



形变 Schrödinger-Virasoro 代数的非退化对称不变双线性型

法焕霞^{①,②*}, 李军波^②, 朱林生^②^① 中国科学技术大学数学科学学院与吴文俊数学重点实验室, 合肥 230026;^② 常熟理工学院数学与统计学院, 常熟 215500

E-mail: sd_huanxia@163.com, sd_junbo@163.com, lszhu@cslg.edu.cn

收稿日期: 2012-10-08; 接受日期: 2013-04-11; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11101056 和 11271056) 和浙江省自然科学基金 (批准号: LQ12A01005) 资助项目

摘要 本文确定了形变 Schrödinger-Virasoro 代数的非退化对称不变双线性型, 并借助此类 Lie 代数上的二上同调群, 确定了相应的 Leibniz 二上同调群.

关键词 形变 Schrödinger-Virasoro 代数 对称不变双线性型

MSC (2010) 主题分类 17B05, 17B56, 17B68

1 引言

Schrödinger-Virasoro Lie 代数 (含 original 和 twisted 两种情形) 及其形变分别由文献 [1, 2] 引入, 我们知道它们与统计物理密切相关. 本文所考虑的 Lie 代数 $\mathcal{L}_{\lambda, \mu}^s$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{C}$) 称为形变 Schrödinger-Virasoro Lie 代数^[2], 具有复数域 $\mathbb{C}$ 上的一组基 $\{L_n, M_n, Y_{s+n} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ (其中 s 可取 0 或 $\frac{1}{2}$) 且满足以下 Lie 运算 (未写出的全为零):

$$\begin{aligned} [L_n, L_m] &= (m-n)L_{m+n}, & [L_n, Y_{s+m}] &= \left(s+m - \frac{\lambda+1}{2}n + \mu\right)Y_{s+m+n}, \\ [L_n, M_m] &= (m-\lambda n + 2\mu)M_{m+n}, & [Y_{s+n}, Y_{s+m}] &= (m-n)M_{2s+m+n}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

人们对这种类型的无限维 Lie 代数饶有兴趣, 出现了一系列与之相关的文献. 文献 [3] 讨论了 original 情形下的 Schrödinger-Virasoro Lie 代数的顶点表示; 文献 [4–6] 分别研究了 original 情形下的 Schrödinger-Virasoro Lie 代数的 Lie 双代数结构、中间序列模和 Whittaker 模; 文献 [7] 研究了扩张情形下的导子代数、中心扩张和自同构群; 文献 [8, 9] 研究了广义 Schrödinger-Virasoro 代数的自同构、Verma 模, 文献 [2, 10, 11] 完全确定了 Schrödinger-Virasoro 代数 (包含 original 和 twisted 两种情形) 的二上同调群; 文献 [12] 刻画了扭形变 Schrödinger-Virasoro 代数的导子代数和自同构群.

下面先借助复数域 $\mathbb{C}$ 上的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 来介绍一下相关的概念. $\mathfrak{g}$ 上的一个对称双线性型 φ 称为 $\mathfrak{g}$ -不变的, 如果它满足条件

$$\varphi([x, y], z) = \varphi(x, [y, z]), \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}.$$

我们把 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上所有 $\mathbb{C}$ 值对称 $\mathfrak{g}$ -不变双线性型的集合记为 $\text{Inv}(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$. 如果 $\varphi(x, \mathfrak{g}) = 0$, 则根据 $\varphi \in \text{Inv}(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$ 的非退化性即可推出 $x = 0$. 众所周知, 非退化对称不变双线性型在 Lie 代数的结构和表示等方面起着重要作用, 带有非退化对称不变双线性型的 Lie 代数 (通常称为二次 Lie 代数) 在物理上也有重要应用 (参见文献 [7, 13–15] 及其所引文献).

本文的主要目的是确定形变 Schrödinger-Virasoro 代数上的非退化不变双线性型 $\mathcal{L}_{\lambda, \mu}^s$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{C}$), 我们把相关结果编排为下面的定理.

定理 1

$$\text{Inv}(\mathcal{L}_{\lambda, \mu}^s, \mathbb{C}) \cong \begin{cases} \mathbb{C}\varphi_{\frac{1}{2}\mathbb{Z}, -1}, & \mu \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}, \quad \lambda = -1, \\ \mathbb{C}\varphi_{s+\mathbb{Z}, -3}, & \mu \in s + \mathbb{Z}, \quad \lambda = -3, \\ \mathbb{C}\varphi_{s+\mathbb{Z}, -5}, & \mu \in s + \mathbb{Z}, \quad \lambda = -5, \\ \mathbb{C}\varphi_{s+\mathbb{Z}, -2}, & \mu \in s + \mathbb{Z}, \quad \lambda = -2, \\ \mathbb{C}\varphi_{\frac{1}{2}\mathbb{Z} \setminus s+\mathbb{Z}, -2}, & \mu \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \setminus s + \mathbb{Z}, \quad \lambda = -2, \\ 0, & \text{其余情形,} \end{cases}$$

其中相应的不为零的部分可以按如下方式给出:

$$\begin{aligned} \varphi_{\frac{1}{2}\mathbb{Z}, -1}(L_0, M_{-2\mu}) &= 1, \quad \varphi_{\frac{1}{2}\mathbb{Z}, -1}(Y_p, Y_{-p-2\mu}) = -2(1 - \delta_{p, -\mu}), \\ \varphi_{s+\mathbb{Z}, -3}(L_0, M_{-2\mu}) &= 1, \quad \varphi_{s+\mathbb{Z}, -5}(L_n, Y_{-n-\mu}) = 1, \\ \varphi_{\frac{1}{2}\mathbb{Z} \setminus s+\mathbb{Z}, -2}(L_n, M_{-n-2\mu}) &= 1, \quad \varphi_{s+\mathbb{Z}, -2}(L_n, M_{-n-2\mu}) = 1, \quad \varphi_{s+\mathbb{Z}, -2}(Y_p, Y_{-p-2\mu}) = -2, \end{aligned}$$

其中 $s = 0$ 或 $\frac{1}{2}$, 任意 $n \in \mathbb{Z}$, $p \in s + \mathbb{Z}$.

为了给出上述定理的推论, 我们将借助 Lie 代数 $\mathcal{S}$ 和 Leibniz 代数 $\mathcal{N}$ 介绍一些相关的概念. 所谓 Lie 代数 $\mathcal{S}$ 上的一个二上循环是指复数域 $\mathbb{C}$ 上的一个双线性函数 $\psi: \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$, 且满足下面的斜对称条件和 Jacobi 等式:

$$\psi(x, y) = -\psi(y, x), \quad \psi([x, y], z) = \psi(x, [y, z]) - \psi(y, [x, z]), \quad \forall x, y, z \in \mathcal{S}.$$

记 $\mathcal{C}^2(\mathcal{S}, \mathbb{C})$ 为 $\mathcal{S}$ 上所有二上循环构成的集合. 对复数域 $\mathbb{C}$ 上任意的线性函数 $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$, 可以按如下方式定义一个二上循环 ψ_f :

$$\psi_f(x, y) = f([x, y]), \quad \forall x, y \in \mathcal{S},$$

称为 $\mathcal{S}$ 上的二上边缘或平凡的二上循环. 记 $\mathcal{B}^2(\mathcal{S}, \mathbb{C})$ 为 $\mathcal{S}$ 上所有二上边缘构成的集合. 如果 $\phi - \psi$ 是平凡的, 则称二上循环 ϕ 与 ψ 等价, 称相应的商空间为 $\mathcal{S}$ 上的二上同调群:

$$\mathcal{H}^2(\mathcal{S}, \mathbb{C}) = \mathcal{C}^2(\mathcal{S}, \mathbb{C}) / \mathcal{B}^2(\mathcal{S}, \mathbb{C}).$$

文献 [2, 10, 11] 完全确定了形变 Schrödinger-Virasoro 代数 (含 original 和 twisted 两种情形) 的二上同调群 $\mathcal{H}^2(\mathcal{L}_{\lambda, \mu}^s, \mathbb{C})$.

复数域 $\mathbb{C}$ 上的 Leibniz 代数 $\mathcal{N}$ 是一个向量空间, 带有 $\mathbb{C}$ 上的双线性映射 $[\cdot, \cdot]: \mathcal{N} \times \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ 且满足以下条件:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y], \quad \forall x, y, z \in \mathcal{N}.$$

易知任意 Lie 代数一定是 Leibniz 代数, 如果对任意 $x \in \mathcal{N}$ 都有 $[x, x] = 0$, 则复数域 $\mathbb{C}$ 上的 Leibniz 代数 $\mathcal{N}$ 成为一个 Lie 代数.

Leibniz 代数 $\mathcal{N}$ 的 Leibniz 二上循环是指 $\mathbb{C}$ 上的双线性函数 $\psi: \mathcal{N} \times \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{C}$ 且满足以下条件:

$$\psi(x, [y, z]) = \psi([x, y], z) - \psi([x, z], y), \quad \forall x, y, z \in \mathcal{N}.$$

记 $\mathcal{C}_L^2(\mathcal{N}, \mathbb{C})$ 为 $\mathcal{N}$ 上的所有 Leibniz 二上循环构成的集合. 对任意 $\mathbb{C}$ 上的线性函数 $f: \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{C}$, 可以按如下方式定义一个 Leibniz 二上循环 ψ_f :

$$\psi_f(x, y) = f([x, y]), \quad \forall x, y \in \mathcal{N},$$

称为 $\mathcal{N}$ 上的一个 Leibniz 二上边缘或者平凡的 Leibniz 二上循环, 记 $\mathcal{B}_L^2(\mathcal{N}, \mathbb{C})$ 为 $\mathcal{N}$ 上所有 Leibniz 二上边缘构成的集合. 如果 $\phi - \psi$ 是平凡的, 则称 ϕ 与 ψ 等价, 我们称以下商空间为 $\mathcal{N}$ 的 Leibniz 二上同调群,

$$\mathcal{H}_L^2(\mathcal{N}, \mathbb{C}) = \mathcal{C}_L^2(\mathcal{N}, \mathbb{C}) / \mathcal{B}_L^2(\mathcal{N}, \mathbb{C}).$$

对于一个给定的 Lie 代数, 我们会很自然地问它的二上同调群与其 Leibniz 二上同调群是否相一致, 所考虑 Lie 代数上的不变双线性型的非退化性对此起着重要作用, 下面所要引用的命题对此给出了详细的刻画 (参见文献 [7, 14, 16]).

命题 2 对复数域 $\mathbb{C}$ 上的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$, 我们有以下正合序列:

$$0 \rightarrow \mathcal{H}^2(\mathfrak{g}, \mathbb{C}) \xrightarrow{\pi} \mathcal{H}_L^2(\mathfrak{g}, \mathbb{C}) \xrightarrow{\xi} \text{Inv}(\mathfrak{g}, \mathbb{C}) \xrightarrow{\psi} \mathcal{H}^3(\mathfrak{g}, \mathbb{C}),$$

其中 $\text{Inv}(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$ 是由 $\mathfrak{g}$ 的所有对称不变双线性型张成的空间, π 是自然嵌入映射, 映射 ξ 和 Cartan-Koszul 映射 ψ 分别定义为 $\xi(\mu)(x, y) = \mu(x, y) + \mu(y, x)$ 和 $\psi(\nu)(x, y, z) = \nu([x, y], z)$, 对任意 $\mu \in \mathcal{H}_L^2(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$, $\nu \in \text{Inv}(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$ 和 $x, y, z \in \mathfrak{g}$.

根据定理 1 和命题 2 即可推出下面的推论.

推论 3

$$\mathcal{H}_L^2(\mathcal{L}_{\lambda, \mu}^s, \mathbb{C}) = \begin{cases} \mathcal{H}^2(\mathcal{L}_{-1, \mu}^s, \mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}\chi_{\frac{1}{2}\mathbb{Z}, -1}, & \mu \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}, \quad \lambda = -1, \\ \mathcal{H}^2(\mathcal{L}_{-3, \mu}^s, \mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}\chi_{s+\mathbb{Z}, -3}, & \mu \in s + \mathbb{Z}, \quad \lambda = -3, \\ \mathcal{H}^2(\mathcal{L}_{-5, \mu}^s, \mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}\chi_{s+\mathbb{Z}, -5}, & \mu \in s + \mathbb{Z}, \quad \lambda = -5, \\ \mathcal{H}^2(\mathcal{L}_{-2, \mu}^s, \mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}\chi_{s+\mathbb{Z}, -2}, & \mu \in s + \mathbb{Z}, \quad \lambda = -2, \\ \mathcal{H}^2(\mathcal{L}_{-2, \mu}^s, \mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}\chi_{\frac{1}{2}\mathbb{Z} \setminus s+\mathbb{Z}, -2}, & \mu \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \setminus s + \mathbb{Z}, \quad \lambda = -2, \\ \mathcal{H}^2(\mathcal{L}_{\lambda, \mu}^s, \mathbb{C}), & \text{其余情形,} \end{cases}$$

其中相应的不为零的部分可以按如下方式给出:

$$\begin{aligned} \chi_{\frac{1}{2}\mathbb{Z}, -1}(L_0, M_{-2\mu}) &= 1, \quad \chi_{\frac{1}{2}\mathbb{Z}, -1}(Y_p, Y_{-p-2\mu}) = -2(1 - \delta_{p, -\mu}), \\ \chi_{s+\mathbb{Z}, -3}(L_0, M_{-2\mu}) &= 1, \quad \chi_{s+\mathbb{Z}, -5}(L_n, Y_{-n-\mu}) = 1, \\ \chi_{\frac{1}{2}\mathbb{Z} \setminus s+\mathbb{Z}, -2}(L_n, M_{-n-2\mu}) &= 1, \quad \chi_{s+\mathbb{Z}, -2}(L_n, M_{-n-2\mu}) = 1, \quad \chi_{s+\mathbb{Z}, -2}(Y_p, Y_{-p-2\mu}) = -2, \end{aligned}$$

其中 $s = 0$ 或 $s = \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, $p \in s + \mathbb{Z}$.

对集合 Ω 和 S , 方便起见, 我们引入记号 $\Omega \setminus S$ 表示 $\{x \mid x \in \Omega, x \notin S\}$.

2 定理 1 的证明

我们把定理 1 的证明拆分成几个引理来进行. 首先, 下面的引理可以在已有的参考文献中找到, 如文献 [7, 引理 3.2].

引理 4 $\varphi(L_m, L_n) = 0, \forall \varphi \in \text{Inv}(\mathcal{L}_{\lambda, \mu}^s, \mathbb{C}), m, n \in \mathbb{Z}.$

引理 5 对任意 $\mu \in s + \mathbb{Z}$ 和 $\varphi \in \text{Inv}(\mathcal{L}_{\lambda, \mu}^s, \mathbb{C})$, 有

$$\varphi(L_m, Y_p) = \begin{cases} \delta_{p, -m-\mu} \varphi(L_0, Y_{-\mu}), & \lambda = -5, \\ 0, & \lambda \neq -5, -3, \\ 0, & \lambda = -3, (m, p) \neq (0, -\mu). \end{cases}$$

证明 对任意 $m \in \mathbb{Z}, p \in s + \mathbb{Z}$ 且 $p + \mu \neq 0$, 下面的等式成立,

$$\varphi(L_m, Y_p) = \frac{1}{p + \mu} \varphi(L_m, [L_0, Y_p]) = \frac{1}{p + \mu} \varphi([L_m, L_0], Y_p) = -\frac{m}{p + \mu} \varphi(L_m, Y_p),$$

这就意味着如果 $\mu \notin s + \mathbb{Z}$ 或者 $\mu \in s + \mathbb{Z}$ 且 $p \neq -\mu, m + p \neq -\mu$, 那么 $\varphi(L_m, Y_p) = 0$.

当 $\mu \in s + \mathbb{Z}, \lambda \neq -3$ 时, 根据下面的等式:

$$\varphi(L_m, Y_{-\mu}) = \frac{-2}{\lambda + 3} \varphi(L_m, [L_1, Y_{-\mu-1}]) = \frac{2(m-1)}{\lambda + 3} \varphi(L_{m+1}, Y_{-\mu-1}),$$

我们可以得到如下结论:

$$\varphi(L_m, Y_{-\mu}) = 0, \quad \forall \varphi \in \text{Inv}(\mathcal{L}_{\lambda, \mu}^s, \mathbb{C}), \quad m \in \mathbb{Z}^*, \quad \mu \in s + \mathbb{Z}.$$

如果 $\mu \in s + \mathbb{Z}, \lambda = -3$ 且 $m \neq 2$, 我们可以把 $\varphi(L_m, Y_{-\mu})$ 改写为 $\frac{1}{2-m} \varphi(L_{m-1}, Y_{1-\mu})$, 即可推出

$$\varphi(L_m, Y_{-\mu}) = 0, \quad \forall \varphi \in \text{Inv}(\mathcal{L}_{\lambda, \mu}^s, \mathbb{C}), \quad m \in \mathbb{Z}^* \setminus \{2\}, \quad \mu \in s + \mathbb{Z}.$$

当 $\mu \in s + \mathbb{Z}$ 且 $\lambda = -3$ 时, 我们有下面的等式成立,

$$\varphi(L_2, Y_{-\mu}) = \frac{1}{4} \varphi([L_{-1}, L_3], Y_{-\mu}) = \frac{3}{4} \varphi(L_{-1}, Y_{3-\mu}),$$

据此可以推出下面的等式:

$$\varphi(L_2, Y_{-\mu}) = 0, \quad \forall \varphi \in \text{Inv}(\mathcal{L}_{\lambda, \mu}^s, \mathbb{C}), \quad \mu \in s + \mathbb{Z}.$$

当 $\mu \in s + \mathbb{Z}$ 时, 对任意的 $\varphi \in \text{Inv}(\mathcal{L}_{\lambda, \mu}^s, \mathbb{C}), m \in \mathbb{Z}^*$, 总有 $\varphi(L_m, Y_{-\mu}) = 0$.

当 $\mu \in s + \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^*$ 时, 有下面的等式成立,

$$\varphi(L_m, Y_{-m-\mu}) = \frac{1}{m} \varphi([L_0, L_m], Y_{-m-\mu}) = \frac{1}{m} \varphi(L_0, [L_m, Y_{-m-\mu}]) = -\frac{\lambda+3}{2} \varphi(L_0, Y_{-\mu}).$$

如果 $\mu \in s + \mathbb{Z}$, 则有 $\varphi(L_m, Y_p) = -\frac{\lambda+3}{2} \delta_{p, -m-\mu} \varphi(L_0, Y_{-\mu}), \forall \varphi \in \text{Inv}(\mathcal{L}_{\lambda, \mu}^s, \mathbb{C}), m \in \mathbb{Z}^*, p \in s + \mathbb{Z}$, 并且 $\varphi(L_0, Y_q) = 0, \forall -\mu \neq q \in s + \mathbb{Z}$.

对任意 $\mu \in s + \mathbb{Z}, m, n \in \mathbb{Z}$, 下面的等式成立,

$$(m-n) \varphi(L_{m+n}, Y_{-\mu-m-n}) = \left(m + \frac{\lambda+3}{2} n \right) \varphi(L_m, Y_{-\mu-m}).$$

如果 $\lambda \neq -3$, $m, m+n \in \mathbb{Z}^*$, 我们即可推出下面的等式:

$$\varphi(L_0, Y_{-\mu}) = 0, \quad \forall \mu \in s + \mathbb{Z}, \quad \lambda \neq -5, -3.$$

至此, 我们完成了引理 5 的证明. □

引理 6 对任意 $\mu \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $\varphi \in \text{Inv}(\mathcal{L}_{\lambda, \mu}^s, \mathbb{C})$, 有

$$\varphi(L_n, M_m) = \begin{cases} \delta_{n, -m-2\mu} \varphi(L_0, M_{-2\mu}), & \lambda = -2, \\ 0, & \lambda \neq -2, -1, \\ 0, & \lambda = -1, \quad (n, m) \neq (0, -2\mu). \end{cases}$$

证明 对任意 $m, n \in \mathbb{Z}$, $\mu \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, 总有下面的等式成立,

$$\varphi(L_n, M_m) = \frac{1}{m+2\mu} \varphi(L_n, [L_0, M_m]) = \frac{1}{m+2\mu} \varphi([L_n, L_0], M_m) = \frac{-n}{m+2\mu} \varphi(L_n, M_m), \quad (2.1)$$

据此我们可以推出如下等式:

$$\varphi(L_n, M_m) = 0, \quad \forall \varphi \in \text{Inv}(\mathcal{L}_{\lambda, \mu}^s, \mathbb{C}), \quad m, n \in \mathbb{Z}, \quad \mu \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}.$$

如果 $\mu \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, 根据 (2.1), 我们还可推出以下等式:

$$\varphi(L_n, M_m) = 0, \quad \forall m \neq -2\mu, \quad m+n \neq -2\mu. \quad (2.2)$$

如果 $\lambda \neq -1$, $n \in \mathbb{Z}^*$, 我们有下面的等式成立,

$$\varphi(L_n, M_{-2\mu}) = \frac{-1}{\lambda+1} \varphi(L_n, [L_1, M_{-2\mu-1}]) = \frac{n-1}{\lambda+1} \varphi(L_{n+1}, M_{-2\mu-1}),$$

再结合 (2.2), 我们可以推出以下等式:

$$\varphi(L_n, M_{-2\mu}) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^*, \quad \lambda \neq -1.$$

如果 $\lambda = -1$, 对任意 $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 2\}$, 我们可以把 $\varphi(L_n, M_{-2\mu})$ 改写为 $\frac{1}{2-n} \varphi(L_{n-1}, M_{1-2\mu})$, 再次利用 (2.2), 即可推出以下等式:

$$\varphi(L_n, M_{-2\mu}) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 2\}.$$

当 $\lambda = -1$ 时, 我们可以通过下面的等式推出 $\varphi(L_2, M_{-2\mu}) = 0$,

$$\varphi(L_2, M_{-2\mu}) = \frac{1}{4} \varphi([L_{-1}, L_3], M_{-2\mu}) = \frac{1}{4} \varphi(L_{-1}, [L_3, M_{-2\mu}]) = \frac{3}{4} \varphi(L_{-1}, M_{3-2\mu}).$$

我们已经证明了以下等式:

$$\varphi(L_n, M_{-2\mu}) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^*.$$

对任意 $n \in \mathbb{Z}^*$, 类似可以得到以下等式:

$$\varphi(L_n, M_{-n-2\mu}) = \frac{1}{n} \varphi([L_0, L_n], M_{-n-2\mu}) = -(\lambda+1) \varphi(L_0, M_{-2\mu}).$$

当 $\mu \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ 时, 我们已经证明了以下结论:

$$\begin{aligned}\varphi(L_n, M_m) &= -(\lambda + 1)\delta_{m, -n-2\mu}\varphi(L_0, M_{-2\mu}), \quad \forall \varphi \in \text{Inv}(\mathcal{L}_{\lambda, \mu}^s, \mathbb{C}), \quad n \in \mathbb{Z}^*, \\ \varphi(L_0, M_m) &= 0, \quad \forall -2\mu \neq m \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

对任意 $\mu \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, 我们有下面的等式成立,

$$(m - n)\varphi(L_{m+n}, M_{-2\mu-m-n}) = (m + n + \lambda n)\varphi(L_m, M_{-2\mu-m}).$$

如果 $\lambda \neq -1$, $m, m + n \in \mathbb{Z}^*$, 可以推出

$$\varphi(L_0, M_{-2\mu}) = 0, \quad \forall \mu \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}, \quad \lambda \neq -2, -1.$$

至此, 我们已经完成了引理 6 的证明. □

引理 7 $\varphi(Y_p, M_m) = 0, \forall \varphi \in \text{Inv}(\mathcal{L}_{\lambda, \mu}^s, \mathbb{C}), p \in s + \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}$.

证明 如果 $\mu \notin s + \mathbb{Z}$, 根据下面的等式:

$$\varphi(Y_p, M_m) = \frac{\varphi([L_0, Y_p], M_m)}{p + \mu} = \frac{\varphi(L_0, [Y_p, M_m])}{p + \mu},$$

可以推出 $\varphi(Y_p, M_m) = 0$. 进而, 如果 $\mu \in s + \mathbb{Z}$, $p \neq -\mu$, 则有 $\varphi(Y_p, M_m) = 0$.

如果 $\mu \in s + \mathbb{Z}$, $\lambda \neq -3$, 由下面的等式可以得到 $\varphi(Y_{-\mu}, M_m) = 0$,

$$\varphi(Y_{-\mu}, M_m) = -\frac{2\varphi([L_1, Y_{-\mu-1}], M_m)}{\lambda + 3} = -\frac{2\varphi(L_1, [Y_{-\mu-1}, M_m])}{\lambda + 3}.$$

如果 $\mu \in s + \mathbb{Z}$, $\lambda = -3$, $s = 0$, $m \in \mathbb{Z}^*$, 根据下面的等式推出 $\varphi(Y_{-\mu}, M_m) = 0$,

$$\varphi(Y_{-\mu}, M_m) = \frac{1}{m}\varphi(Y_{-\mu}, [L_{-\mu}, M_{m+\mu}]) = \frac{1}{m}\varphi([Y_{-\mu}, L_{-\mu}], M_{m+\mu}) = -\frac{\mu}{m}\varphi(Y_{-2\mu}, M_{m+\mu}).$$

如果 $\mu \neq 0$, 根据下面的等式推出 $\varphi(Y_{-\mu}, M_0) = 0$,

$$\varphi(Y_{-\mu}, M_0) = \frac{1}{4\mu}\varphi(Y_{-\mu}, [L_{\mu}, M_{-\mu}]) = \frac{1}{4\mu}\varphi([Y_{-\mu}, L_{\mu}], M_{-\mu}) = -\frac{1}{4}\varphi(Y_0, M_{-\mu}).$$

如果 $\mu = 0$, 根据下面的等式可以得到 $\varphi(Y_0, M_0) = 0$,

$$\varphi(Y_0, M_0) = \frac{1}{2}\varphi(Y_0, [L_1, M_{-1}]) = \frac{1}{2}\varphi([Y_0, L_1], M_{-1}) = -\frac{1}{2}\varphi(Y_1, M_{-1}).$$

如果 $\mu \in s + \mathbb{Z}$, $\lambda = -3$, $s = \frac{1}{2}$, $m \neq -2 - 2\mu$, 根据下面的等式:

$$\varphi(Y_{-\mu}, M_m) = \frac{1}{m + 2 + 2\mu}\varphi(Y_{-\mu}, [L_1, M_{m-1}]) = \frac{1}{m + 2 + 2\mu}\varphi([Y_{-\mu}, L_1], M_{m-1}),$$

可得到 $\varphi(Y_{-\mu}, M_m) = 0$.

如果 $\mu \in s + \mathbb{Z}$, $\lambda = -3$, $s = \frac{1}{2}$, $m = -2 - 2\mu$, 根据下面的等式我们可以推出 $\varphi(Y_{-\mu}, M_{-2-2\mu}) = 0$,

$$\varphi(Y_{-\mu}, M_{-2-2\mu}) = -\frac{1}{4}\varphi(Y_{-\mu}, [L_{-1}, M_{-1-2\mu}]) = -\frac{1}{4}\varphi([Y_{-\mu}, L_{-1}], M_{-1-2\mu}) = -\frac{1}{4}\varphi([Y_{-\mu-1}, M_{-1-2\mu}]).$$

从而证得此引理是正确的. □

引理 8 $\varphi(M_n, M_m) = 0, \forall \varphi \in \text{Inv}(\mathcal{L}_{\lambda, \mu}^s, \mathbb{C}), m, n \in \mathbb{Z}$.

证明 对任意 $m \in \mathbb{Z}, 3n \neq 2s$, 总有下面的等式成立,

$$\varphi(M_n, M_m) = \frac{\varphi([Y_{s-n}, Y_{2n-s}], M_m)}{3n-2s} = \frac{\varphi(Y_{s-n}, [Y_{2n-s}, M_m])}{3n-2s} = \frac{\varphi(Y_{s-n}, 0)}{3n-2s} = 0.$$

当 $s = 0$ 时, 对任意 $m \in \mathbb{Z}$, 可以推出下面的等式:

$$\varphi(M_0, M_m) = \frac{1}{2}\varphi([Y_{-1}, Y_1], M_m) = \frac{1}{2}\varphi(Y_{-1}, [Y_1, M_m]) = \frac{1}{2}\varphi(Y_{-1}, 0) = 0.$$

从而此引理成立. $\square$

引理 9 对任意 $\mu \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}, \varphi \in \text{Inv}(\mathcal{L}_{\lambda, \mu}^s, \mathbb{C})$, 下面的等式成立,

$$\varphi(Y_p, Y_q) = \begin{cases} -2\delta_{p, -2\mu-q}\varphi(L_0, M_{-2\mu}), & \lambda = -2, \\ -2(1 - \delta_{p, -\mu})\delta_{p, -2\mu-q}\varphi(L_0, M_{-2\mu}), & \lambda = -1, \\ 0, & \lambda \neq -3, -2, -1, \\ 0, & \lambda = -3, (p, q) \neq (-\mu, -\mu). \end{cases}$$

证明 对任意 $\varphi \in \text{Inv}(\mathcal{L}_{\lambda, \mu}^s, \mathbb{C}), p, q \in s + \mathbb{Z}$, 我们有下面的等式成立,

$$\varphi(Y_{s+n}, Y_{s+m}) = -\frac{\varphi([Y_{s+n}, L_0], Y_{s+m})}{s+n+\mu} = -\frac{s+m+\mu}{s+n+\mu}\varphi(Y_{s+n}, Y_{s+m}).$$

如果 $\mu \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ 或者 $\mu \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ 且 $p \neq -\mu, p+q \neq -2\mu$, 可以推得 $\varphi(Y_p, Y_q) = 0$.

当 $p = -\mu, \lambda \neq -3$ 且 $q \neq -\mu$ 时, 可以得到以下等式:

$$\varphi(Y_{-\mu}, Y_q) = \frac{2}{\lambda+3}\varphi([Y_{-\mu-1}, L_1], Y_q) = \frac{2}{\lambda+3}\varphi(Y_{-\mu-1}, [L_1, Y_q]) = \frac{2(q - \frac{\lambda+1}{2} + \mu)}{\lambda+3}\varphi(Y_{-\mu-1}, Y_{q+1}) = 0.$$

当 $p = -\mu, \lambda = -3$ 且 $q \neq -\mu$ 时, 以下等式成立,

$$\varphi(Y_{-\mu}, Y_q) = \frac{1}{q+\mu}\varphi(Y_{-\mu}, [L_0, Y_q]) = \frac{1}{q+\mu}\varphi([Y_{-\mu}, L_0], Y_q) = 0.$$

如果 $\mu \in s + \mathbb{Z}$, 对任意 $\varphi \in \text{Inv}(\mathcal{L}_{\lambda, \mu}^s, \mathbb{C}), p, q \in s + \mathbb{Z}$ 且 $q \neq -\mu$, 总有 $\varphi(Y_{-\mu}, Y_q) = 0$. 当 $\mu \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ 时, 我们已经证明 $\varphi(Y_p, Y_q) = 0, \forall \varphi \in \text{Inv}(\mathcal{L}_{\lambda, \mu}^s, \mathbb{C}), p, q \in s + \mathbb{Z}$ 且 $p+q \neq -2\mu$.

如果 $\mu \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}, p \neq -\mu$ 且 $p+q = -2\mu$, 可以推出

$$\varphi(Y_p, Y_q) = \frac{1}{p+\mu}\varphi([L_0, Y_p], Y_q) = \frac{1}{p+\mu}\varphi(L_0, [Y_p, Y_q]) = -2\varphi(L_0, M_{-2\mu}).$$

如果 $\mu \in s + \mathbb{Z}, p = q = -\mu, \lambda \neq -3$, 可以推出

$$\varphi(Y_{-\mu}, Y_{-\mu}) = \frac{-2}{\lambda+3}\varphi([L_1, Y_{-\mu-1}], Y_{-\mu}) = \frac{2(\lambda+1)}{\lambda+3}\varphi(L_0, M_{-2\mu}).$$

再根据引理 6, 即可得到引理 9. $\square$

定理 1 的证明 由引理 4-9 联合起来即可得到本定理的证明. $\square$

致谢 感谢审稿人提出的宝贵建议.

参考文献

- 1 Henkel M. Schrödinger invariance and strongly anisotropic critical systems. *J Stat Phys*, 1994, 75: 1023–1029
- 2 Roger C, Unterberger J. The Schrödinger-Virasoro Lie group and algebra: representation theory and cohomological study. *Ann Henri Poincaré*, 2006, 7: 1477–1529
- 3 Unterberger J. On vertex algebra representations of the Schrödinger-Virasoro Lie algebra. *Nuclear Phys B*, 2009, 823: 320–371
- 4 Han J, Li J, Su Y. Lie bialgebra structures on the Schrödinger-Virasoro Lie algebra. *J Math Phys*, 2009, 50: 083504
- 5 Li J, Su Y. Representations of the Schrödinger-Virasoro algebras. *J Math Phys*, 2008, 49: 053512
- 6 Zhang X, Tan S, Lian H. Whittaker modules for the Schrödinger-Witt algebra. *J Math Phys*, 2010, 51: 083524
- 7 Gao S, Jiang C, Pei Y. Low-dimensional cohomology groups of the Lie algebras $W(a, b)$. *Comm Algebra*, 2011, 39: 397–423
- 8 Tan S, Zhang X. Automorphisms and Verma modules for generalized Schrödinger-Virasoro algebras. *J Algebra*, 2009, 322: 1379–1394
- 9 Wang W, Li J, Xin B. Central extensions and derivations of generalized Schrödinger-Virasoro algebras. *Alg Colloq*, 2012, 19: 735–744
- 10 Li J. 2-cocycles of twisted deformative Schrödinger-Virasoro algebra. *Comm Algebra*, 2012, 40: 1933–1950
- 11 Li J, Su Y, Zhu L. 2-cocycles of original deformative Schrödinger-Virasoro algebras. *Sci China Ser A*, 2008, 51: 1989–1999
- 12 Wang W, Li J, Xu Y. Derivations and automorphisms of twisted deformative Schrödinger-Virasoro Lie algebras. *Comm Algebra*, 2012, 40: 3365–3388
- 13 Favre G, Santhroubane L. Symmetric, invariant, non-degenerate bilinear form on a Lie algebra. *J Algebra*, 1987, 105: 451–464
- 14 Hu N, Pei Y, Liu D. A cohomological characterization of Leibniz central extensions of Lie algebras. *Proc Amer Math Soc*, 2008, 136: 437–447
- 15 Zhu L, Meng D. Quadratic Lie algebras and commutative associative algebras. *Comm Algebra*, 2001, 29: 2249–2268
- 16 Pirashvili T. On Leibniz homology. *Ann Inst Fourier Grenoble*, 1994, 44: 401–411

Non-degenerate symmetric invariant bilinear forms on the deformative Schrödinger-Virasoro algebras

FA HuanXia, LI JunBo & ZHU LinSheng

Abstract In this note, we shall determine all the non-degenerate symmetric invariant bilinear forms on the deformative Schrödinger-Virasoro algebras, which together with the known results on the second cohomology groups of these Lie algebras, give the corresponding results on their second Leibniz cohomology groups.

Keywords deformative Schrödinger-Virasoro algebras, invariant bilinear forms

MSC(2010) 17B05, 17B56, 17B68

doi: 10.1360/012013-102