数  $n$  拟合出的值在 2.26~4.12 范围, 平均值为 3.05。而约束条件  $2\sigma_t/3 - \sigma_{\text{III}} > 0$  对双向等拉点导数  $n$  并没有限制。因此, 前文通过理论推导得出的  $n = 3$  的结论是有试验依据, 并为试验数据所支持的。而当约束条件增加, 变为  $2\sigma_t - \sigma_{\text{III}} < 0$  且  $2\sigma_t/3 - \sigma_{\text{III}} > 0$  时,  $n$  十分接近 3 的有 8 种岩石, 这 2 个约束条件对  $\sigma_t$ ,  $\sigma_{\text{III}}$  取值有较强的约束, 间接影响  $n$  的取值。而当直接设定  $n = 3$  时, 拟合结果如表 2, 3 所示, 是合理的。同时, 由表 3 还可以看出, 当  $n > 3$  时, 双向等拉强度  $\sigma_t$  和三向等拉强度  $\sigma_{\text{III}}$  明显偏小, 甚至出现小于 1 MPa 的情况, 这显然不合理; 而当  $n < 3$  时, 双向等拉强度  $\sigma_t$  和三向等拉强度  $\sigma_{\text{III}}$  明显偏大, 这也是不符合实际情况的。

由表 3 还能发现, Burzynski 抛物线准则式(26)在没有约束条件和在  $n > 0$  且  $2t/3 + b > 0$  约束条件下的结果相同, 相关系数都接近 1,  $\sigma_t$ ,  $\sigma_{\text{III}}$  大小相近, 但  $\sigma_t/\sigma_{\text{III}}$  的绝对值小于 10 的有 9 个, 说明拟合出的  $\sigma_t$  明显偏大。可以看出, 虽然 Burzynski 抛物线准则拟合结果相关系数较高, 但是结果并不合理。

为更直观地比较 2 种强度准则, 以汪斌砂岩<sup>[26]</sup>数据为例, 分别用双曲线型准则、抛物线准则在  $n = 3$  这个约束条件下拟合, 以及用抛物线准则在无约束条件下拟合。并将拟合结果绘制成散点拟合曲线, 如图 7 所示。从图中可以看出, 在试验数据范围内, 双曲线型准则和抛物线准则在无约束条件下拟合结果十分相近, 但是在  $p < 0$  范围内二者差异明显。抛物线准则在  $n = 3$  约束条件下拟合结果呈现两头比试验数据小、中间比试验数据大的特点, 抛物线准则在  $n = 3$  约束条件下拟合表 1 中其他岩石数据结果也呈现出这样的特点, 说明在  $n = 3$  约束条件下的抛物线准则拟合结果是不合理的。

为进一步验证二参数双曲线型准则的合理性, 在  $\sigma_1 - \sigma_3$  坐标系中, 将该准则与含 3 个参数的尤明庆指数准则<sup>[35]</sup>进行比较, 由于尤明庆指数准则具有较小的平均拟合偏差, 且可以凸显异常数据点, 同时与传统强度准则相比, 可以在更大范围内、以更高精度拟合试验结果, 故以此来进行对比分析更具客观性。但是其缺点是包含一个物理意义不明确的参数  $k_0$ , 拟合得到的  $k_0$  是否合理, 并没有明确参考依据。因此, 若需要比较 2 种准则的拟合效果, 就需

表 3 14 种岩石在不同强度准则的各个约束条件下的拟合结果  
Table 3 Fitting results of 14 types of rocks under various constraint conditions under different strength criteria

| 岩石类型   | 参数类型                     | 二参数双曲线型准则  |                                    |                                                                       | Burzynski 抛物线准则 |                          |           |
|--------|--------------------------|------------|------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|-----------------|--------------------------|-----------|
|        |                          | 无约束条件      | $2\sigma_{tt}/3 - \sigma_{tt} > 0$ | $2\sigma_{tt} - \sigma_{tt} < 0$ 且 $2\sigma_{tt}/3 - \sigma_{tt} > 0$ | 无约束条件           | $n > 0$ 且 $2t/3 + b > 0$ | $n=3$     |
| 姜玥灰砂岩  | 相关系数                     | 0.999 30   | 0.999 24                           | 0.999 23                                                              | 0.999 83        | 0.999 80                 | 0.998 18  |
|        | $\sigma_{tt}/\text{MPa}$ | -0.000 00  | -0.365 19                          | -0.416 53                                                             | -7.175 18       | -7.175 18                | -2.327 99 |
|        | $\sigma_{tt}/\text{MPa}$ | -372.53    | -0.401 77                          | -0.457 97                                                             | -6.879 19       | -6.879 19                | -2.330 75 |
|        | $n$                      | 0.536 68   | 4.121 32                           | 4.110 93                                                              | 2.629 39        | 2.629 39                 | 3         |
|        | $\sigma_c/\sigma_{tt}$   | -0.20      | -184.88                            | -162.19                                                               | -10.80          | -10.80                   | -31.87    |
| 大冶大理石  | 相关系数                     | 0.996 62   | 0.996 62                           | 0.995 96                                                              | 0.996 40        | 0.996 40                 | 0.972 16  |
|        | $\sigma_{tt}/\text{MPa}$ | -12.418 37 | -12.418 37                         | -4.070 91                                                             | -20.728 16      | -20.728 16               | -0.104 77 |
|        | $\sigma_{tt}/\text{MPa}$ | -1 081.33  | -11.623 54                         | -4.070 91                                                             | -17.730 17      | -17.730 17               | -0.104 77 |
|        | $n$                      | 0.919 70   | 2.446 45                           | 2.978 61                                                              | 1.963 48        | 1.963 48                 | 3         |
|        | $\sigma_c/\sigma_{tt}$   | -0.09      | -8.28                              | -23.63                                                                | -5.43           | -5.43                    | -918.20   |
| 卡拉拉大理石 | 相关系数                     | 0.999 90   | 0.999 90                           | 0.998 14                                                              | 0.999 86        | 0.999 85                 | 0.939 50  |
|        | $\sigma_{tt}/\text{MPa}$ | -22.996 67 | -22.996 67                         | -7.407 28                                                             | -36.147 62      | -36.147 62               | -0.076 68 |
|        | $\sigma_{tt}/\text{MPa}$ | -1 375.20  | -20.955 02                         | -7.407 28                                                             | -29.670 90      | -29.670 90               | -0.076 68 |
|        | $n$                      | 0.994 16   | 2.263 23                           | 2.967 32                                                              | 1.780 85        | 1.780 85                 | 3         |
|        | $\sigma_c/\sigma_{tt}$   | -0.10      | -6.54                              | -18.50                                                                | -4.62           | -4.62                    | -1786.65  |
| 瑞穗粗面岩  | 相关系数                     | 0.999 70   | 0.999 70                           | 0.999 70                                                              | 0.999 49        | 0.999 49                 | 0.991 55  |
|        | $\sigma_{tt}/\text{MPa}$ | -1.642 51  | -1.642 52                          | -1.642 82                                                             | -12.298 55      | -12.298 56               | -0.543 24 |
|        | $\sigma_{tt}/\text{MPa}$ | -827.74    | -1.713 86                          | -1.714 18                                                             | -11.354 99      | -11.354 99               | -0.543 33 |
|        | $n$                      | 0.658 30   | 3.417 90                           | 3.417 87                                                              | 2.380 29        | 2.380 29                 | 3         |
|        | $\sigma_c/\sigma_{tt}$   | -0.12      | -58.35                             | -58.34                                                                | -8.81           | -8.81                    | -184.05   |
| 南阳大理石  | 相关系数                     | 0.999 94   | 0.999 94                           | 0.999 94                                                              | 0.999 97        | 0.999 97                 | 0.999 47  |
|        | $\sigma_{tt}/\text{MPa}$ | -2.609 73  | -2.609 85                          | -2.609 73                                                             | -5.198 30       | -5.198 30                | -1.026 86 |
|        | $\sigma_{tt}/\text{MPa}$ | -1 148.11  | -2.624 75                          | -2.624 63                                                             | -5.012 96       | -5.012 96                | -1.027 16 |
|        | $n$                      | 0.739 75   | 3.041 54                           | 3.041 56                                                              | 2.690 17        | 2.690 17                 | 3         |
|        | $\sigma_c/\sigma_{tt}$   | -0.07      | -32.04                             | -32.04                                                                | -16.78          | -16.78                   | -81.88    |
| 鄂州花岗岩  | 相关系数                     | 0.999 39   | 0.999 33                           | 0.999 39                                                              | 0.999 65        | 0.999 65                 | 0.998 14  |
|        | $\sigma_{tt}/\text{MPa}$ | -0.000 00  | -1.112 83                          | -0.141 72                                                             | -5.807 58       | -5.807 58                | -0.691 04 |
|        | $\sigma_{tt}/\text{MPa}$ | -767.69    | -1.160 03                          | -0.149 17                                                             | -5.580 02       | -5.580 02                | -0.691 18 |
|        | $n$                      | 0.637 94   | 3.409 96                           | 3.527 49                                                              | 2.659 92        | 2.659 92                 | 3         |
|        | $\sigma_c/\sigma_{tt}$   | -0.11      | -71.74                             | -557.89                                                               | -14.91          | -14.91                   | -120.40   |
| 锦屏大理石  | 相关系数                     | 0.999 56   | 0.999 56                           | 0.999 50                                                              | 0.999 46        | 0.999 46                 | 0.997 12  |
|        | $\sigma_{tt}/\text{MPa}$ | -18.196 69 | -18.196 69                         | -13.333 80                                                            | -27.230 53      | -27.223 08               | -5.857 28 |
|        | $\sigma_{tt}/\text{MPa}$ | -1 894.84  | -17.747 58                         | -13.333 80                                                            | -24.960 35      | -24.954 34               | -5.863 63 |
|        | $n$                      | 0.818 73   | 2.748 15                           | 2.964 38                                                              | 2.330 20        | 2.330 41                 | 3         |
|        | $\sigma_c/\sigma_{tt}$   | -0.11      | -11.22                             | -14.94                                                                | -7.98           | -7.98                    | -33.97    |
| 汪斌砂岩   | 相关系数                     | 0.999 79   | 0.999 79                           | 0.999 79                                                              | 0.999 50        | 0.999 50                 | 0.993 66  |
|        | $\sigma_{tt}/\text{MPa}$ | -1.686 76  | -1.585 66                          | -1.686 78                                                             | -7.756 19       | -7.756 19                | -0.322 36 |
|        | $\sigma_{tt}/\text{MPa}$ | -679.63    | -1.622 86                          | -1.724 54                                                             | -7.176 68       | -7.176 67                | -0.322 40 |
|        | $n$                      | 0.703 36   | 3.210 21                           | 3.198 94                                                              | 2.397 32        | 2.397 32                 | 3         |
|        | $\sigma_c/\sigma_{tt}$   | -0.09      | -37.96                             | -35.72                                                                | -8.58           | -8.58                    | -191.07   |

| 续表     |                           |            |                                |                                                               |                 |                    |           |
|--------|---------------------------|------------|--------------------------------|---------------------------------------------------------------|-----------------|--------------------|-----------|
| 岩石类型   | 参数类型                      | 二参数双曲线型准则  |                                |                                                               | Burzynski 抛物线准则 |                    |           |
|        |                           | 无约束条件      | $2\sigma_{tt}/3-\sigma_{tt}>0$ | $2\sigma_{tt}-\sigma_{tt}<0$ 且 $2\sigma_{tt}/3-\sigma_{tt}>0$ | 无约束条件           | $n>0$ 且 $2t/3+b>0$ | $n=3$     |
| 廷德尔石灰岩 | 相关系数                      | 0.998 92   | 0.998 90                       | 0.998 79                                                      | 0.998 40        | 0.998 40           | 0.987 32  |
|        | $\sigma_{tt}/\text{MPa}$  | -5.266 40  | -5.266 40                      | -3.385 72                                                     | -9.820 86       | -9.820 86          | -0.291 25 |
|        | $\sigma_{tt}'/\text{MPa}$ | -520.57    | -5.110 73                      | -3.385 72                                                     | -8.672 35       | -8.672 35          | -0.291 30 |
|        | $n$                       | 0.831 15   | 2.707 10                       | 2.967 21                                                      | 2.119 16        | 2.119 16           | 3         |
|        | $\sigma_c/\sigma_{tt}$    | -0.10      | -10.17                         | -15.36                                                        | -6.00           | -6.00              | -178.51   |
| 平顶山砂岩  | 相关系数                      | 0.999 10   | 0.999 10                       | 0.999 10                                                      | 0.999 20        | 0.999 20           | 0.999 18  |
|        | $\sigma_{tt}/\text{MPa}$  | -0.000 00  | -0.249 66                      | -0.569 20                                                     | -5.252 34       | -5.252 34          | -3.895 89 |
|        | $\sigma_{tt}'/\text{MPa}$ | -881.43    | -0.265 11                      | -0.602 79                                                     | -5.208 98       | -5.208 98          | -3.900 14 |
|        | $n$                       | 0.614 49   | 3.633 74                       | 3.598 70                                                      | 2.914 39        | 2.914 39           | 3         |
|        | $\sigma_c/\sigma_{tt}$    | -0.13      | -434.16                        | -190.95                                                       | -22.10          | -22.10             | -29.51    |
| 苏承东红砂岩 | 相关系数                      | 0.999 58   | 0.999 58                       | 0.998 94                                                      | 0.999 60        | 0.999 60           | 0.994 40  |
|        | $\sigma_{tt}/\text{MPa}$  | -7.276 23  | -7.276 23                      | -1.751 99                                                     | -9.163 28       | -9.163 28          | -0.144 87 |
|        | $\sigma_{tt}'/\text{MPa}$ | -1 219.06  | -6.777 15                      | -1.751 99                                                     | -8.249 40       | -8.249 40          | -0.144 88 |
|        | $n$                       | 0.923 97   | 2.435 16                       | 2.990 41                                                      | 2.236 16        | 2.236 16           | 3         |
|        | $\sigma_c/\sigma_{tt}$    | -0.06      | -10.03                         | -38.81                                                        | -8.24           | -8.24              | -469.35   |
| 彭帅大理石  | 相关系数                      | 0.998 94   | 0.998 93                       | 0.998 00                                                      | 0.998 76        | 0.9987 59          | 0.990 70  |
|        | $\sigma_{tt}/\text{MPa}$  | -25.481 77 | -25.481 77                     | -7.601 20                                                     | -32.938 90      | -32.938 90         | -0.253 89 |
|        | $\sigma_{tt}'/\text{MPa}$ | -2 594.04  | -23.141 40                     | -7.601 20                                                     | -28.483 15      | -28.483 15         | -0.253 90 |
|        | $n$                       | 0.992 17   | 2.267 76                       | 2.978 75                                                      | 2.019 64        | 2.019 64           | 3         |
|        | $\sigma_c/\sigma_{tt}$    | -0.06      | -6.74                          | -20.52                                                        | -5.48           | -5.48              | -614.42   |
| 山口大理石  | 相关系数                      | 0.998 77   | 0.998 77                       | 0.998 77                                                      | 0.998 74        | 0.998 74           | 0.832 72  |
|        | $\sigma_{tt}/\text{MPa}$  | -3.249 51  | -3.249 51                      | -3.249 51                                                     | -29.901 21      | -29.901 21         | -0.163 60 |
|        | $\sigma_{tt}'/\text{MPa}$ | -506.91    | -3.366 50                      | -3.366 50                                                     | -23.379 18      | -23.379 18         | -0.163 61 |
|        | $n$                       | 0.678 33   | 3.316 97                       | 3.316 97                                                      | 1.593 56        | 1.593 56           | 3         |
|        | $\sigma_c/\sigma_{tt}$    | -0.16      | -24.06                         | -24.06                                                        | -3.46           | -3.46              | -495.08   |
| 孚日砂岩   | 相关系数                      | 0.996 40   | 0.996 26                       | 0.996 47                                                      | 0.998 80        | 0.998 80           | 0.975 20  |
|        | $\sigma_{tt}/\text{MPa}$  | -0.000 00  | -0.281 04                      | -0.038 60                                                     | -3.936 90       | -3.936 90          | -0.081 74 |
|        | $\sigma_{tt}'/\text{MPa}$ | -242.83    | -0.300 67                      | -0.041 59                                                     | -3.593 09       | -3.593 09          | -0.081 75 |
|        | $n$                       | 0.593 36   | 3.725 25                       | 3.821 86                                                      | 2.312 39        | 2.312 39           | 3         |

要先通过变换明确参数  $k_0$  的内在含义。首先将尤明庆指数准则作如下变换：

$$\sigma_1-\sigma_3=Q_{\infty}-(Q_{\infty}-Q_0)\exp\left[-\frac{(k_0-1)\sigma_3}{Q_{\infty}-Q_0}\right] \quad (27)$$

式中： $Q_{\infty}$  为极限抗剪强度， $Q_0$  为单轴抗压强度， $k_0$  为量纲一的系数。引入三向等拉强度( $\sigma_{tt}$ ， $\sigma_{tt}'$ ， $\sigma_{tt}''$ )，有

$$k_0=1-\frac{Q_{\infty}-Q_0}{\sigma_{tt}}\ln\left(\frac{Q_{\infty}}{Q_{\infty}-Q_0}\right) \quad (28)$$

将式(28)代入式(27)有

$$\sigma_1-\sigma_3=Q_{\infty}-(Q_{\infty}-Q_0)\exp\left[\frac{\sigma_3}{\sigma_{tt}}\ln\left(\frac{Q_{\infty}}{Q_{\infty}-Q_0}\right)\right] \quad (29)$$

上述变换并没有改变尤明庆指数准则，只是明确了参数  $k_0$  的内在含义，接下来即可采用商业数据处理软件 1stOpt7.0，基于最小二乘法原理，根据尤明庆准则式(29)对表 1 中 14 种岩石常规三轴试验数据进行数据拟合，拟合结果如表 4 所示，此结果为  $n=3$  情况下的拟合结果。

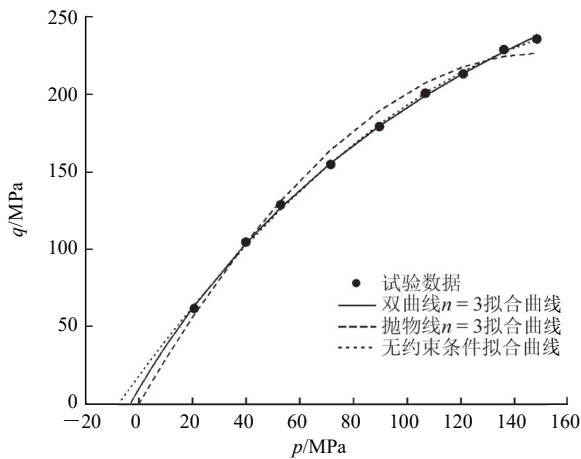


图7 汪斌砂岩试验数据拟合图

Fig.7 Fitting diagram of Wang Bin sandstone test data

结果显示, 尤明庆指数准则大部分岩石的  $\sigma_c/\sigma_{tt}$  绝对值均小于 10, 说明拟合出的  $\sigma_{tt}$  明显偏大, 虽然相关系数很高, 但是拟合结果其实并不合理, 此结果与  $p$ - $q$  坐标系下 Burzynski 抛物线准则拟合结果相似。而通过本文提出的二参数双曲线型强度准则, 拟合得到的双向等拉强度  $\sigma_{tt}$  和三向等拉强度  $\sigma_{ttt}$  仍然处于合理范围内。判断一个强度准则的合理性, 一要看拟合相关系数是否高, 二要看拟合的参数是否合理。很显然, 二参数双曲线型强度准则在保证参数值在合理范围内的同时, 还具有较高的相关系数, 也就是说该准则的合理性得到了进一步的验证。

在  $\sigma_1$ - $\sigma_3$  坐标系下, 式(19)可等价变换为

$$\sigma_1 = \frac{-(c\sigma_3 - 3c\sigma_{ttt} + 3 - ac)}{2c} \pm \frac{(c\sigma_3 - 3c\sigma_{ttt} + 3 - ac)^2 + 4c[(c\sigma_3(2\sigma_3 - 3\sigma_{ttt}) + 3\sigma_3 + ac(2\sigma_3 - 3\sigma_{ttt}))^{\frac{1}{2}}]}{(2c)} \quad (30)$$

$c$ ,  $a$  表达式分别见式(12)和(13), 运用式(30)拟合即可获得二参数双曲线型强度准则在  $n$  取值无限制时的结果, 如表 5 所示。

从表 5 可以看出, 当  $n > 3$  时, 双向等拉强度  $\sigma_{tt}$  和三向等拉强度  $\sigma_{ttt}$  明显偏小, 而当  $n < 3$  时, 双向等拉强度  $\sigma_{tt}$  和三向等拉强度  $\sigma_{ttt}$  明显偏大; 且  $n$  平均值为 3.064 6, 与表 3 拟合结果基本相同。这说明  $n$  取 3 是合理的, 并且还可通过此结论对试验数据进行甄别。

### 3.3 岩石真三轴试验数据拟合

针对真三轴试验数据, 需要利用准则式(22)来进行数据拟合。为了结果验证的客观性, 特引用邓纳姆白云岩<sup>[36]</sup>和瑞穗粗面岩<sup>[22]</sup>这 2 种岩石的真三轴试验数据来对准则式(22)进行适用性验证。由于数据量庞大, 故未列出。

采用商业数据处理软件 1stOpt 7.0, 基于最小二乘法原理, 根据准则式(22)对这 2 种岩石真三轴试验数据进行数据拟合, 拟合结果如表 6 所示。

表4 14种岩石在不同强度准则下的拟合结果

Table 4 Fitting results for 14 rocks with different strength criteria

| 岩石类型   | 二参数双曲线型准则 |                          |                           |                        | 尤明庆指数准则  |                           |                          |                        |
|--------|-----------|--------------------------|---------------------------|------------------------|----------|---------------------------|--------------------------|------------------------|
|        | 相关系数      | $\sigma_{tt}/\text{MPa}$ | $\sigma_{ttt}/\text{MPa}$ | $\sigma_c/\sigma_{tt}$ | 相关系数     | $\sigma_{ttt}/\text{MPa}$ | $\sigma_{tt}/\text{MPa}$ | $\sigma_c/\sigma_{tt}$ |
| 姜玥灰砂岩  | 0.995 96  | -6.893 06                | -6.940 73                 | -10.701 38             | 0.999 59 | -10.150 82                | -9.189 02                | -8.083 06              |
| 大冶大理石  | 0.995 70  | -5.155 58                | -5.171 64                 | -18.601 44             | 0.996 15 | -21.683 92                | -18.234 82               | -5.275 62              |
| 卡拉拉大理石 | 0.997 90  | -9.092 92                | -9.135 36                 | -14.996 68             | 0.999 80 | -37.859 45                | -30.566 44               | -4.482 04              |
| 瑞穗粗面岩  | 0.999 20  | -5.800 65                | -5.818 24                 | -17.187 34             | 0.999 26 | -15.098 75                | -13.411 38               | -7.456 35              |
| 南阳大理石  | 0.999 70  | -3.035 79                | -3.039 71                 | -27.667 09             | 0.999 80 | -8.092 13                 | -7.478 90                | -11.244 97             |
| 鄂州花岗岩  | 0.997 80  | -4.141 79                | -4.150 88                 | -20.048 76             | 0.999 34 | -5.587 58                 | -5.214 96                | -15.957 92             |
| 锦屏大理石  | 0.999 01  | -12.844 56               | -12.894 84                | -15.448 04             | 0.998 56 | -31.287 15                | -27.799 59               | -7.165 57              |
| 汪斌砂岩   | 0.999 30  | -3.053 79                | -3.060 12                 | -20.129 92             | 0.997 90 | -9.816 70                 | -8.745 74                | -7.043 43              |
| 廷德尔石灰岩 | 0.998 00  | -3.289 85                | -3.301 75                 | -15.749 21             | 0.996 56 | -10.712 40                | -9.230 39                | -5.633 56              |
| 平顶山砂岩  | 0.996 00  | -6.305 47                | -6.322 22                 | -18.205 63             | 0.997 99 | -10.702 52                | -9.967 53                | -11.547 50             |
| 苏承东红砂岩 | 0.996 60  | -2.416 25                | -2.419 96                 | -28.099 66             | 0.999 07 | -10.674 05                | -9.368 63                | -7.258 26              |
| 彭帅大理石  | 0.996 60  | -8.345 10                | -8.367 47                 | -18.532 01             | 0.996 76 | -34.883 31                | -29.699 79               | -5.221 12              |
| 山口大理石  | 0.999 50  | -6.531 80                | -6.571 47                 | -12.326 00             | 0.999 61 | -25.030 92                | -20.069 35               | -4.036 01              |
| 孚日砂岩   | 0.995 66  | -1.825 88                | -1.831 45                 |                        | 0.999 43 | -4.554 49                 | -4.025 34                |                        |

表 5 双曲线型强度准则在  $n$  取值无限制时的拟合结果  
Table 5 Fitting results of hyperbolic intensity criterion for unrestricted values of  $n$

| 岩石类型   | $\sigma_{\text{th}}/\text{MPa}$ | $\sigma_{\text{tl}}/\text{MPa}$ | $n$     |
|--------|---------------------------------|---------------------------------|---------|
| 姜玥灰砂岩  | -0.023 5                        | -0.025 8                        | 4.108 9 |
| 大冶大理石  | -11.085 5                       | -10.506 0                       | 2.532 4 |
| 卡拉拉大理石 | -23.284 5                       | -21.182 6                       | 2.253 4 |
| 瑞穗粗面岩  | -2.423 3                        | -2.511 9                        | 3.340 5 |
| 南阳大理石  | -3.308 2                        | -3.301 2                        | 2.968 7 |
| 鄂州花岗岩  | -0.820 6                        | -0.855 3                        | 3.410 6 |
| 锦屏大理石  | -15.428 9                       | -15.271 9                       | 2.872 0 |
| 汪斌砂岩   | -1.305 1                        | -1.340 7                        | 3.249 9 |
| 廷德尔石灰岩 | -3.617 8                        | -3.609 6                        | 2.945 0 |
| 平顶山砂岩  | -0.549 5                        | -0.581 9                        | 3.597 9 |
| 苏承东红砂岩 | -7.385 3                        | -6.871 4                        | 2.428 1 |
| 彭帅大理石  | -18.86 30                       | -17.776 2                       | 2.501 0 |
| 山口大理石  | -5.151 7                        | -5.25 37                        | 3.138 5 |
| 孚日砂岩   | -0.000 2                        | -0.000 3                        | 3.557 5 |

表 6 2 种岩石真三轴试验数据拟合结果  
Table 6 Data fitting results of true triaxial shear test for two kinds of rocks

| 岩石类型   | 相关系数      | $\sigma_{\text{th}}/\text{MPa}$ | $\sigma_{\text{tl}}/\text{MPa}$ | $k$   |
|--------|-----------|---------------------------------|---------------------------------|-------|
| 邓纳姆白云岩 | 0.994 089 | -14.94                          | -14.99                          | 0.146 |
| 瑞穗粗面岩  | 0.994 089 | -4.388                          | -4.398                          | 0.136 |

为更直观分析其拟合效果，将表 6 中数据拟合结果绘制成散点拟合图，如图 8，9 所示。

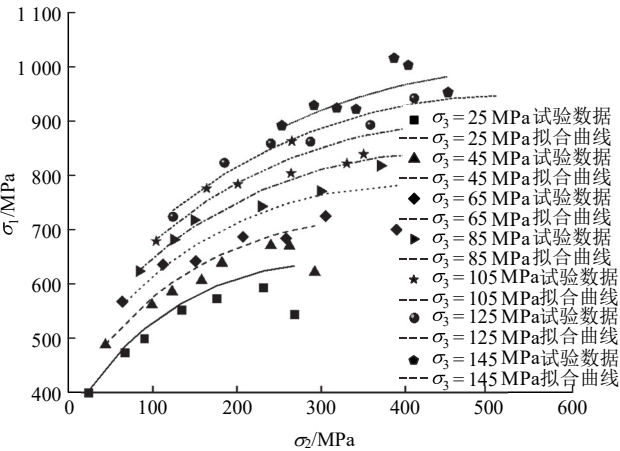


图 8 邓纳姆白云岩真三轴试验数据拟合图  
Fig.8 Data fitting diagram of Dunham dolomite true triaxial shear test

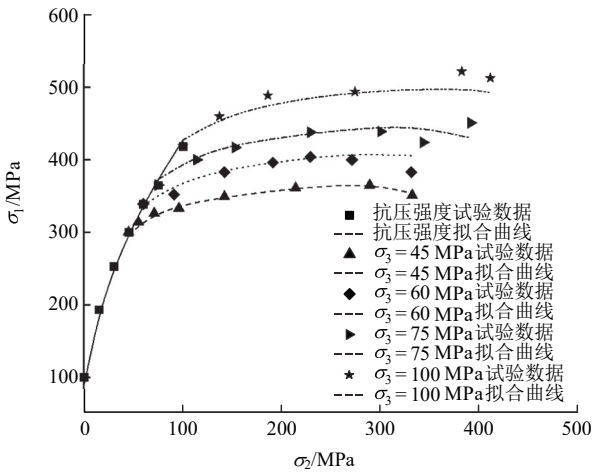


图 9 瑞穗粗面岩真三轴试验数据拟合图  
Fig.9 Fitting results of true triaxial test data of Mizuho trachyte

结合表 6 和图 8~9 可以发现，理论预测值和试验数值相符合较好。

常规三轴压缩( $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ )和常规三轴拉伸( $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ )是中间主应力变化的 2 个极端情形，常规三轴抗压强度曲线和常规三轴抗拉强度曲线有共同的起点，即三向等拉应力点( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_{\text{th}}$ )，并且随着平均应力 $\sigma_m$ 增加，同一  $\pi$  平面内，拉、压强度比趋于 1。因此，引用邓纳姆白云岩<sup>[36]</sup>和卡拉拉大理石<sup>[37]</sup>的常规三轴抗压、抗拉强度试验数据，通过式(22)，(24)对其进行拟合计算，绘制成抗压、抗拉强度试验数据拟合曲线，如图 10，11 所示。从拟合结果来看，式(22)，(24)的拟合精度较高，相关系数都超过 0.99，理论预测值和试验结果符合程度较高。

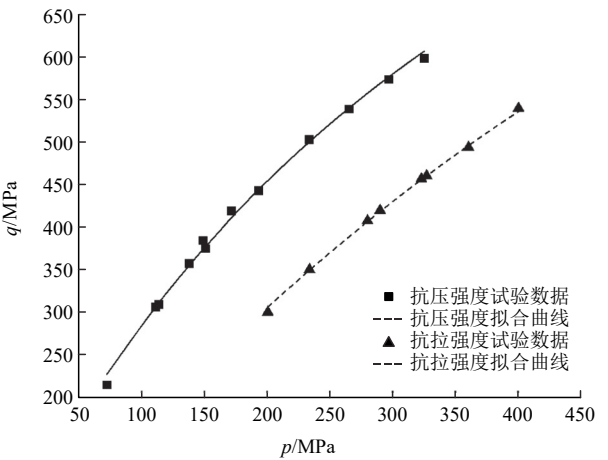


图 10 邓纳姆白云岩抗压、抗拉强度试验数据拟合图  
Fig.10 Fitting of compressive and tensile strength test data for Dunham dolomite

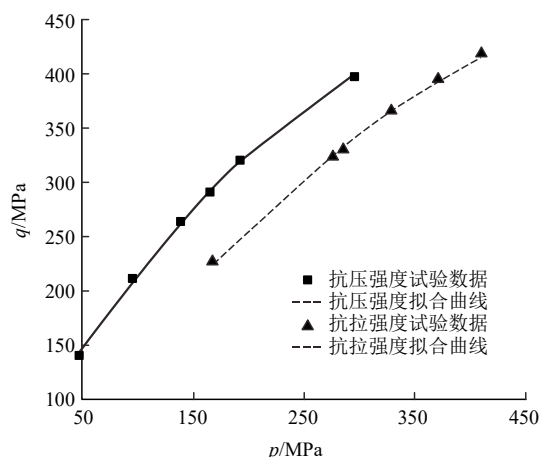


图11 卡拉拉大理石抗压、抗拉强度试验数据拟合图

Fig.11 Fitting of compressive and tensile strength test data for Carrara marble

## 4 讨论

本文基于双向等拉强度小于单向拉伸强度试验事实,推断出三向等拉强度小于双向等拉强度。由此创新性地提出抗压强度曲线在双向等拉应力点 $(0, \sigma_{tt}, \sigma_{tt})$ 存在 $d(\sigma_1 - \sigma_3)/d\sigma_m = 3$ 的观点,由于在推导这个结论的过程中并没有涉及到强度准则具体表达式,所以这个条件可以作为判断强度准则成立的必要条件,若一种强度准则能够在满足 $d(\sigma_1 - \sigma_3)/d\sigma_m = 3$ 的条件下,仍然能够取得很好的拟合结果,则可以认为该强度准则是合理的。

另外,本文建立的双曲线型强度准则在 $\sigma_1 - \sigma_3$ 坐标系下和在 $p - q$ 坐标系下都是以显式表达,可降低计算难度和拟合误差。2种坐标系下的表达式在数学逻辑上是完全等价的,但是对同一组数据拟合结果有差异,这种差异是由于拟合基准轴的不同造成的,并不存在 $\sigma_1 - \sigma_3$ 坐标系下拟合结果优于 $p - q$ 坐标系下拟合结果的问题。

本文强度准则以三向等拉强度 $\sigma_{ttt}$ 和双向等拉强度 $\sigma_{tt}$ 作为参数,具有明确的物理意义。虽然这2个参数不容易通过试验测量出来,但是前文推断这2个参数应该小于单向拉伸强度,单向拉伸强度是可以由试验测量出来的,这样就确定了三向等拉强度 $\sigma_{ttt}$ 和双向等拉强度 $\sigma_{tt}$ 这2个参数的上限。另外,双向等拉强度点平均应力是 $\frac{2\sigma_{tt}}{3}$ ,单向拉伸

点平均应力是 $\frac{\sigma_t}{3}$ ,  $\left| \frac{\sigma_t}{3} \right| < \left| \frac{2\sigma_{tt}}{3} \right|$ , 即 $\frac{1}{2}|\sigma_t| < |\sigma_{tt}|$ , 这是双向等拉强度 $\sigma_{tt}$ 下限,那么 $\sigma_{tt}$ 的取值范围即为: $\frac{1}{2}|\sigma_t| < |\sigma_{tt}| < |\sigma_t|$ 。目前测量双向等拉强度和三

向等拉强度还是比较困难的,将在后续试验中进一步研究。

参数的物理意义明确,为判断拟合出的参数是否合理提供了参照标准。因此,与其他参数物理意义不明确强度准则相比,该准则拟合结果的可靠性更高,可提供一定的实践指导价值。

## 5 结论

本文基于现有主应力空间岩石材料的破坏曲面特征理论和试验结论,建立了二参数双曲线型强度准则,主要结论如下:

(1) 基于岩石材料抗拉强度大于双向等拉伸强度,拉应力增加材料脆性,推定材料破坏曲面在与拉应力区间交界处垂直于拉应力区间界面。并认为在常规三轴抗压强度曲线上的双向等拉伸应力点存在 $d(\sigma_1 - \sigma_3)/d\sigma_m = 3$ 。

(2) 该准则中的2个参数分别是双向等拉强度 $\sigma_{tt}$ 和三向等拉强度 $\sigma_{ttt}$ ,其物理意义明确,且考虑了静水压力效应对子午线和 $\pi$ 平面上强度曲线的影响。双向等拉强度 $\sigma_{tt}$ 取值区间为 $\frac{1}{2}|\sigma_t| < |\sigma_{tt}| < |\sigma_t|$ 。

(3) 利用该准则对已公开发表文献中14种岩石三轴试验数据进行拟合计算,并与拟合精度较高的Burzynski抛物线准则和尤明庆指数准则进行对比分析。可以发现,不论是针对常规三轴试验数据还是真三轴试验数据,该准则拟合效果都比较好,相关系数均在0.99以上,且拟合得出的双向等拉强度 $\sigma_{tt}$ 和三向等拉强度 $\sigma_{ttt}$ 大小都在合理范围内。同时,不同约束条件下的拟合结果也印证了在双向等拉应力点 $(0, \sigma_{tt}, \sigma_{tt})$ 存在 $d(\sigma_1 - \sigma_3)/d\sigma_m = 3$ 的观点。

## 参考文献(References):

- [1] 丁兴发, 吴霞, 向平, 等. 混凝土与各向同性岩石强度理论研究进展[J]. 工程力学, 2020, 37(2): 1 - 15.(DING Faxing, WU Xia, XIANG Ping, et al. Reviews on strength theories of concrete and isotropic rock[J]. Engineering Mechanics, 2020, 37(2): 1 - 15.(in Chinese))
- [2] 姚仰平, 路德春, 周安楠, 等. 广义非线性强度理论及其变换应力空间[J]. 中国科学E辑: 工程科学 材料科学, 2004, 34(11): 1 283 - 1 299.(YAO Yangping, LU Dechun, ZHOU Annan, et al. Generalized nonlinear strength theory and its transformation stress space[J]. Science in China Series E: Engineering Science Materials Science,

- 2004, 34(11): 1 283 - 1 299.(in Chinese))
- [3] 任 政. 混凝土真三轴力学性能试验与本构理论研究[硕士学位论文][D]. 南京: 东南大学, 2018.(REN Zheng. Experimental research on the true triaxial mechanical properties and constitutive theory of concrete[M. S. Thesis][D]. Nanjing: Southeast University, 2018.(in Chinese))
- [4] 丁发兴, 吴 霞, 向 平, 等. 多类混凝土和各向同性岩石损伤比强度准则[J]. 土木工程学报, 2021, 54(2): 50 - 64.(DING Faxing, WU Xia, XIANG Ping, et al. Damage ratio strength criterion for various types of concrete and isotropic rock[J]. China Civil Engineering Journal, 2021, 54(2): 50 - 64.(in Chinese))
- [5] 张培森, 许大强, 颜 伟, 等. 不同围压下峰后循环载荷对砂岩力学及渗流特性的影响研究[J]. 煤炭科学技术, 2023, 51(7): 94 - 105.(ZHANG Peisen, XU Daqiang, YAN Wei, et al. Effect of post-peak cyclic load on mechanics and seepage characteristics of sandstone under different confining pressures[J]. Coal Science and Technology, 2023, 51(7): 94 - 105.(in Chinese))
- [6] 谢和平, 高明忠, 付成行, 等. 深部不同深度岩石脆延转化力学行为研究[J]. 煤炭学报, 2021, 46(3): 701 - 715.(XIE Heping, GAO Mingzhong, FU Chenghang, et al. Mechanical behavior of brittle-ductile transition in rocks at different depths[J]. Journal of China Coal Society, 2021, 46(3): 701 - 715.(in Chinese))
- [7] 李庆辉, 李少轩. 超深层砂岩储层岩石力学特性实验研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2021, 40(5): 948 - 957.(LI Qinghui, LI Shaoxuan. Experimental study on mechanical properties of ultra-deep sandstone[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2021, 40(5): 948 - 957.(in Chinese))
- [8] 赵阳升. 岩体力学发展的一些回顾与若干未解之百年问题[J]. 岩石力学与工程学报, 2021, 40(7): 1 297 - 1 336.(ZHAO Yangsheng. Retrospection on the development of rock mass mechanics and the summary of some unsolved centennial problems[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2021, 40(7): 1 297 - 1 336.(in Chinese))
- [9] 崔 凯. 基于临界状态弹塑性理论的软岩本构模型研究及应用[博士学位论文][D]. 武汉: 武汉科技大学, 2022.(CUI Kai. Research and application of soft rock constitutive model based on critical state elastoplastic theory[Ph. D. Thesis][D]. Wuhan: Wuhan University of Science and Technology, 2022.(in Chinese))
- [10] 李 斌, 王大国, 何治良, 等. 三轴条件下岩石抗剪强度参数线性回归法的修正[J]. 岩土力学, 2022, 43(10): 2 689 - 2 697.(LI Bin, WANG Daguo, HE Zhiliang, et al. Modification of linear regression method for rock shear strength parameters under triaxial condition[J]. Rock and Soil Mechanics, 2022, 43(10): 2 689 - 2 697.(in Chinese))
- [11] BARTON N. The shear strength of rock and rock joints[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences and Geomechanics Abstracts, 1976, (13): 255 - 279.
- [12] 李 斌, 许梦国, 刘艳章. 临界状态围压在岩石强度准则改进中的应用[J]. 岩土力学, 2016, 37(2): 390 - 398.(LI Bin, XU Mengguo, LIU Yanzhang. Application of critical state confining pressure to rock strength criteria modification[J]. Rock and Soil Mechanics, 2016, 37(2): 390 - 398.(in Chinese))
- [13] 尤明庆. 围压对岩石试样强度的影响及离散性[J]. 岩石力学与工程学报, 2014, 33(5): 929 - 937.(YOU Mingqing. Effect of confining pressure on strength scattering of rock specimen[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2014, 33(5): 929 - 937.(in Chinese))
- [14] 过镇海. 混凝土的强度和变形[M]. 北京: 清华大学出版社, 1997: 22 - 39.(GUO Zhenhai. Strength and deformation of concrete[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1997: 22 - 39.(in Chinese))
- [15] 陈积光, 陈乐求, 童小龙. 一种特制混凝土的双向拉伸强度试验研究[J]. 湖南科技大学学报: 自然科学版, 2017, 32(2): 47 - 51.(CHEN Jiguang, CHEN Leqiu, TONG Xiaolong. Study on the biaxial tensile strength of special made concrete[J]. Journal of Hunan University of Science and Technology: Natural Science, 2017, 32(2): 47 - 51.(in Chinese))
- [16] 杜景峰, 吴强杰. 平面应力状态断裂强度的椭圆准则分析[J]. 应用数学和力学, 2020, 41(3): 292 - 301.(DU Jingfeng, WU Qiangjie. Elliptic criterion analysis of fracture strength in plane stress states[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2020, 41(3): 292 - 301.(in Chinese))
- [17] MAIR W M. Fracture criteria for cast iron under biaxial stresses[J]. The Journal of strain Analysis for Engineering Design, 1968, 3(4): 254 - 263.
- [18] 黄家军. 各向同性材料均匀度强度理论[EB/OL]. 中国科技论文在线 [2023 - 08 - 08]. <http://www.paper.edu.cn/releasepaper/content/201405 - 264>.(HUANG Jiajun. Strength theory of homogeneity for isotropic materials[EB/OL]. Sciencepaper Online[2023 - 08 - 08]. <http://www.paper.edu.cn/releasepaper/content/201405 - 264>. (in Chinese))
- [19] 姜 玥, 周 辉, 卢景景, 等. 不同应力路径下灰砂岩力学特性与强度参数研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2019, 38(4): 815 - 824.(JIANG Yue, ZHOU Hui, LU Jingjing. Study on mechanical properties and strength parameters of gray sandstone under different stress paths[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2019, 38(4): 815 - 824.(in Chinese))
- [20] OUYANG Z, ELSWORTH D. A phenomenological failure criterion for brittle rock[J]. Rock Mechanics and Rock Engineering, 1991,

- (24): 133 - 153.
- [21] BESUELLE P, DESRUES J, RAYNAUD S. Experimental characterization of the localization phenomenon inside a Vosges sandstone in a triaxial cell[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2000, 37(8): 1 223 - 1 237.
- [22] MOGI K. Fracture and flow of rocks under high triaxial compression[J]. *Journal of Geophysical Research*, 1971, 76(5): 1 255 - 1 269.
- [23] BENZ T, SCHWAB R. A quantitative comparison of six rock failure criteria[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2008, 45(7): 1 176 - 1 186.
- [24] 李 斌. 高围压条件下岩石破坏特征及强度准则研究[博士学位论文][D]. 武汉: 武汉科技大学, 2015.(LI Bin. Research on rock failure characteristics and strength criteria under high confining pressure conditions[Ph. D. Thesis][D]. Wuhan: Wuhan University of Science and Technology, 2015.(in Chinese))
- [25] 肖桃李, 黄 梅, 李新平. 考虑围压效应的深埋大理岩强度变形特性研究[J]. *地下空间与工程学报*, 2018, 14(2): 362 - 368.(XIAO Taoli, HUANG Mei, LI Xinping. Research on strength and deformation with marble of deep rock mass considering confining pressure effect[J]. *Chinese Journal of Underground Space and Engineering*, 2018, 14(2): 362 - 368.(in Chinese))
- [26] 汪 斌, 朱杰兵, 邬爱清. 高应力下岩石非线性强度特性的试验验证[J]. *岩石力学与工程学报*, 2010, 29(3): 542 - 548.(WANG Bin, ZHU Jiebing, WU Aiqing. Experimental validation of nonlinear strength property of rock under high geostress[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2010, 29(3): 542 - 548.(in Chinese))
- [27] CARTER B J, DUNCAN S E J, LAJTAI E Z. Fitting strength criteria to intact rock[J]. *Geotechnical and Geological Engineering*, 1991, 9(1): 73 - 81.
- [28] YOU M. Mechanical characteristics of the exponential strength criterion under conventional triaxial stresses[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2010, 47(2): 195 - 204.
- [29] 苏承东, 付义胜. 红砂岩三轴压缩变形与强度特征的试验研究[J]. *岩石力学与工程学报*, 2014, 33(增 1): 3 164 - 3 169.(SU Chengdong, FU Yisheng. Experimental study of triaxial compression deformation and strength characteristics of red sandstone[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2014, 33(Supp.1): 3 164 - 3 169.(in Chinese))
- [30] 彭 帅, 张希巍, 冯夏庭, 等. 等向压缩及偏压加载下锦屏大理岩变形特性研究[J]. *岩土力学*, 2017, 38(12): 3 532 - 3 539.(PENG Shuai, ZHANG Xiwei, FENG Xiating, et al. Deformation behavior of Jinping marble under isotropic compression and deviatoric stress loading conditions[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2017, 38(12): 3 532 - 3 539.(in Chinese))
- [31] MOGI K. *Experimental rock mechanics*[M]. London: Taylor and Francis, 2007: 11 - 16.
- [32] OTTOSEN N S. A failure criterion for concrete[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1977, 103(4): 527 - 535.
- [33] 尤明庆. 岩石指数型强度准则在主应力空间的特征[J]. *岩石力学与工程学报*, 2009, 28(8): 1 541 - 1 551.(YOU Mingqing. Characteristics of exponential strength criterion of rock in principal stress space[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2009, 28(8): 1 541 - 1 551.(in Chinese))
- [34] 俞茂宏, 彭一江. 强度理论百年总结[J]. *力学进展*, 2004, (4): 529 - 560.(YU Maohong, PENG Yijiang. Advances in strength theories for materials under complex stress state in the 20th century[J]. *Advances in Mechanics*, 2004, (4): 529 - 560.(in Chinese))
- [35] YOU M. True-triaxial strength criteria for rock[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2009, 46(1): 115 - 127.
- [36] MOGI K. Fracture and flow of rocks under high triaxial compression[J]. *Journal of Geophysics Research*, 1971, 76(5): 1 255 - 1 269.
- [37] HAIMSON B. True triaxial stresses and the brittle fracture of rock[J]. *Pure and Applied Geophysics*, 2006, 163(5/6): 1 101 - 1 130.