

磁场重联扩散区域中磁零点结构的观测研究

胡运辉, 邓晓华*, 周猛, 赵辉, 唐荣欣, 付松, 王敬芳, 袁志刚, R. Nakamura, W. Baumjohann, H. Réme, C. M. Carr

武汉大学电子信息学院, 测绘遥感信息工程国家重点实验室, 武汉 430079;

中国科学院空间天气学国家重点实验室, 北京 100012;

Space Research Institute, Austrian Academy of Sciences, 6, A-8042 Graz, Austria;

Centre d'Etudes Spatiales des Rayonnements, BP 4346, 31028 Toulouse Cedex 4, France;

The Blackett Laboratory, Imperial College London SW7 2BZ, UK

* 联系人, E-mail: dengxh@public.wh.hb.cn

2007-11-06 收稿, 2008-01-29 接受

国家自然科学基金(批准号: 40390151, 40574074)和国家杰出青年科学基金(批准号: 40325012)资助项目

摘要 磁重联是能量转换的非常重要的基本等离子体物理过程之一。过去磁场重联的理论、数值模拟和观测研究, 大多是集中在二维模型下进行, 而实际的磁场重联涉及三维非线性过程, 对于三维情况下磁场重联及其相关的奇异结构的基本性质现在还未完全解决。通过高斯积分引入 Poincaré 指数, 将其离散化, 利用 Cluster 四颗卫星所测得的磁场, 研究了磁场重联扩散区中磁零点结构, 通过计算零点位置和轨迹, 估算了其运动速度和轨迹, 并结合零点附近电流的特征将观测与零点重联模型进行了比较和讨论。

关键词

Poincaré 指数

磁场零点

磁场重联

磁重联是能量转换和加速带电粒子的基本等离子体物理过程之一, 在太阳活动、磁层活动和实验室等离子体能量爆发过程中起着关键性的作用。磁零点是重联的发生地, 磁力线在此断开和重新联接。在二维情形下, 磁场消失的零点或为 X 型中性点或为 O 型中性点。三维情形下, 磁零点提出至今, 60 多年来大多数研究局限在理论与数值模拟范围内, Lau 和 Finn^[1]从理论上对三维磁场零点进行了定义、分类和描述; Parnell 等人^[2]通过线性分析的方法研究了三维磁场零点的局部结构发现磁力线结构由四个参数决定; Priest 和 Titov^[3]研究了在三维中性点的磁场重联; Wang 等人^[4]提出了一种直接的、可靠的探测二维磁场零点的方法, Zhao 等人^[5]将这种方法推广到三维向量空间, Cai 等人^[6]通过三维全电磁场粒子模拟将磁尾磁场拓扑结构可视化, Dorelli 等人^[7]根据 Greene^[8]描述的方法追踪零点的轨迹进行磁层顶 separator 重联研究。由于磁零点是一个磁场为零的孤立奇点, 在三维空间的测度为零, 磁零点的三维特性要求至少空间四点能同时测量。由欧洲空间局发射的四颗

Cluster 卫星和中国发射的两颗探测卫星组成第一次太空六点联合探测, 提供了目前实现这种卫星测量的唯一手段。Xiao 等人^[9,10]利用微分拓扑学的方法, 通过分析欧洲空间局 Cluster 星座的探测数据, 在地球磁尾首次观测到磁重联的磁零点和磁零点对, 这些结果对理解空间和天体等离子体活动现象非常重要。深入研究重联扩散区中零点和多零点结构和相互关系, 伴随零点的粒子和波动过程及其与磁场重联的内在联系具有十分重要的意义。本文通过高斯积分引入了 Poincaré 指数, 将其离散化, 利用 Cluster 卫星观测数据, 研究了地球磁尾磁场重联扩散区中磁零点结构和特性, 通过计算零点位置和轨迹, 估算了其运动速度和轨迹, 并结合零点附近电流的特征, 将观测与零点重联模型进行了比较和讨论。

1 磁场零点拓扑结构及计算方法

1.1 3-D 磁场零点拓扑结构

磁场零点即磁场消失为零的点, 为了研究零点附近磁场的局部结构, 不失一般性, 将磁场零点取在

$r=0$ (r 是位置矢量 (x, y, z)) 处, 利用Taylor展开(将其一阶展开, 即假设磁场在零点周围是线性变化的)可以将零点附近的磁场表达为 [1]

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \delta \mathbf{B} \cdot \mathbf{r}, \quad (1)$$

式中 $\delta \mathbf{B}$ 是在零点处计算得到的 3×3 实矩阵 $\delta B_{ij} = \partial B_i / \partial x_j$. 因为矩阵的迹 $\text{tr}(\delta \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, 即矩阵 3 个特征值之和 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$. 所以矩阵 3 个特征值或全为实数或为一个实数和 2 个共轭复数. 如果所有特征值为实数并且特征值符号为 $(+, -, -)$, 则称为 A 型零点; 如果所有特征值为实数, 并且特征值符号为 $(+, +, -)$, 则称为 B 型零点; 如果特征值出现共轭复数则称为螺旋型零点, 加下角标 s 区别 [1].

当空间中存在多个磁场零点时, 磁力线将呈现出较为复杂的位形 [6], 图 1 描绘了一种含有一个 A 型零点和一个 B 型零点的情况. 图中 Σ_A (也称 fan 平面) 和 Σ_B 面彼此相交. 由于 Σ_A 或 Σ_B 面上的每条磁力线分别与零点 A 或 B 相联, Σ_A 和 Σ_B 的交界线必定是联结两个零点的磁力线, 即 A 和 B 之间有一条零点-零点线. 这样, Σ_B 将趋近于 γ_A (也称 spine 线), 但不能与 γ_A 相交. 唯一的可能性是 Σ_B 以 γ_A 为边界的半无限的面, 在 Σ_B 面上的磁力线在 A 点处分开, 然后沿着 γ_A 辐射. 同样, γ_B 线是 Σ_A 的边界 [1].

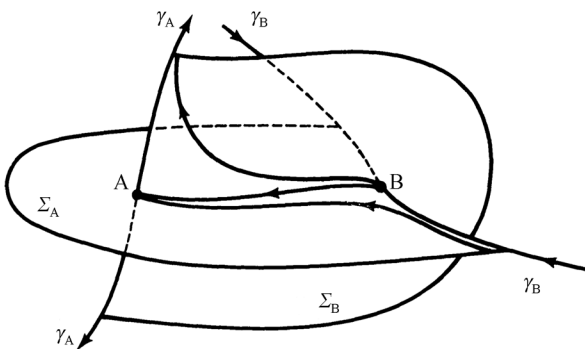


图 1 两个零点的磁场结构(Lau等人 [1])

1.2 研究方法

磁场零点附近的几何属性可以利用Poincaré指数 [9-11] 进行描述, Wang等人 [4] 引入并定义了二维向量的Poincaré指数, 利用该指数描述了太阳活动区耀斑磁

力线在二维奇点附近的几何性质, Zhao等人 [5] 通过数学上的流形几何定义出了三维庞加莱指数并在太阳磁场方面进行了相关分析. 本文从另一个角度详细阐述该指数相关内容.

假设空间中一简单封闭平滑曲面 S , 它包含体积 V , (ξ, η, ζ) 为曲面 S 上的点, $\bar{n}$ 为曲面 S 上在点 (ξ, η, ζ) 处的外法线, $\mathbf{r}$ 为连接点 (ξ, η, ζ) 和点 (x, y, z) 的矢径, 即 $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$, 则我们可以用以下积分 [12] 定义点 (x, y, z) 的庞加莱指数

$$I(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} dS, \quad \text{运用高斯公式可以证明}$$

该积分的结果仅为 0 或 ± 1 , 亦称 I 为环绕点 (x, y, z) 的循环数. 当结果为 0 时, 表明该封闭曲面不包围点 (x, y, z) , 当结果为 ± 1 时, 表明该封闭曲面包围点 (x, y, z) , 符号是由于法线和矢径方向不同造成的.

为计算方便, 我们利用高斯映射 [12] $\gamma: R^3 \setminus \{0\} \rightarrow S^2, \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ 可以将曲面 S 限制在单位球面上. 在本文研究中我们判断是否存在磁场为零的点, 即仅需判断映射后的曲面是否包含球心的问题.

由上所知, 应用该方法需要在空间中已知由某种物理量构成的封闭曲面. 2000 年发射的 Cluster 卫星簇在空间中构成四面体, 同一时刻由它测得的磁场数据形成了空间封闭曲面, 我们可以运用上述方法计算在某时刻是否观测得到磁场零点. 将空间四面体转换到单位球面上可以由下面示意图 2 直观显示 [12].

在单位球面上, 环绕球心(磁场为零)的循环数(Poincaré 指数)为

$$I = \frac{1}{4\pi} \iint_S \cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) dS = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^4 \text{Sign}(S_i) \cdot S_i,$$

其中 S_i 为空间四面体三点映射到球面上三点所围成的球面三角形面积, $\mathbf{n}$ 为映射后四面体各表面的外法线, 显然, 它与 $\mathbf{r}$ 是平行关系, 所以 $\text{Sign}(S_i) = \cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = \pm 1$.

将上节内容综合起来, 我们可以用表 1 表示该方法和磁场零点几何结构 [2] 相关特征.

该方法可以判断零点的存在, 然后通过梯度矩阵特征值特征向量重构出零点附近磁场几何结构. 另外, 我们将方程(1)线性 [4] 展开可知:

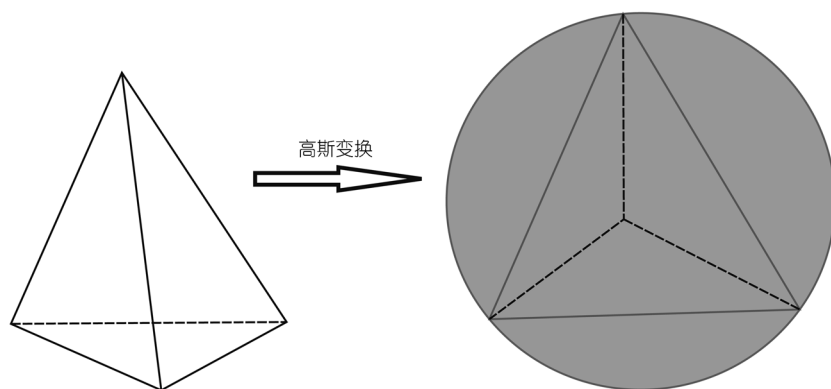


图 2 空间四面体转换为单位球简图

表 1^{a)}

特征值	特征向量	γ 线(spine)	Σ 面(fan surface)法线	类型及庞加莱指数
$\lambda_1, \lambda_2 < 0; \lambda_3 > 0$	$v_1; v_2; v_3$	v_3	$v_1 \times v_2$	A 型, index=1
$\lambda_1, \lambda_2 > 0; \lambda_3 < 0$	$v_1; v_2; v_3$	v_3	$v_1 \times v_2$	B 型, index=-1
λ_1, λ_2 共轭; $\lambda_3 > 0$	$v_1; v_2; v_3$	v_3	$u_1 \times u_2$, 其中 $u_1 = v_1 + v_2; u_2 = -i(v_1 - v_2)$	As 型, index=1
λ_1, λ_2 共轭; $\lambda_3 < 0$	$v_1; v_2; v_3$	v_3	$u_1 \times u_2$, 其中 $u_1 = v_1 + v_2; u_2 = -i(v_1 - v_2)$	Bs 型, index=-1

a) 表中未考虑有零特征根的情况, 当梯度矩阵出现零特征根时, 此时零点退化为二维或者一维情况, 具体参考Parnell等^[2]

$$\begin{cases} B_x = \frac{\partial B_x}{\partial x} \bigg|_{r_0} (x - x_0) + \frac{\partial B_x}{\partial y} \bigg|_{r_0} (y - y_0) + \frac{\partial B_x}{\partial z} \bigg|_{r_0} (z - z_0) \\ B_y = \frac{\partial B_y}{\partial x} \bigg|_{r_0} (x - x_0) + \frac{\partial B_y}{\partial y} \bigg|_{r_0} (y - y_0) + \frac{\partial B_y}{\partial z} \bigg|_{r_0} (z - z_0), \\ B_z = \frac{\partial B_z}{\partial x} \bigg|_{r_0} (x - x_0) + \frac{\partial B_z}{\partial y} \bigg|_{r_0} (y - y_0) + \frac{\partial B_z}{\partial z} \bigg|_{r_0} (z - z_0) \end{cases} \quad (2)$$

该方程组有 δB 矩阵的 9 个未知分量和零点位置 (x_0, y_0, z_0) 3 个分量共 12 个未知量构成, 如果梯度矩阵满秩(即有逆矩阵存在), 我们可以将上述方程组转换为关于这些未知量的线性方程组. 而 ClusterII 卫星簇中每颗卫星同时测得的磁场和位置数据可以组成 3 个方程, 四颗卫星刚好组成 12 个方程, 于是通过求解线性方程组可以得出磁场零点位置, 进而估算出磁场零点的运动速度.

2 扩散区中 3-D 磁场零点典型事例分析

我们对磁场尾部和磁层顶部重联扩散区中磁零点结构做了大量统计研究和分析. 本文主要集中分析 2001 年 10 月 08 日发生的磁场重联事件.

Cluster 卫星在地球磁尾 $X = -15.4 Re$, $Y = 9.6 Re$, $Z = 0.087 Re$ (GSM), 四颗卫星大约相距 2000 ~ 2250

km. 图 3 给出了磁场 3 个分量(FGM)和等离子体速度 x 分量(CIS)的变化情况(磁场数据精度为 44 ms, 流速精度为 4 s). 从图 3 可以看出, 在 12:52UT ~ 12:59UT, Cluster 不断穿越电流片, 并探测到等离子体速度由尾向流变为地向流^[13].

图 4 表明 Sc1 和 sc4 在反流区附近磁场的 x 分量和 y 分量的变化满足 Hall 电流产生的四级结构^[14~16].

图 3 中 Poincaré 指数表明在磁场重联扩散区附近存在多个零点. 考虑实际的物理背景要求 $|\nabla \cdot B|/|\nabla \times B|$ 必须足够小, 本文主要讨论在 12:54:01 和 12:54:04 期间的一对正负零点. 在 12:54:01.832 ~ 12:54:03.616 时间段内指数为 1, 12:54:04.106 ~ 12:54:04.686 时间段内指数为 -1, 根据文中前面的结论, 这两个零点属于不同类型. 下面我们分别对它们的性质作详细讨论.

(1) 12:54:01.832 ~ 12:54:03.616
利用最小二乘方法^[17]计算梯度得到

$$\nabla B = \begin{pmatrix} 0.001402 & -0.0019746 & 0.005448 \\ -0.000728 & -0.001562 & 0.000874 \\ -0.001677 & -0.003509 & 0.0001584 \end{pmatrix},$$

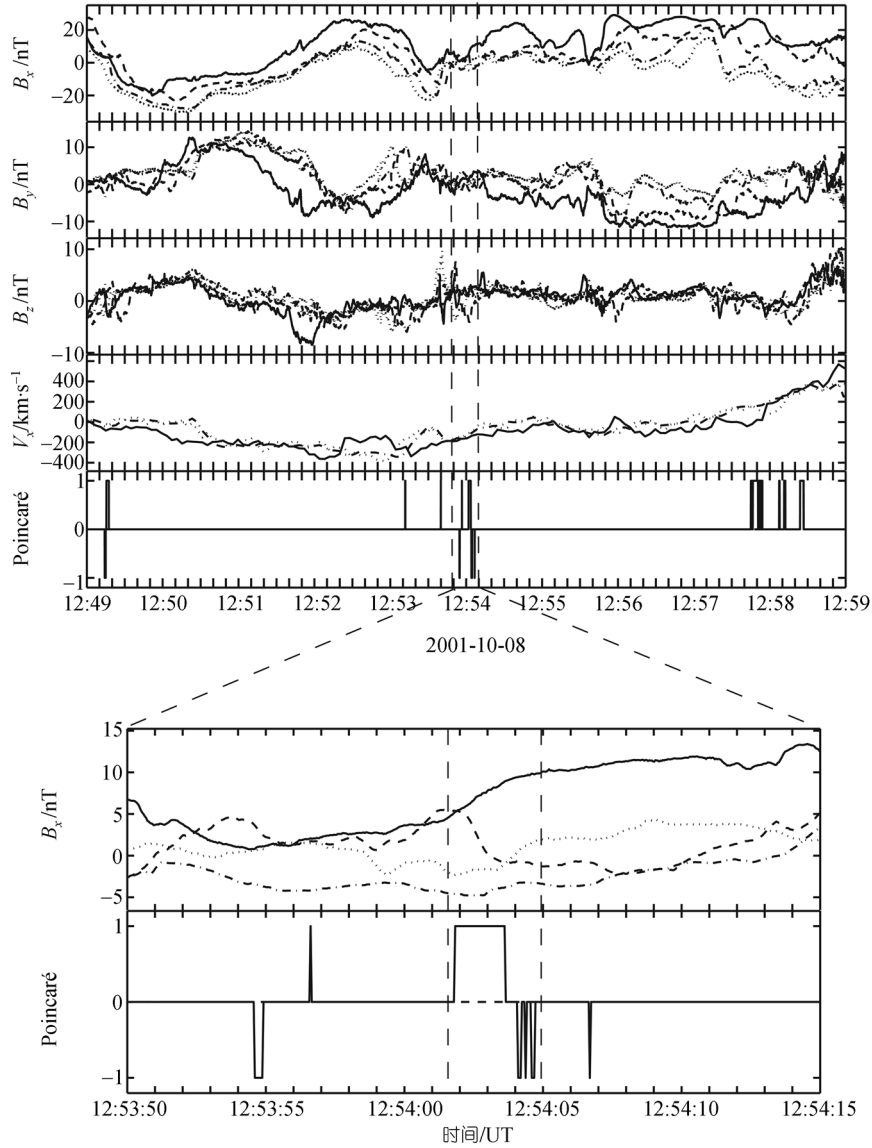


图3 2001年10月8日 Cluster 在 12:49:00UT~12:59:00UT 时间段的观测数据

从上至下依次为磁场 x, y, z 3 个分量, 等离子体速度 x 方向分量, Poincaré 指数. 最下面为黑色竖线之间的时间展开图, 包括磁场 x 分量和 Poincaré 指数. 下图黑色矩形框标记本文研究的零点. —, C1; — —, C2; - - - - -, C3; - · - · - · -, C4

该时间段散度为 -1.81×10^{-6} , 并且计算梯度总的相对误差 $|\nabla \cdot \mathbf{B}|/|\nabla \times \mathbf{B}| = 0.02\%$, 所以我们认为该数学方法在此处计算的零点值是可靠的 [9,18,19]. 该矩阵的特征值为 $\lambda_1 = 0.000693$, $\lambda_2 = -0.000348 + 0.00299i$, $\lambda_3 = -0.000348 - 0.00299i$, 由表 1 可知为 As 型零点, 其 spine 方向为 $(0.887 \ -0.385 \ -0.255)$, fan 平面法线为 $(0.1848 \ -0.8709 \ 0.4555)$, 它们之间的夹角 $\theta = 22.5^\circ$, 利用方程组(2)得到零点位置如图 5 所示, 估算出零点运动速度大小约为 1088.56 km/s.

(2) 12:54:04.106 ~ 12:54:04.686

类似地, 我们计算该时间段的梯度矩阵为

$$\nabla \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0.0015775 & -0.0033236 & 0.0050593 \\ 0.00026455 & -0.0013912 & 0.00058304 \\ -0.0010005 & -0.0023571 & -0.0000179 \end{pmatrix},$$

散度 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 1.69 \times 10^{-4}$, 其计算梯度总的相对误差 $|\nabla \cdot \mathbf{B}|/|\nabla \times \mathbf{B}| = 2.2\%$, 该矩阵的特征值为 $\lambda_1 = -0.000974$, $\lambda_2 = 0.000571 + 0.00243i$, $\lambda_3 = 0.000571 - 0.00243i$, 可知为 Bs 型, spine $(-0.59 \ 0.506 \ 0.63)$,

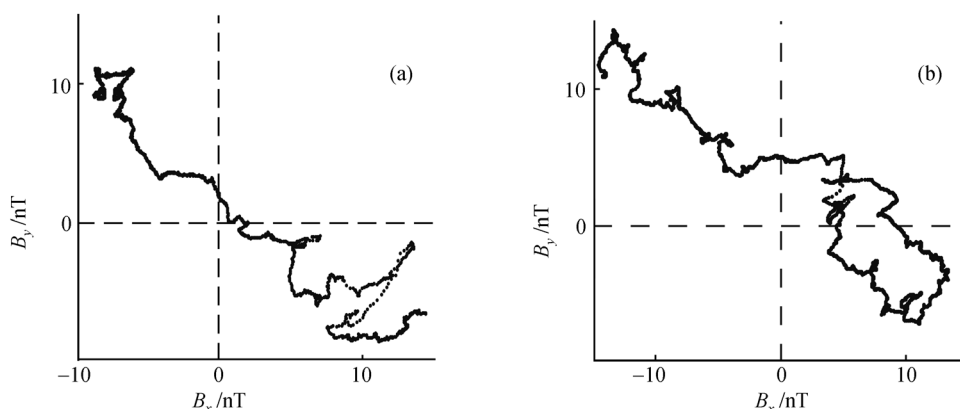


图4 穿越电流片时 Sc1 和 sc4 观测到的磁场的 Hall 四级结构

(a) C1 卫星在 12:50:30~12:52:00 期间的磁场 x 分量与 y 分量的对应关系图. (b) C4 卫星在 12:51:00~12:53:00 期间磁场 x 分量和 y 分量的对应关系图

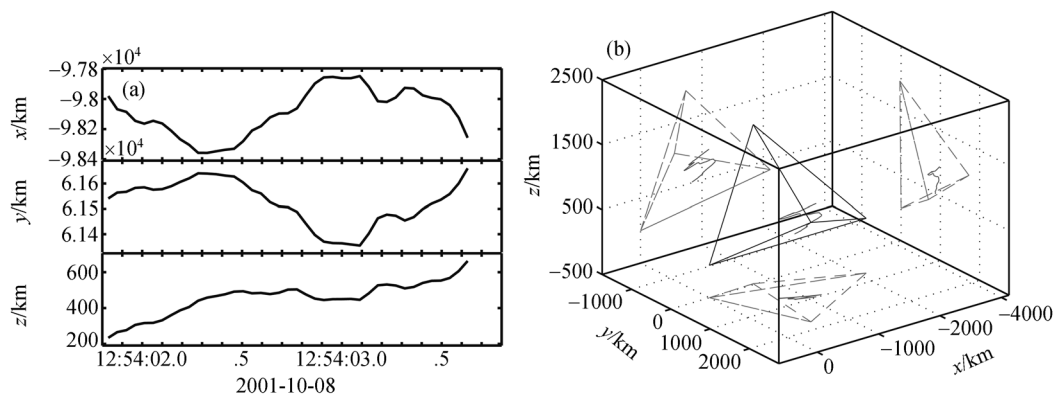


图5 零点运动位置和轨迹

(a) 为零点在这段时间内 x, y, z 方向上的移动位置; (b) 为零点在四面体内的移动轨迹三维图以及各个面上的投影

fan 平面法线 $(0.1108 \ -0.9936 \ 0.0197)$, 它们之间的夹角 $\theta = 33.7^\circ$. 同样零点位置和轨迹如图 6 所示, 运动速度估算为 1502 km/s.

计算表明 As 型零点 spine 线与 Bs 型零点 fan 平面的夹角为 28° , Bs 型零点 spine 线与 As 型零点 fan 平面的夹角为 15° . 如果 As 和 Bs 是可能的一对零点, 理论上预言的双零点结构的一个零点 spine 线与另一个零点 fan 平面的夹角为应接近零度^[9]. 由于我们在计算 spine 轴和 fan 面均假设其为简单的直线和二维平面结构, 而 fan 面可以为空间中任意二维流形^[11], spine 也可以为空间曲线, 这样平面的假设与真实情况存在一定偏差; 其次计算过程中的误差也会产生夹角; 最后因为卫星并不是同一时刻观测到两个零点结构, 它们之间存在一个时间差, 在该段时间内零点的结构可能在变化, 可

能也导致观测到的角度有偏差.

3 结论与讨论

磁零点研究对深入理解三维磁场重联微观过程有着至关重要的作用, Cluster 星簇提供的空间四点探测数据, 为研究磁场重联中奇异点磁场位形结构提供了机遇. 我们将数学上判断奇异点的方法结合到空间多点磁场观测数据, 研究了磁场重联扩散区中磁零点结构, 通过计算零点位置和轨迹, 估算了其运动速度和轨迹. 研究表明在磁场重联扩散区存在磁零点和可能的双零点磁结构. 当计算的 Poincaré 指数中间从 -1 到 +1 的过程中出现了值为 0 的时刻, 分析这几个时刻发现, 计算得到的磁场散度和梯度的大小与值为 -1 的时刻十分接近. 当 Poincaré 指数为 -1 或 +1 时, 零点位于卫星四面体内; 当 Poincaré 指数为 0

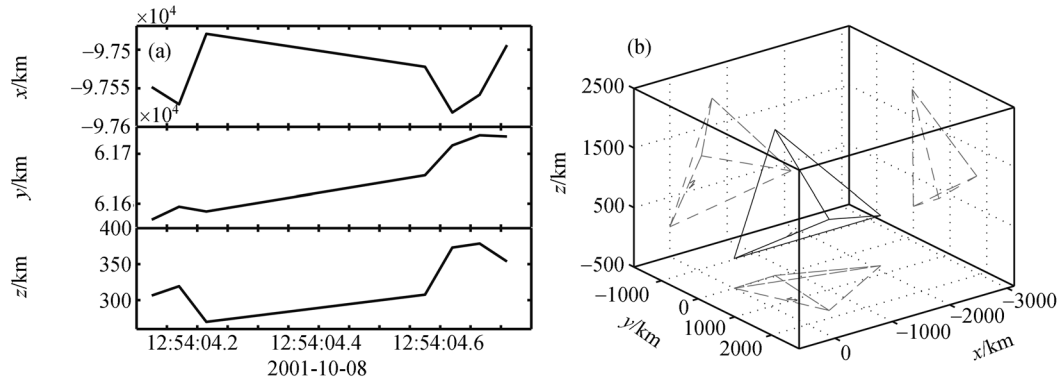


图6 零点运动位置和轨迹

(a) 为零点在这段时间内 x, y, z 方向上的移动位置; (b) 为零点在四面体内的移动轨迹三维图以及各个面上的投影

的时, 我们认为该时间段磁零点仍存在, 但靠近四颗卫星构成的四面体的某一个面, 由于零点的运动在某些时刻落在了卫星四面体外, 因此 Poincaré 指数为零. 图6右中零点的运动轨迹图初步证实了这种想法.

Priest等人^[13,20]根据零点附近磁力线的运动特征提出了三种零点重联模型, 即spine重联, fan重联和separator重联. Spine重联模型中电流沿spine轴. 而在fan重联模型中电流在fan面内. Separator重联模型考虑一对由separator(即零点-零点连线)连接的零点, 此时电流沿separator线. 其中separator线是两个fan面的交线构成, 当fan面为空间曲面时, separator线也为空间曲线, 并不是一般情况下简单的直线结构. 我们初步结合由磁场旋度得到的电流来判断在零点处磁场重联类型. 我们计算了2001年10月08日事件中关注时间段的电流, 得到As型零点spine方向与电流的夹角为 41° , fan面法线方向与电流的夹角为 33° ; Bs型零点spine方向与电流的夹角为 14° , fan面法线方向与

电流的夹角为 35° . 上述结果表明该事件观测到的零点周围发生的磁场重联似乎并不是理论上预期的这三种重联中的任何一种. 当同时存在平行和垂直于spine的电流时, 零点附近的磁场重联应该包含上述几种磁场重联的特征^[21]. 由于在计算磁零点和电流密度时, 利用了线性假设, 因此得到的电流并不一定准确. 而且对于真正的磁场重联零点而言, 周围的等离子体流应该也存在一个奇异点. 在非稳态的情况下, 由于磁场与等离子体流场之间的相互作用, X型点的空间位置将随着时间而改变, 由磁场重联形成的磁岛和等离子体团也随时间而运动. 此外, 三维非稳态的磁场重联还可以形成磁通量绳. 因此结合计算机模拟和卫星观测, 深入研究磁场重联扩散区中关于零点和多零点结构和相互关系, 伴随零点的粒子的加速和波动过程及其与磁场重联的内在联系, 对理解和揭示三维磁场重联的物理实质和微观与耦合过程具有十分重要的意义.

致谢 数据处理在AMD平台进行.

参考文献

- 1 Lau Y T, Finn J M. Three-dimensional kinematic reconnection in the presence of field nulls and closed field lines. *Astrophys J*, 1990, 350: 672—691 [\[DOI\]](#)
- 2 Parnell C E, Smith J M, Neukirch T, et al. The structure of three-dimensional magnetic neutral points. *Phys Plasmas*, 1996, 3(3): 759—770 [\[DOI\]](#)
- 3 Priest E R, Titov V S. Magnetic reconnection at three-dimensional null points. *Phil Trans R Soc Lond A*, 1996, 354(1721): 2951—2992 [\[DOI\]](#)
- 4 Wang H, Wang J X. Two-dimensional magnetic singular points and flares in solar active regions. *Astron Astrophys*, 1996, 313: 285—296

- 5 Zhao H, Wang J, Zhang J, et al. A new method of identifying 3D null points in solar vector magnetic fields. *Chin J Astron Astrophys*, 2005, 5: 443—447[DOI]
- 6 Cai D S, Li Y T, Ichikawai T, et al. Visualization and criticality of magnetotail field topology in a three-dimensional particle simulation. *Earth Planets Space*, 2001, 53: 1011—1019
- 7 Dorelli J C, Bhattacharjee A, Raeder J. Separator reconnection at Earth's dayside magnetopause under generic northward interplanetary magnetic field conditions. *J Geophys Res*, 2007, 112, doi: 10.1029/2006JA011877
- 8 Greene J. Locating three-dimensional roots by a bisection method. *J Comput Phys*, 1992, 98: 194—198[DOI]
- 9 Xiao C J, Wang X G, Pu Z Y, et al. *In situ* evidence for the structure of the magnetic null in a 3D reconnection event in the Earth's magnetotail. *Nature Phys*, 2006, 2: 478—483[DOI]
- 10 Xiao C J, Wang X G, Pu Z Y, et al. Satellite observations of separator-line geometry of three-dimensional magnetic reconnection. *Nature Physics*, 2007, 3: 609[DOI]
- 11 Greene J. Geometrical properties of three-dimensional reconnecting magnetic fields with nulls. *J Geophys Res*, 1988, 93: 8583—8590[DOI]
- 12 Arth C, Tricoche X, Scheuermann G. Tracking of vector field singularities in unstructured 3D time-dependent datasets. In: *Proceedings of IEEE Visualization*, 2004. 329—336
- 13 Deng X H, Matsumoto H, Kojima H, et al. GEOTAIL encounter with reconnection diffusion region in the Earth's magnetotail: Evidence of multiple X-lines collisionless reconnection. *J Geophys Res*, 2004, 109, A05206, doi: 10.1029/2003JA010031[DOI]
- 14 Pritchett P L. Geospace Environment Modeling magnetic reconnection challenge: Simulation with a full particle electromagnetic code. *J Geophys Res*, 2001, 106: 3783—3798[DOI]
- 15 Runov A, et al. Current sheet structure near magnetic X-line observed by Cluster. *Geophys Res Lett*, 2003, 30, doi: 10.1029/2002GL016730[DOI]
- 16 Øieroset M, Phan T D, Fujimoto M, et al. *In situ* detection of collisionless reconnection in the Earth's magnetotail. *Nature*, 2001, 412—414
- 17 Harvey C C. *Analysis Methods for Multi-Spacecraft Data*. 1998(ESA Publications Division, Noordwijk): 307—322
- 18 Chanteur G. *Analysis Methods for Multi-Spacecraft Data*. 1998(ESA Publications Division, Noordwijk): 349—369
- 19 Khurana K K, Kepko E L, Kivelson M G, et al. Accurate determination of magnetic field gradients from four-point vector measurements—: Use of natural constraints on vector data obtained from four spinning spacecraft. *IEEE Trans Magn*, 1996, 32: 5193—5205[DOI]
- 20 Priest E R, Horning G, Pontin D I. On the nature of three-dimensional magnetic reconnection. *J Geophys Res*, 2003, 108, doi: 10.1029/2002JA009812[DOI]
- 21 Pontin D I, Horing G, Priest E R. Kinematic reconnection at a magnetic null point: spine-aligned current. *Geophys Astrophys Flu Dynam*, 2004, 98: 407—428[DOI]