

直齿圆柱齿轮弯曲强度等几何分析

薛雨彤^{1,2}, 赵 罡^{1,2}, 王爱增^{1,2}, 何 川^{1,2}

(1. 北京航空航天大学机械工程及自动化学院, 北京 100191;
2. 北京航空航天大学虚拟现实技术与系统国家重点实验室, 北京 100191)

摘 要: 齿轮作为一种重要的机械零件, 其设计与制造直接影响着机械设备的实际性能与工作质量。由于齿轮的工作寿命与齿轮的最大弯曲应力的六次方成反比, 因此精准地计算齿轮齿根的弯曲强度, 是延长其使用寿命的必要保证。为了更精准地实现齿轮的弯曲应力的求解计算, 本文提出了基于等几何法的齿轮弯曲强度分析算法, 实现了对平面齿轮结构力学性能的等几何分析, 给出了对二维平面直齿圆柱齿轮的齿根弯曲强度的等几何分析计算结果。将该方法的计算结果与传统齿根弯曲应力计算公式的理论值、基于有限元法的分析结果进行对比, 结果表明等几何分析技术在分析齿轮齿根弯曲应力时具有较高的精度和效率, 且与有限元法所得应力场相比, 其应力场更光滑, 从而为求解齿轮齿根弯曲强度问题提供一种有效的方法。

关 键 词: 等几何分析; 有限元分析; 齿轮弯曲强度; 非均匀有理B样条; 线弹性分析

中图分类号: TP 391

DOI: 10.11996/JGj.2095-302X.2022010079

文献标识码: A

文章编号: 2095-302X(2022)01-0079-06

Isogeometric analysis of bending strength of spur gear

XUE Yu-tong^{1,2}, ZHAO Gang^{1,2}, WANG Ai-zeng^{1,2}, HE Chuan^{1,2}

(1. School of Mechanical Engineering & Automation, Beihang University, Beijing 100191, China;
2. State Key Laboratory of Virtual Reality Technology & Systems, Beihang University, Beijing 100191, China)

Abstract: As an important mechanical part, gear is widely applied in all kinds of mechanical equipment, and its design and manufacture directly affect the actual performance and work quality of mechanical equipment. Since the working life of the gear is inversely proportional to the sixth power of the maximum bending stress value of the gear, accurate calculation of the bending strength of the gear root is a necessary guarantee to extend its service life. In order to address the bending stress of the gear more accurately, this paper proposed an algorithm of gear bending strength analysis based on isogeometric analysis method, which provided the isogeometric analysis of the mechanical properties for the two-dimensional gear structure. Compared with the traditional calculation formula of tooth root bending stress and the finite element method, our results show that the isogeometric analysis approach is of higher accuracy and efficiency in analyzing the bending stress of the gear tooth root. Compared with the stress field obtained by the finite element method, the result by the isogeometric analysis is smoother, which provides an effective method for solving the bending strength problem of gear root.

Keywords: isogeometric analysis; finite element analysis; gear bending strength; non uniform rational B-spline; linear elastic analysis

收稿日期: 2021-06-23; 定稿日期: 2021-07-19

Received: 23 June, 2021; Finalized: 19 July, 2021

基金项目: 国家自然科学基金项目(61572056); 工信部2017民用飞机专项科研技术研究项目

Foundation items: National Natural Science Foundation of China (61572056); 2017 Special Scientific Research on Civil Aircraft Project

第一作者: 薛雨彤(1999-), 女, 硕士研究生。主要研究方向为等几何分析。E-mail: xyt18811733395@163.com

First author: XUE Yu-tong (1999-), master student. Her main research interest covers isogeometric analysis. E-mail: xyt18811733395@163.com

通信作者: 王爱增(1982-), 男, 副教授, 博士。主要研究方向为几何造型、CAE等。E-mail: azwang@buaa.edu.cn

Corresponding author: WANG Ai-zeng (1982-), associate professor, Ph.D. His main research interests cover geometry processing, CAE, etc.

E-mail: azwang@buaa.edu.cn

齿轮作为机械传动中重要的零件之一,被广泛应用于工业领域。与其他传动方法相比,齿轮传动具有较高地传动精度和效率,除此之外齿轮传动还具有传动比精确、传动功率范围大及传动平稳等优点。在实际工作中,由于工作条件较为复杂、工况较为恶劣,所以齿轮零件很容易出现故障。当齿轮的轮齿受载时,齿轮齿根处的弯曲应力是最大的。当轮齿反复受载时,就会在齿根处产生疲劳裂纹,裂纹逐步扩展,最终出现弯曲折断现象。当轮齿受到很大地冲击载荷,可直接导致齿根折断。因此,准确地计算齿轮齿根的弯曲应力就显得十分重要。但由于三维齿轮模型的外形轮廓比较复杂,传统齿根弯曲计算方法的过程繁琐,且无法真实地反映轮齿的应力变化及变形分布情况,所以采用现代分析方法研究齿轮齿根弯曲强度,具有重要的现实意义。

目前,在求解齿轮齿根弯曲强度中应用最广泛的方法是有限元法,但其在仿真过程中仍存在一些问题。传统有限元法中拟合几何模型边界的形函数为拉格朗日插值函数,此种形函数的边界连续性不强,无法准确描述复杂曲面。等几何分析法^[1]作为一种新型的数值近似求解方法,与经典有限元法相比,其在结构力学分析领域存在巨大的优势。在对齿轮进行齿根弯曲强度应力分析时,等几何分析法使用高阶的非均匀有理 B 样条(non uniform rational B-spline, NURBS)基函数代替传统有限元法的拉格朗日基函数,实现了对齿轮模型复杂外形轮廓的精确描述,避免了有限元法因采用分段多项式逼近边界而产生的几何误差,从而大大提高了分析结果的精度。同时,等几何分析法直接结合了 CAD 几何模型,以 NURBS 基函数进行描述时,无需再进行网格划分,从而大大地提高了分析的效率。

目前,对于齿轮这类工程结构中较为复杂的三维几何模型,在等几何分析中的应用还比较少,多是借助软件平台或有限元法进行研究,从而导致齿轮受力分析过程较繁琐、效率较低等问题出现。而采用等几何分析法对其进行研究时就能有效地解决上述问题,并更好地发挥其在几何精确描述与结构力学分析领域的优势。为此,本文将基于等几何分析法研究齿轮结构在给定负载下的齿根受力与变形情况。并将传统齿轮弯曲应力公式计算结果、等几何分析结果和有限元分析结果

进行了对比,以验证等几何分析结果的精准性与高效性。

1 相关工作概述

1.1 齿轮弯曲强度分析

关于齿轮齿根弯曲强度计算的研究一直都是齿轮制造行业的重要课题之一。传统的齿轮齿根弯曲强度分析是建立在经验公式的基础上进行的,其局限性和不确定性日益突出。因此,国内外学者为了更精确地计算负载下齿轮齿根的弯曲强度,针对影响齿轮齿根弯曲强度的因素以及齿轮弯曲折断问题进行了大量的研究。

LEWIS^[2]首次提出齿形系数的概念,并基于应用材料力学中悬臂梁理论,将轮齿视为悬臂梁,推导出了计算齿根弯曲强度的 Lewis 公式;张伟社和冯守卫^[3]将边界法应用于齿根弯曲应力计算,并提出了一种新的齿根应力计算的简化公式;FILIZ 和 EYERCIIOGLU^[4]在模拟接触、分布力和集中力 3 种施载情况下,分别对二维单齿模型进行有限元分析并推导出新的齿根计算公式;VIJAYARANGAN 和 GANESAN^[5]考虑了移动线载荷和冲击载荷 2 种情况,对三维齿轮的齿根弯曲强度进行了有限元分析;高勇^[6]则利用 BP 神经网络预测齿轮的弯曲疲劳强度极限应力,对训练样本参数范围具有很高的精确度。刘本学等^[7]运用 SolidWorks 与 ANSYS Workbench Fatigue Tool 对直齿圆柱齿轮进行弯曲疲劳仿真,并获得了一些具有意义的结论。随着研究的深入,齿轮齿根弯曲应力的计算精度不断提升,但上述方法并未实现精准描述齿轮齿廓,这阻碍了齿轮弯曲应力计算精度和效率的进一步提升。

1.2 等几何分析

等几何方法自 2005 年提出至今,一直是计算力学方面的研究热点,许多学者对该方法进行了大量研究,并对其应用和发展做出了很多贡献。如今等几何分析法已被应用于结构力学、断裂力学、流固耦合、接触问题等领域。

KIENDL 等^[8]基于 NURBS 基函数对 Kirchhoff-Love 壳单元建模,并对不同模型进行等几何分析,证明其适用性;NATARAJAN 等^[9]将比例边界有限元法与等几何分析方法相结合,以解决线弹性断裂力学中的若干问题;BAZILEVS 等^[10]提出一种基于 NURBS 曲线的等几何流固耦合方

法, 并成功将其应用于动脉血流建模和模拟中; BEINSTINGEL 等^[11]利用等几何分析法, 提出一种有效而准确地评估齿轮啮合刚度当前状态的方法, 还通过示例对现有的研究和已建立的软件工具进行测试, 成功地验证了该方法的准确性; 陈龙等^[12]使用等几何分析法进行平面无摩擦接触分析, 针对一对单齿接触的完整齿轮进行了等几何接触分析, 该项研究属于等几何分析技术在非线性分析的应用, 而本文主要实现了对平面齿轮结构力学性能的等几何分析, 属于等几何分析技术在二维线弹性分析的应用。

此外, 等几何分析方法不仅限于应用于上述领域, 还广泛应用于其他领域, 如热力学、生物力学、电磁学等方面。

2 基于 NURBS 的齿轮适分析模型建模

NURBS 是在 B 样条的基础上提出的一种更为灵活的样条形式, 可更精准地描述几何模型。在构造 NURBS 曲面时, 首先需要给定曲面包含的 2 个方向的节点矢量、控制点和权因子等信息, 然后求解 B 样条的基函数, 并将其带入式(2)求解 NURBS 的曲面基函数, 最后通过式(1)得到 NURBS 曲面, 即

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) P_{i,j} \quad (1)$$

$$R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) w_{i,j}}{\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m N_{k,p}(\xi) M_{l,q}(\eta) w_{k,l}} \quad (2)$$

其中, ξ 方向的节点矢量为 $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$; η 方向的节点矢量为 $H = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m+p+1}\}$; 权重为 $w_{i,j}$; 控制点为 $P_{i,j}$ 。

本文采用二次 NURBS 曲面构建二维齿轮适分析模型。首先基于齿轮渐开线生成原理建立齿轮 CAD 模型, 并选用 CATIA V5R20 作为三维直齿圆柱齿轮的参数化建模软件, 齿轮模型的基本几何参数见表 1, 所得三维齿轮几何模型如图 1 所示。然后提取齿轮的下端面, 以文本格式保存二维齿轮模型, 并根据模型中包含的控制点和节点矢量等信息实现对二维齿轮模型的重构建, 所得的二维齿轮适分析模型如图 2 所示。

表 1 渐开线齿轮模型的基本几何参数

Table 1 Basic geometric parameters of involute gear model

名称	参数	数值	单位
法面模数	m_n	2	mm
齿数	Z	30	-
齿宽	b	15	mm
分度圆压力角	α_n	20	Deg
齿顶高系数	h_a	1	-
顶隙系数	c	0.25	-
变位系数	x_n	0	-

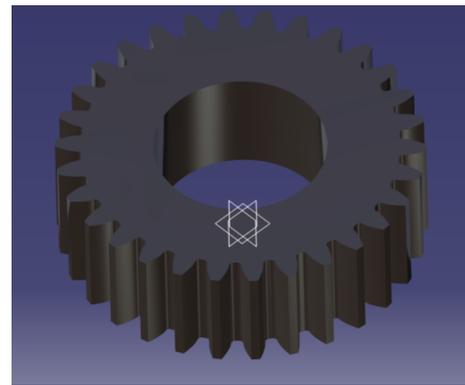


图 1 三维齿轮几何模型

Fig. 1 3D gear geometry model

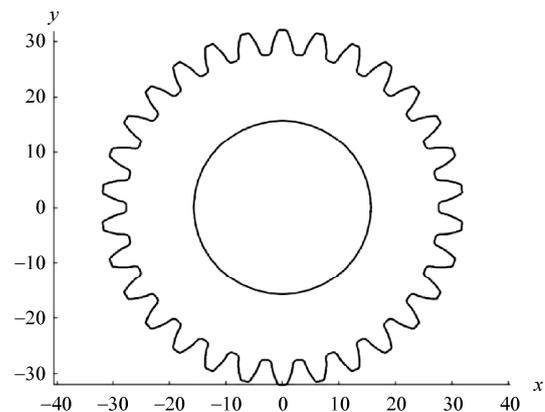


图 2 二维齿轮适分析模型

Fig. 2 2D gear model suitable for analysis

3 基于等几何法的齿轮弯曲强度分析

等几何分析法使用的基本原理是等参元原理, 所以基本框架与经典有限元法相似, 最终 2 种方法均可得到类似的分析结果。而 2 种方法的区别就在于等几何分析以 CAD 中样条理论(如 B 样条、NURBS 等)作为基函数, 且具有非插值性, 取值非负, 所以几何模型的控制点有可能不在实际物理域内, 图 3 为齿轮齿根弯曲强度的等几何分析基本流程图。

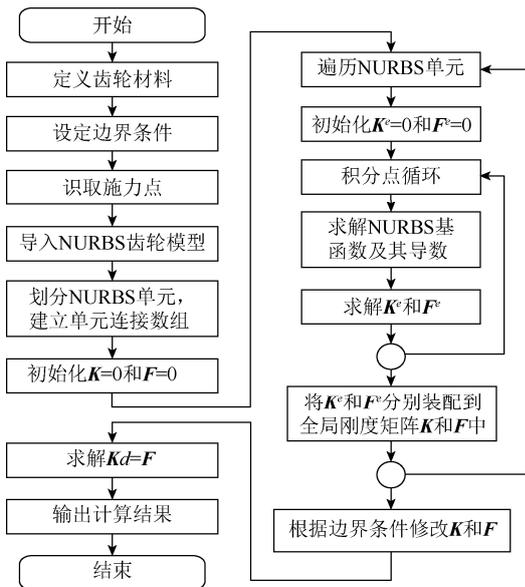


图3 齿轮齿根弯曲强度的等几何分析流程图

Fig. 3 Flow chart of isogeometric analysis of gear tooth root bending strength

本文选择 MATLAB 作为实现齿轮弯曲强度等几何分析的计算机软件。齿轮齿根弯曲强度的等几何分析属于线性静态分析，实现齿轮弯曲强度的等几何分析，首先需要定义齿轮的材料，然后选取齿轮中心孔的控制点为固定边界条件，并选取一个轮齿的齿顶端控制点作为施力点，将均匀负载拆分成圆周力和径向力，分别施加至齿轮齿顶控制点上。之后导入齿轮适分析模型，将齿轮模型的求解域划分为子域，并进行参数化，同时采用节点插入的方法进行网格细分，引入等参概念，计算齿轮模型的基函数，并遍历每个等几何单元，计算其刚度矩阵，将其整合成总体的刚度矩阵，再将之前设定的负载与边界条件带入之，求解得到最终的分析结果，最后输出齿轮适分析模型的等几何应力云图，如图 4 所示。齿轮最大弯曲应力在左侧齿根处，为 141.3 MPa。

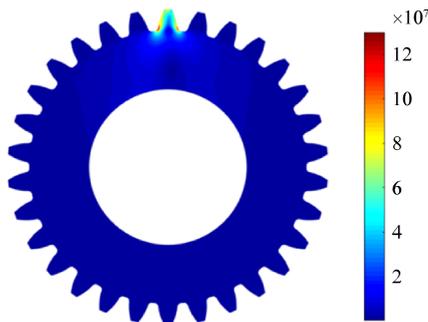


图4 二维齿轮等几何分析应力云图

Fig. 4 2D gear isogeometric analysis stress cloud diagram

4 结果分析与讨论

4.1 传统齿轮弯曲应力算法

目前应用最广泛的齿轮弯曲强度计算是以 Lewis 公式^[2]为基础，后经一系列修正与校核，再添加各种修正系数所发展形成的。

Lewis 公式是以材料力学知识为基础，采用内切抛物线法确定危险截面的位置，并将所有载荷作用于齿顶，从而获得齿轮危险截面弯曲应力，如图 5 所示。由于当弯曲载荷作用在抛物线梁的顶端时，其断面处的最大应力值处处相等。因此可以将内切抛物线与齿廓切点的连线看作轮齿危险截面，并在该截面处考虑轮齿的最大弯曲应力。该方法为后续齿轮弯曲强度奠定了经典理论基础，但由于得到的弯曲应力不够精确，所以学者们在后续研究中，以 Lewis 公式为基础，添加各种修正系数来修正齿轮的载荷和材料强度带来的影响。采用修正系数后的 Lewis 简化式为

$$\sigma_F = \frac{M}{W} = \frac{F_t}{bm} \cdot \frac{6 \left(\frac{h_F}{m} \right) \cos \alpha_F}{\left(\frac{s_F}{m} \right)^2 \cos \alpha} = \frac{F_t}{bm} \cdot Y_{Fa} \quad (3)$$

计入载荷系数 K ，应力修正系数 Y_{Sa} 后的齿轮最大弯曲应力可简化为

$$\sigma_F = \frac{KF_t}{bm} \cdot Y_{Fa} \cdot Y_{Sa} \quad (4)$$

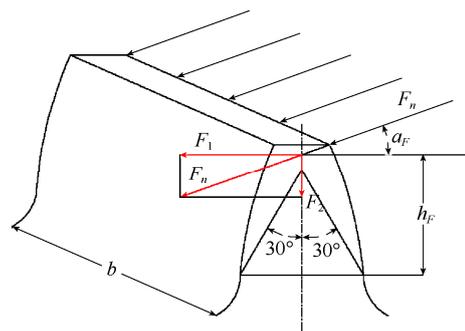


图5 轮齿齿顶端受力示意图

Fig. 5 Force diagram of gear tooth top

根据齿轮传递的转矩计算作用在轮齿上的载荷，圆周力 F_t 作用在端面上，并由齿轮副传递的功率确定，即

$$F_t = \frac{2T}{d} \quad (5)$$

法向力 F_n 均匀作用在轮齿的齿顶端，可由圆周力 F_t 和压力角 α 确定，即

$$F_n = \frac{F_t}{\cos \alpha} \quad (6)$$

假定对齿轮的一个轮齿施加 30 kN·m 转矩, 即等同于在轮齿的齿顶端一侧施加大小为 1 064.17 kN, 压力角为 20° 的均布线载荷 F_n 。齿轮的基本参数见表 1, 齿轮载荷系数为 $K=1.1$, 齿轮齿形系数 $Y_{Fa}=2.52$, $Y_{Sa}=1.625$ 。根据式(4)可以计算得齿轮齿根处最大弯曲应力为 150.15 MPa。

4.2 有限元分析计算结果

本文选用有限元软件 ANSYS Workbench 对齿轮进行齿轮弯曲强度应力分析。定义齿轮材料的弹性模量 $E=2.1 \times 10^5$ MPa, 泊松比 $\mu=0.3$ 。首先采用自由网格划分的方式对齿轮模型进行网格划分, 2 次尺寸分别为 0.2 mm 和 0.1 mm, 网格划分后的一次单元模型的单元数为 9 060, 二次单元模型的单元数为 18 452。接下来施加边界约束条件, 固定齿轮中心孔, 使其在 x, y 方向均不产生位移及旋转。选择静力学分析, 施加与等几何法相同的载荷条件后, 计算得到一次、二次单元齿轮齿根的最大弯曲应力分别为 137.7 MPa 和 139.1 MPa。2 次有限元分析过程的应力云图分别如图 6 和图 7 所示。

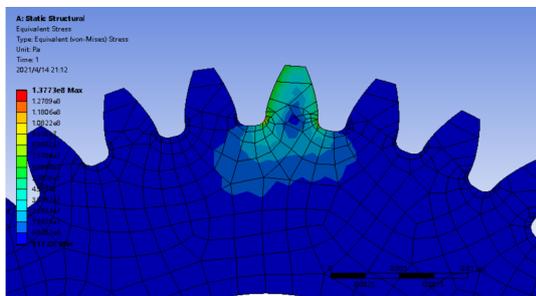


图 6 一次有限元分析应力云图

Fig. 6 The first finite element analysis stress cloud diagram

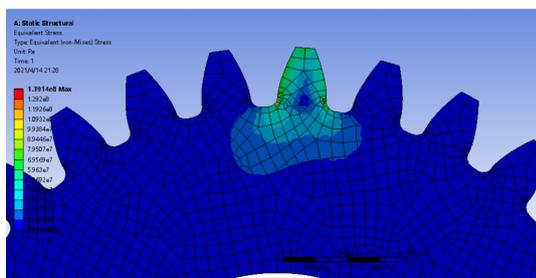


图 7 二次有限元分析应力云图

Fig. 7 The second finite element analysis stress cloud diagram

4.3 3 种方法计算结果比较

比较二次有限元和等几何分析后齿轮应力云

图 6 的分布情况。首先图中红色代表受到应力最大的点, 也称应力危险点, 3 种分析的最大应力点均在齿轮的齿根部位。从齿轮端面颜色变化的梯度看, 总体趋势是从轮齿外轮廓边界开始从黄绿色逐步变成浅蓝色, 各个应力大小变化的区域相似, 只是数值不同, 这也进一步排除了实验的偶然性, 说明 3 次实验结果都是正确的。

同时, 发现二次有限元应力大小变化区域相似, 且应力颜色分布有比较明显地跳跃, 而等几何应力变化整体相对光滑。这是由于构建齿轮等几何模型时采用的 NURBS 曲面的基函数为 C^1 连续, 而构建有限元网格模型时采用的拉格朗日基函数为 C^0 连续, 相比之下等几何分析的基函数更具高阶连续性, 能够更好地描述几何边界, 这在一定程度上避免了有限元分析中因几何模型轮廓面精度不足而导致的网格变形。因此在单元大小相近似时, 等几何法所形成的应力场更光滑连续, 具有更深层次的实际研究意义。

接下来, 本文从具体应力数值上进行对比, 为了便于分析只对齿轮齿根的最大应力值进行比较, 见表 2。

表 2 3 种方法计算的最大应力点数值比较

Table 2 Numerical comparison of maximum stress point calculated by three methods

实验名称	危险点应力值(MPa)
传统齿根弯曲应力计算	150.1
一次有限元分析	137.7
二次有限元分析	139.1
等几何分析	141.3

从表 2 可知, 有限元网格越细密, 模型应力危险点的最大应力会逐渐增大, 也会越趋近于等几何分析结果。这是由于等几何分析可看作将几何模型划分为了无限个单元进行分析, 即网格精度无限高的有限元分析。所以当有限元的网格划分单元越多, 其齿轮最大弯曲应力值也逐渐向等几何分析值收敛。而且对比发现, 传统齿根弯曲应力计算法的结果略大于 3 次实验所得最大应力值, 这是由于 Lewis 公式是基于材料力学中悬臂梁假设进行近似计算的, 不能有效地处理齿根截面突变, 这导致传统齿轮弯曲应力方法计算结果不精确, 所得结果过于安全。

这虽然只是对齿轮齿根的最大危险点进行分析得出的结论, 但结论中 3 张应力云图的颜色区域

变化基本一致,因此可以推广到整个模型分析中。

有限元法作为目前求解齿轮齿根弯曲强度中最有效的数值仿真方法,已在实际工程应用中得到了广泛的普及。但目前有限元分析中仍存在着网格单元划分的低效、费时等问题,有机构曾做过统计,在有限元分析中仅网格模型重构这一步占用的时长就超过了总时间的 50%,而分析过程仅占用了 20%左右。当对高精度大型齿轮模型进行求解时,有限元分析将面临着计算效率低下、计算成本偏高等问题。

除了在实际工作效果方面存在差异性,在总分析时间上的差异也是有限元分析与等几何分析的一个重要区别,等几何分析由于不需要将模型进行网格重构,避免了有限元中网格划分的复杂过程,所以大大缩短了分析时间,齿轮 3 次实验的具体分析时长见表 3。由此,进一步验证了等几何分析在分析效率方面高于有限元分析的结论。

表 3 3 次实验总分析时长比较(s)

Table 3 Comparison of total analysis time of three experiments (s)

实验名称	网格划分时长	分析时间	总时长
一次有限元	20.3	2.5	22.8
二次有限元	29.9	4.3	34.2
等几何分析	-	3.4	3.4

在分析计算齿轮齿根弯曲强度方面,传统有限元法的研究已经相当深入,并在实际工程应用中也得到了广泛应用。而基于等几何法的齿轮弯曲强度分析算法虽在精度与效率方面略有优势,但由于等几何分析技术刚刚起步,目前仍未得到大范围地推广,其操作性也远没有有限元分析技术简便。后续可结合有限元分析技术中现有的理论基础对等几何分析技术进行创新与再开发,期待未来等几何分析技术在齿轮结构力学分析领域取得更大的进步。

5 结束语

本文将等几何分析法运用于平面齿轮的弯曲强度分析,并将分析结果与传统齿轮弯曲应力解析解、有限元软件 ANSYS 计算的齿轮齿根弯曲应力最大值进行比较,验证了等几何分析法的精确性。通过对比有限元法和等几何法的总时长,验

证了等几何分析法的高效性。后续工作将等几何分析法进一步扩展至三维齿轮的弯曲强度分析和齿轮接触分析过程中。

参考文献 (References)

- [1] HUGHES T J R, COTTRELL J A, BAZILEVS Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, 194(39-41): 4135-4195.
- [2] LEWIS W. Investigation of the strength of gear teeth[EB/OL]. [2021-03-12]. <https://www.docin.com/p-1666892635.html>.
- [3] 张伟社, 冯守卫. 齿根应力简化计算方法[J]. *现代机械*, 2003(3): 89-90, 88.
ZHANG W S, FENG S W. Simplistic calculating method for tooth root stress[J]. *Modern Machinery*, 2003(3): 89-90, 88 (in Chinese).
- [4] FILIZ I H, EYERCI O G L U. Evaluation of gear tooth stresses by finite element method[J]. *Journal of Engineering for Industry*, 1995, 117(2): 232-239.
- [5] VIJAYARANGAN S, GANESAN N. A study of dynamic stresses in a spur gear under a moving line load and impact load conditions by a three-dimensional finite element method[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1993, 162(1): 185-189.
- [6] 高勇. 基于 BP 神经网络的齿轮弯曲疲劳强度极限应力计算[J]. *装备制造技术*, 2011(6): 65-68.
GAO Y. Based on BP neural network gear bending Fatigue Limit stress calculation[J]. *Equipment Manufacturing Technology*, 2011(6): 65-68 (in Chinese).
- [7] 刘本学, 郭沛东, 徐科飞, 等. 基于 ANSYS Workbench 的齿轮弯曲疲劳寿命分析[J]. *机械设计与制造*, 2018(2): 139-141, 145.
LIU B X, GUO P D, XU K F, et al. The analysis of the gear bending fatigue life based on the ANSYS workbench[J]. *Machinery Design & Manufacture*, 2018(2): 139-141, 145 (in Chinese).
- [8] KIENDL J, BLETZINGER K U, LINHARD J, et al. Isogeometric shell analysis with Kirchhoff-Love elements[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2009, 198(49-52): 3902-3914.
- [9] NATARAJAN S, WANG J C, SONG C M, et al. Isogeometric analysis enhanced by the scaled boundary finite element method[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2015, 283: 733-762.
- [10] BAZILEVS Y, CALO V M, ZHANG Y, et al. Isogeometric fluid-structure interaction analysis with applications to arterial blood flow[J]. *Computational Mechanics*, 2006, 38(4-5): 310-322.
- [11] BEINSTINGEL A, KELLER M, HEIDER M, et al. A hybrid analytical-numerical method based on Isogeometric analysis for determination of time varying gear mesh stiffness[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2021, 160: 104291.
- [12] 陈龙, 郝婵娟, 汪中厚, 等. 单齿啮合的齿轮接触等几何分析[J]. *机械工程学报*, 2021, 57(3): 107-115.
CHEN L, HAO C J, WANG Z H, et al. Isogeometric analysis of gear with single tooth contact[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2021, 57(3): 107-115 (in Chinese).