Λ 有界变差函数的一些性质

王 斯 雷

(杭州大学)

摘　　要

本文回答了 D. Waterman 于 1976 年提出的一个有关 Λ 有界变差函数的问题，并指出有关 Λ 有界变差函数的富里埃系数的阶可以大大改进. 文中还说明关于 Λ 有界变差函数的绝对收敛条件是太苛刻了，可以建立合理的要求.

一

设 $f(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的实函数，$\{I_n\}$ 是一列互不重叠的区间：$I_n=[a_n, b_n]\subset I=[a, b]$，并写 $f(I_n)=f(b_n)-f(a_n)$. 又设 Λ 表示非降的正数列：$\Lambda=\{\lambda_n\}$，而且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n$ 发散.

定义 1. $I=[a, b]$ 上定义的函数 $f(x)$，如果对于任一列互不重叠的区间 $\{I_n\}$，$I_n\subset I$，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(I_n)|/\lambda_n<\infty, \tag{1.1}$$

那么称 f 是 I 上的 Λ 有界变差函数. 记 $f\in \Lambda BV$，或 $f\in\{\lambda_n\}BV$. 特别，当 $\Lambda=\{n\}$ 时，称 f 为调和有界变差函数，记为 $f\in HBV$.

ΛBV 的概念最早由 Waterman 提出[1]. 在研究一类具有特殊性质的富里埃级数时，可以自然地发现，它们与 HBV 函数类有密切关系[2]. 从 HBV 类可以拓广到 ΛBV 类，显然，当 $\lambda_n=1$ $(n=1, 2\cdots)$ 时，ΛBV 就是通常的有界变差函数类.

ΛBV 类中函数以及它们富里埃级数的一些性质，1972 年以来有不少工作，如文献[1,3-6]

定义 2. 设 $f\in\Lambda BV$，数

$$V(I)=V_\Lambda(f;I)=\sup\{\sum|f(I_n)|/\lambda_n: I_n\subset I\} \tag{1.2}$$

称为 f 在 I 上的 Λ 全变差.

定义 3. 设 $f\in\Lambda BV$，记 $\Lambda_m=\{\lambda_{n+m}\}$，$m=1, 2, \cdots$ 假如

$$V_{\Lambda_m}(f;I)\to 0 \quad (m\to\infty), \tag{1.3}$$

那么称 f 在 Λ 变差下是连续的，并记 $f\in\Lambda BV_c$.

显然，当 $\Lambda=\{1\}$，即 ΛBV 成为通常的有界变差函数类 BV 时，满足定义 3 的函数只

本文 1980 年 6 月 18 日收到.

能是常数. 所以,考虑 Λ 变差下连续的函数时,应当假定 $\lambda_n \uparrow \infty$.

Waterman 在文献 [4] 中提出如下的一个问题: 怎样可以刻划出在 Λ 变差下是连续的函数? 就是说, $f \in \Lambda BV_c$ 的充分必要条件是什么?

下面的定理 1 是它的答案.

定理 1. $f \in \Lambda BV_c$ 的充要条件是,存在一列非降的正数列 $\Lambda^{(1)} = \{\lambda_n^{(1)}\}$, $\lambda_n^{(1)} \uparrow \infty$, $\lambda_n^{(1)} = o(\lambda_n)(n \to \infty)$, 使 $f \in \Lambda^{(1)}BV$, 即

$$\Lambda BV_c = \bigcup_{\Lambda^{(1)} = o(\Lambda)} \Lambda^{(1)}BV \tag{1.4}$$

这里记号 $\Lambda^{(1)} = o(\Lambda)$ 表示数列 $\Lambda^{(1)} = \{\lambda_n^{(1)}\}$ 满足条件

$$\lambda_n^{(1)} = o(\lambda_n) \quad (n \to \infty), \tag{1.5}$$

而 (1.4) 式右方表示关于满足条件 $\Lambda^{(1)} = o(\Lambda)$ 的一切 $\Lambda^{(1)}BV$ 类作并集.

证. 先证充分性. 设 $\lambda_n^{(1)}(n = 1, 2, \cdots)$ 是满足条件 $\lambda_n^{(1)} = o(\lambda_n)$ $(n \to \infty)$ 的一列增加数列. 由条件 $f \in \Lambda^{(1)}BV$, 存在常数 $M > 0$, 使

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(I_n)|/\lambda_n^{(1)} \leqslant M \tag{1.6}$$

对一切不相重叠的区间 $\{I_n\}$ 都成立(见文献 [4] 的定理 1). 今设 $\varepsilon > 0$ 是任意正数, $\{I_n\}$ 是任意一列不相重叠的区间,于是存在 N, 使

$$\lambda_n^{(1)} < \lambda_n(\varepsilon/M) \quad (n \geqslant N), \tag{1.7}$$

故当 $m \geqslant N$ 时,由 (1.6), (1.7) 式得

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(I_n)|/\lambda_{n+m} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon |f(I_n)|/(M \cdot \lambda_{n+m}^{(1)}) \leqslant \frac{\varepsilon}{M} \sum_{n=1}^{\infty} |f(I_n)|/\lambda_n^{(1)} < \varepsilon.$$

由定义 (1.3), 这就是

$$V_{\Lambda_m}(f; I) \to 0 \quad (m \to \infty). \tag{1.8}$$

必要性. 假设 $f \in \Lambda BV_c$, 那么 $f \in \Lambda BV$, 故

$$V_\Lambda(f; I) \leqslant M. \tag{1.9}$$

由 $f \in \Lambda BV_c$ 的定义 ((1.3) 式),必有一列增加的自然数系列 $\{m_k\}$ $(k = 1, 2, \cdots)$, 使

$$m_k/k \uparrow \infty \quad (k \to \infty), \tag{1.10}$$

以及

$$V_{\Lambda_{m_k}}(f; I) \leqslant \frac{M}{2^k} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots), \tag{1.11}$$

这里 $m_0 = 0$. 令 $\Lambda^{(1)} = \{\lambda_n^{(1)}\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 是一列如下定义的正数:

$$\lambda_n^{(1)} = \frac{1}{k} \lambda_n \quad (m_k + 1 \leqslant n \leqslant m_{k+1},\ k = 0, 1, 2, \cdots), \tag{1.12}$$

于是由 (1.10) 及 (1.11) 式,显然有

$$\lambda_n^{(1)} = o(\lambda_n) \quad (n \to \infty), \tag{1.13}$$

以及

$$\lambda_n^{(1)} \uparrow \infty \quad (n \to \infty). \tag{1.14}$$

下面证明 $f \in \Lambda^{(1)}BV$. 事实上,若 $\{I_n\}$ 是 I 内一列不相重叠的区间,于是在 (1.11) 式中,依次令 $k = 0, 1, 2, \cdots$, 我们有

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{|f(I_{m_k+1})|}{\lambda_{m_k+1}}+\frac{|f(I_{m_k+2})|}{\lambda_{m_k+2}}+\cdots+\frac{|f(I_{m_{k+1}})|}{\lambda_{m_{k+1}}}\right)\leqslant M,\\ \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{|f(I_{m_k+1})|}{\lambda_{m_k+1}}+\frac{|f(I_{m_k+2})|}{\lambda_{m_k+2}}+\cdots+\frac{|f(I_{m_{k+1}})|}{\lambda_{m_{k+1}}}\right)\leqslant \frac{M}{2},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sum_{k=\nu}^{\infty}\left(\frac{|f(I_{m_k+1})|}{\lambda_{m_k+1}}+\frac{|f(I_{m_k+2})|}{\lambda_{m_k+2}}+\cdots+\frac{|f(I_{m_{k+1}})|}{\lambda_{m_{k+1}}}\right)\leqslant \frac{M}{2^\nu}.\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\right\}\tag{1.15}$$

把 (1.15) 式中的诸式相加，即得

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{k=\nu}^{\infty}\left(\frac{|f(I_{m_k+1})|}{\lambda_{m_k+1}}+\frac{|f(I_{m_k+2})|}{\lambda_{m_k+2}}+\cdots+\frac{|f(I_{m_{k+1}})|}{\lambda_{m_{k+1}}}\right)\leqslant 2M.\tag{1.16}$$

上式右方即为：

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{k}(\cdots)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{|f(I_{m_k+1})|}{\frac{\lambda_{m_k+1}}{k}}+\cdots+\frac{|f(I_{m_{k+1}})|}{\frac{\lambda_{m_{k+1}}}{k}}\right)\leqslant 2M,\tag{1.17}$$

此即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|f(I_n)|}{\lambda_n^{(1)}}\leqslant 2M.\tag{1.18}$$

由 (1.13), (1.14) 以及 (1.18) 式即得 $f\in \Lambda^{(1)}BV$. 必要性证毕。

二

从现在起，假设 f 是周期为 2π 的周期函数，$I=[0,2\pi]$，并且在 I 上，$f\in \Lambda BV$. Waterman 最近在文献 [5] 中研究了 f 的富里埃系数的阶的大小. 他的结果是这样的.

定理 A. 若 $f\in \Lambda BV$, $\Lambda=\{\lambda_n\}$, 则 f 的富里埃系数

$$\left.\begin{array}{l}a_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos nt\,dt=O\left(\frac{\lambda_n}{n}\right)\quad(n\to\infty),\\ b_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\sin nt\,dt=O\left(\frac{\lambda_n}{n}\right)\quad(n\to\infty).\end{array}\right\}\tag{2.1}$$

我们指出，当 $\lambda_n=n\ (n=1,2,\cdots)$ 时，(2.1) 式右方为 $O(1)$；而当 $\lambda_n=n\lg n$ 时，(2.1) 式右方为无穷大，这是不能令人满意的！我们证明下面的

定理 2. 设 $f\in \Lambda BV$, $\Lambda=\{\lambda_n\}$, 则 f 的富里埃系数

$$\left.\begin{array}{l}a_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos nt\,dt\\ b_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\sin nt\,dt\end{array}\right\}=O\left(\frac{1}{\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\lambda_\nu}}\right)\quad(n\to\infty),\tag{2.2}$$

定理 2 改进了定理 A，这是因为

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\lambda_\nu}\geqslant\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\lambda_n}=\frac{n}{\lambda_n}.$$

另方面，如 $f\in HBV$，则从 (2.2) 式可得

$$\left.\begin{matrix} a_n(f) \\ b_n(f) \end{matrix}\right\} = O\left(\frac{1}{\lg n}\right) \qquad (n \to \infty), \tag{2.3}$$

而从(2.1)式只能得到 $a_n(f) = O(1) = b_n(f)$.

定理 3. 设 $f \in \Lambda BV_c$, $\Lambda = \{\lambda_n\}$, 那么(2.2)式中的O可以改进为o, 即

$$\left.\begin{matrix} a_n(f) \\ b_n(f) \end{matrix}\right\} = o\left(\frac{1}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\lambda_\nu}}\right) \qquad (n \to \infty). \tag{2.4}$$

为了证明定理2, 我们还要建立

定理 4. 设 $f \in \Lambda BV$, $\Lambda = \{\lambda_n\}$, 则f的积分连续模 $\omega(\delta; f)_{L_1}$ 满足如下条件:

$$\omega(\delta; f)_{L_1} = \sup_{|t| \leqslant \delta} \int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x)| dx = O\left(\frac{1}{\sum\limits_{\nu=1}^{[\frac{1}{\delta}]} \frac{1}{\lambda_\nu}}\right) \qquad (\delta \to 0). \tag{2.5}$$

证. 设 $|t| \leqslant 2\pi/n$, 我们有

$$\int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x)| dx = \sum_{j=1}^{n} \int_{(j-1)2\pi/n}^{j2\pi/n} |f(x+t) - f(x)| dx$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \int_0^{2\pi/n} |f(x+t+(j-1)2\pi/n) - f(x+(j-1)2\pi/n)| dx. \tag{2.6}$$

令

$$v_j(t) = \int_0^{2\pi/n} |f(x+t+(j-1)2\pi/n) - f(x+(j-1)2\pi/n)| dx \qquad (j = 1, 2, \cdots, n), \tag{2.7}$$

以及

$$m_i(n) = \begin{cases} i & (1 \leqslant i \leqslant n), \\ i - n & (n < i \leqslant 2n-1), \end{cases} \tag{2.8}$$

则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} v_j(t)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} v_{m_{i+k}(n)}(t). \tag{2.9}$$

故从(2.6)—(2.9)式可得

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i}\right) \int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x)| dx \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^{n} |f(x+t+(m_{i+k}(n)-1)2\pi/n) \\ &\quad - f(x+(m_{i+k}(n)-1)2\pi/n)|/\lambda_i \, dx \end{aligned} \tag{2.10}$$

对于固定的 $k(0 \leqslant k \leqslant n-1)$, 注意到 $|t| \leqslant 2\pi/n$ 以及(2.8)式,区间

$$(x+t+(m_{i+k}(n)-1)2\pi/n, x+(m_{i+k}(n)-1)2\pi/n) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

是不相重叠的,从 $f \in \Lambda BV$ 的定义即得

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} |f(x+t+(m_{i+k}(n)-1)2\pi/n) - f(x+(m_{i+k}(n)-1)2\pi/n)|/\lambda_i \\ &\leqslant V_\Lambda(f; [-2\pi, 4\pi]). \end{aligned} \tag{2.11}$$

但是容易知道[4,定理2]

$$V_\Lambda(f;[-2\pi,4\pi])\leqslant 3V_\Lambda(f;[0,2\pi]), \tag{2.12}$$

故由 (2.8)—(2.10) 式得

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\right)\int_0^{2\pi}|f(x+t)-f(x)|dx\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\frac{6\pi}{n}V_\Lambda(f;[0,2\pi])=6\pi\cdot V_\Lambda(f;[0,2\pi]),$$

$$\int_0^{2\pi}|f(x+t)-f(x)|dx\leqslant\frac{6\pi V_\Lambda(f;[0,2\pi])}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}}\qquad\left(|t|\leqslant\frac{2\pi}{n}\right),$$

即

$$\omega\left(\frac{2\pi}{n};f\right)_{L_1}=\sup_{|t|\leqslant\frac{2\pi}{n}}\int_0^{2\pi}|f(x+t)-f(x)|dx\leqslant 6\pi\frac{V_\Lambda(f;[0,2\pi])}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}}. \tag{2.13}$$

今设 $\delta>0$，且 $\frac{1}{n+1}<\delta\leqslant\frac{1}{n}$，由 (2.13) 式即得

$$\omega(\delta;f)_{L_1}\leqslant\omega\left(\frac{1}{n};f\right)_{L_1}\leqslant 6\pi\frac{V_\Lambda(f;[0,2\pi])}{\sum_{i=1}^{[\frac{1}{\delta}]}\frac{1}{\lambda_i}}, \tag{2.14}$$

此即 (2.5) 式。

定理 5. 设 $f\in\Lambda BV_c$ (见定义 3)，$\Lambda=\{\lambda_n\}$，那么

$$\omega(\delta;f)_{L_1}=o\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{[\frac{1}{\delta}]}\frac{1}{\lambda_i}}\right)\qquad(\delta\to 0). \tag{2.15}$$

证. 由定理 1，存在 $\Lambda^{(1)}=\{\lambda_n^{(1)}\}$，$\lambda_n^{(1)}=o(\lambda_n)$ $(n\to\infty)$，使 $f\in\Lambda^{(1)}BV$，再根据(2.14)式，即得

$$\omega(\delta;f)_{L_1}\leqslant 6\pi\frac{V_{\Lambda^{(1)}}(f;[0,2\pi])}{\sum_{i=1}^{[\frac{1}{\delta}]}\frac{1}{\lambda_i}}=o\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{[\frac{1}{\delta}]}\frac{1}{\lambda_i}}\right)\qquad(\delta\to 0).$$

定理 2，3 的证明. f 的复富里埃系数

$$c_n(f)=a_n(f)+ib_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)e^{int}dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[f(t)-f\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\right]e^{int}dt,$$

故由定理 4，5，

$$2\pi|c_n|\leqslant\int_0^{2\pi}\left|f\left(t+\frac{\pi}{n}\right)-f(t)\right|dt=\begin{cases}O\left(\dfrac{1}{\sum_1^n\frac{1}{\lambda_\nu}}\right) & (f\in\Lambda BV),\\[2ex] O\left(\dfrac{1}{\sum_1^n\frac{1}{\lambda_\nu}}\right) & (f\in\Lambda BV_c).\end{cases} \tag{2.16}$$

证明完毕。

设 $\Lambda=\{\lambda_n\}$，$\Gamma=\{\gamma_n\}$，那么函数类 $\Gamma BV\subset\Lambda BV$ 的充要条件是

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k}=O\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\gamma_k}\right)\qquad(n\to\infty);\tag{2.17}$$

而 $\Lambda BV=\Gamma BV$ 的充要条件是,存在正数 C_1 与 C_2，使

$$0<C_1<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\gamma_k}\Big/\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k}<C_2<\infty,\tag{2.18}$$

这是文献[5]的定理3．我们自然要问,定理2中的估计式(2.2)在阶的意义下是否精确?就是说,当函数类 $\Lambda BV\subset\Gamma BV$，且 $\Lambda BV\neq\Gamma BV$ 时,(2.2)式对函数类 ΓBV 是否仍成立?

定理 6. 设 $\Gamma BV\subset\Lambda BV$，且 $\Lambda BV\neq\Gamma BV$，那么存在函数 $f_0\in\Lambda BV$，而 f_0 的富里埃系数

$$b_n(f_0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f_0(t)\sin nt\,dt\neq O\left(\frac{1}{\sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu}}\right)\qquad(n\to\infty).\tag{2.19}$$

证．由于 $\Gamma BV\subset\Lambda BV$，故从(2.17),(2.18)式知道,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\gamma_k}\neq O\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k}\right).\tag{2.20}$$

所以存在一列自然数 $n_k\uparrow\infty$，使 $n_0=0$，且满足以下三个条件

1) $$\sum_{\nu=n_k+1}^{n_{k+1}}\frac{1}{\gamma_\nu}\geqslant 2^k\sum_{\nu=n_k+1}^{n_{k+1}}\frac{1}{\lambda_\nu}\qquad(k=1,2,\cdots),\tag{2.21}$$

2) $$\sum_{\nu=n_k+1}^{n_{k+1}}\frac{1}{\lambda_\nu}\leqslant\sum_{\nu=n_{k+1}+1}^{n_{k+2}}\frac{1}{\lambda_\nu}\qquad(k=1,2,\cdots),\tag{2.22}$$

3) $$n_{k+1}>2n_k\qquad(k=1,2,\cdots).\tag{2.23}$$

令

$$a_i=\frac{1}{2^{k/2}\sum\limits_{\nu=n_k+1}^{n_{k+1}}\frac{1}{\lambda_\nu}}\qquad(i=n_k+1,n_k+2,\cdots,n_{k+1};\ k=0,1,2,\cdots),\tag{2.24}$$

那么显然 $a_i\downarrow 0$，且

$$\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}}a_i=\frac{n_{k+1}-n_k}{2^{k/2}\sum\limits_{\nu=n_k+1}^{n_{k+1}}\frac{1}{\lambda_\nu}}\qquad(k=0,1,2,\cdots),\tag{2.25}$$

及

$$\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}}\frac{a_i}{\lambda_i}=\frac{1}{2^{k/2}\sum\limits_{\nu=n_k+1}^{n_{k+1}}\frac{1}{\lambda_\nu}}\cdot\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}}\frac{1}{\lambda_i}=2^{-k/2}\qquad(k=0,1,2,\cdots),\tag{2.26}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\lambda_i}\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k/2}}\leqslant A\qquad(A\text{ 是绝对常数}).\tag{2.27}$$

另一方面,由(2.25),(2.21)以及(2.23)式可知,

$$\left(\frac{1}{n_{k+1}}\sum_{i=1}^{n_{k+1}} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n_{k+1}}\frac{1}{\gamma_i}\right) = \frac{1}{n_{k+1}}\left(\sum_{\nu=0}^{k}\sum_{i=n_\nu+1}^{n_{\nu+1}} a_i\right)\cdot\left(\sum_{\nu=0}^{k}\sum_{i=n_\nu+1}^{n_{\nu+1}}\frac{1}{\gamma_i}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{n_{k+1}}\sum_{\nu=0}^{k}\frac{n_{\nu+1}-n_\nu}{2^{\nu/2}\sum\limits_{j=n_\nu+1}^{n_{\nu+1}}\frac{1}{\lambda_j}}\right)\left(\sum_{\nu=0}^{k}\sum_{j=n_\nu+1}^{n_{\nu+1}}\frac{1}{\gamma_j}\right)$$

$$\geqslant \frac{1}{n_{k+1}}\sum_{\nu=0}^{k}\frac{n_{\nu+1}-n_\nu}{2^{\nu/2}\sum\limits_{j=n_\nu+1}^{n_{\nu+1}}\frac{1}{\lambda_j}}\cdot\left(\sum_{\nu=0}^{k}2^\nu\sum_{j=n_\nu+1}^{n_{\nu+1}}\frac{1}{\lambda_j}\right)$$

$$\geqslant \frac{1}{n_{k+1}}\sum_{\nu=0}^{k}\left(\frac{n_{\nu+1}-n_\nu}{2^{\nu/2}\sum\limits_{j=n_\nu+1}^{n_{\nu+1}}\frac{1}{\lambda_j}}\cdot 2^\nu\sum_{j=n_\nu+1}^{n_{\nu+1}}\frac{1}{\lambda_j}\right)$$

$$= \frac{1}{n_{k+1}}\sum_{\nu=0}^{k}(n_{\nu+1}-n_\nu)2^{\nu/2} = \left(1-\frac{n_k}{n_{k+1}}\right)2^{k/2}\to\infty. \tag{2.28}$$

现在定义具有 2π 周期的函数列 $g_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 如下:

$$g_n(x) = \begin{cases} a_i & (2(i-1)\pi/n < x < (2i-1)\pi/n;\ i=1,2,\cdots,n), \\ 0 & (x \text{ 在其余处}). \end{cases} \tag{2.29}$$

$(0, 2\pi)$ 之外,按周期 2π 延拓。

于是,由 $a_n \downarrow 0$, 不难算出,

$$V_\Lambda(g_n; [0, 2\pi]) = \sum_{i=1}^{n} a_i\left(\frac{1}{\lambda_{2i-1}}+\frac{1}{\lambda_{2i}}\right) \leqslant 2\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\lambda_i}, \tag{2.30}$$

而 g_n 的富里埃正弦系数

$$b_n(g_n) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_n(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{n\pi}\int_0^{2n\pi} g_n\left(\frac{t}{n}\right)\sin t\,dt$$

$$= \frac{1}{n\pi}\sum_{k=0}^{2n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} g_n\left(\frac{t}{n}\right)\sin t\,dt = \frac{1}{n\pi}\sum_{k=0}^{2n-1}\int_0^{\pi} g_n\left(\frac{t+k\pi}{n}\right)\sin(t+k\pi)\,dt$$

$$= \frac{1}{n\pi}\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k\int_0^{\pi} g_n\left(\frac{t+k\pi}{n}\right)\sin t\,dt = \frac{2}{n\pi}\sum_{i=1}^{n} a_i \quad (n=1,2,\cdots). \tag{2.31}$$

我们知道[4,§3],如对 $f\in \Lambda BV$, 定义 f 的范数为:

$$\|f\|_{\Lambda BV} = |f(0)| + V_\Lambda(f; [0, 2\pi]), \tag{2.32}$$

那么 ΛBV 组成 Banach 空间,另方面,对于固定的 n, f 的富里埃正弦系数

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin nt\,dt \qquad (n=1,2,\cdots)$$

是定义在 Banach 空间 ΛBV 上的有界线性泛函,所以

$$U_n(f) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\gamma_k}\right) b_n(f) \qquad (n = 1, 2, \cdots) \tag{2.33}$$

是一列有界线性泛函，U_n 的范数是

$$\|U_n\| = \sup_{\|f\|\neq 0} \frac{|U_n(f)|}{\|f\|_{ABV}} \geqslant \frac{|U_n(g_n)|}{\|g_n\|_{ABV}} \tag{2.34}$$

由 (2.32), (2.30), (2.29) 以及 (2.27) 式,

$$\|g_n\|_{ABV} = V_A(g_n;\ (0,\ 2\pi)) = 2\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\lambda_i} \leqslant 2A \qquad (n = 1, 2, \cdots), \tag{2.35}$$

故从 (2.34), (2.33), (2.31) 式得

$$\|U_n\| \geqslant \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\gamma_k}\right) \frac{2}{n\pi} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)}{2\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\lambda_i}} \geqslant \frac{1}{A\pi n}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\gamma_k}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right). \tag{2.36}$$

因此根据 (2.28) 式,

$$\|U_n\| \neq O(1) \qquad (n \to \infty). \tag{2.37}$$

从泛函分析中的共鸣定理,可知存在 $f_0 \in ABV$, 使

$$U_n(f_0) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\gamma_k}\right) \cdot b_n(f_0) \neq O(1),$$

即

$$b_n(f_0) \neq O\left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\gamma_k}}\right), \tag{2.38}$$

定理 6 证毕.

注. 定理 6 说明,对于任意两个函数类 ABV 和 ΓBV, 假如 ΓBV 是 ABV 的真子集, 那么就整类来说, ABV 中函数富里埃系数的阶估计式(2.2)不能以较小的阶 $O\left(1\Big/\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu}\right)$ 来代替. 因此从这个意义上说, (2.2) 式是精确的.

三

Waterman 在文献[1]中研究了 ABV 以及 HBV 类中函数富里埃级数的绝对收敛问题. 他的定理是

定理 B [1,定理4]. 若 $f \in ABV$, $A = \{\lambda_n\}$, 那么级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\frac{1}{2}} n^{-1} \omega^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2\pi}{n}\right) < \infty \tag{3.1}$$

时, f 的富里埃级数 $\mathfrak{S}[f]$ 绝对收敛;假如 $f \in HBV$, 那么级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} \omega^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\pi}{n}\right) < \infty \tag{3.2}$$

时, $\mathfrak{S}[f]$ 绝对收敛,其中 $\omega(\delta)$ 是 f 的连续模.

我们指出，条件(3.2)式太苛刻，因为级数(3.2)是单调下降的正项级数，它的收敛隐含

$$n^{-\frac{1}{2}}\omega^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi}{n}\right)=o\left(\frac{1}{n}\right)\qquad(n\to\infty),$$

即

$$\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)=o\left(\frac{1}{n}\right).\tag{3.3}$$

这样，除常数之外，不可能有函数满足(3.2)式. 其次，假如 $f\in \Lambda BV$，$\Lambda=\{\lambda_n\}$，而 $n=o(\lambda_n)$，那么条件(3.1)更加严格，例如 $\lambda_n=n\lg n$. 此时条件(3.1)式只能对 $\omega\left(\frac{1}{n}\right)=O((n\lg n)^{-1})$ 的函数 f 才有可能成立，这当然是不合理的.

我们先证明

定理 7. 若 $f\in \Lambda BV$，$\Lambda=\{\lambda_n\}$，那么级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\omega\left(\frac{1}{n};f\right)}{n\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\lambda_\nu}}\right)^{\frac{1}{2}}<\infty\tag{3.4}$$

时，$\mathfrak{S}[f]$ 绝对收敛；若 $f\in HBV$，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\omega\left(\frac{1}{n};f\right)}{n\log n}\right)^{\frac{1}{2}}<\infty\tag{3.5}$$

时，$\mathfrak{S}[f]$ 绝对收敛.

证. 设

$$\omega^{(2)}\left(\frac{1}{n};f\right)=\sup_{0\leqslant h\leqslant\frac{1}{n}}\left\{\int_0^{2\pi}[f(x+h)-f(x-h)]^2dx\right\}^{\frac{1}{2}},\tag{3.6}$$

那么 Szasz 定理指出[7,609页]，条件

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\omega^{(2)}\left(\frac{1}{n};f\right)}{\sqrt{n}}<\infty\tag{3.7}$$

隐含 $\mathfrak{S}[f]$ 的绝对收敛. 设 $0\leqslant h\leqslant\delta$，由于

$$\int_0^{2\pi}[f(x+h)-f(x-h)]^2dx\leqslant\max_{x\in[0,2\pi]}|f(x+h)-f(x-h)|\int_0^{2\pi}|f(x+h)-f(x-h)|dx$$
$$\leqslant 2\omega(\delta;f)\cdot 2\omega(\delta;f)_{L_1},$$

故由定理 4，

$$\omega^{(2)}\left(\frac{1}{n};f\right)=O\left(\sqrt{\omega\left(\frac{1}{n};f\right)}\cdot\sqrt{\frac{1}{\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\lambda_\nu}}}\right).\tag{3.8}$$

从而条件(3.7)满足：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\omega^{(2)}\left(\frac{1}{n};f\right)}{\sqrt{n}}=O\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\omega\left(\frac{1}{n};f\right)}{n\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\lambda_\nu}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)<\infty.$$

根据 Szasz 定理，$\mathfrak{S}[f]$ 绝对收敛．定理 7 证毕．

假如 $\Lambda=\{\lambda_n\}$，$\lambda_n=n^\beta$，$0<\beta<1/2$，那么定理 7 尚可改进．

定理 8. 若 $0<\beta<\frac{1}{2}$，$\lambda_n=n^\beta$ $(n=1,2,\cdots)$，$\Lambda=\{\lambda_n\}$，那么当 $f\in \mathrm{Lip}\alpha$ $(\alpha>0)$ 时，$\mathfrak{S}[f]$ 绝对收敛．

证．设

$$\eta_N(t)=\sum_{k=1}^{N}\left|f\left(t+\frac{2k\pi}{N}\right)-f\left(t+\frac{2(k-1)\pi}{N}\right)\right|^2 \qquad (N=1,2,\cdots). \tag{3.9}$$

f 是连续函数，故存在 $t_0\in[0,2\pi]$，使

$$\eta_N(t_0)=\max_{t\in[0,2\pi]}\eta_N(t).$$

设 A 为 Lipschitz 常数，对于固定的非负整数 m，记 $\sigma_m(N)$ $(m=0,1,2,\cdots)$ 为 $k=1,2,\cdots,N$ 中使条件

$$\frac{A}{2^{m+1}}\left(\frac{2\pi}{N}\right)^\alpha<\left|f\left(t_0+\frac{2k\pi}{N}\right)-f\left(t_0+\frac{2(k-1)\pi}{N}\right)\right|\leqslant\frac{A}{2^m}\left(\frac{2\pi}{N}\right)^\alpha \tag{3.10}$$

成立的 k，而相应的个数记为 $|\sigma_m(N)|$．显然，

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sigma_m(N)=N. \tag{3.11}$$

假如对某 m，$|\sigma_m(N)|\neq 0$，那么恰有 $|\sigma_m(N)|$ 个 $k(k=1,2,\cdots,N)$ 使 (3.10) 式成立．把这些相应的不等式相加，得

$$\sum_{k\in\sigma_m(N)}\left|f\left(t_0+\frac{2k\pi}{N}\right)-f\left(t_0+\frac{2(k-1)\pi}{N}\right)\right|>|\sigma_m(N)|\frac{A}{2^{m+1}}\left(\frac{2\pi}{N}\right)^\alpha. \tag{3.12}$$

另一方面，由于 $f\in\Lambda BV$，$\Lambda=\{n^\beta\}$，故

$$\sum_{k\in\sigma_m(N)}\left|f\left(t_0+\frac{2k\pi}{N}\right)-f\left(t_0+\frac{2(k-1)\pi}{N}\right)\right|$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{|\sigma_m(N)|}\frac{\left|f\left(t_0+\frac{2k\pi}{N}\right)-f\left(t_0+\frac{2(k-1)\pi}{N}\right)\right|}{k^\beta}k^\beta\leqslant|\sigma_m(N)|^\beta. \tag{3.13}$$

结合 (3.12), (3.13) 式得：

$$|\sigma_m(N)|^\beta\geqslant|\sigma_m(N)|\frac{A}{2^{m+1}}\left(\frac{2\pi}{N}\right)^\alpha,$$

$$|\sigma_m(N)|\leqslant C\cdot 2^{m/(1-\beta)}N^{\alpha/(1-\beta)},\qquad C=\left(\frac{2}{A(2\pi)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}. \tag{3.14}$$

于是从 (3.9), (3.10) 和 (3.14) 式，

$$\eta_N(t_0)\leqslant\sum_{m=0}^{\infty}|\sigma_m(N)|\frac{A^2}{2^{2m}}\left(\frac{2\pi}{N}\right)^{2\alpha}\leqslant C_1\sum_{m=0}^{\infty}2^{m\left(\frac{1}{1-\beta}-2\right)}N^{\alpha\left(\frac{1}{1-\beta}-2\right)}$$

$$\leqslant C_2N^{\alpha\left(\frac{1}{1-\beta}-2\right)}=C_2N^{\alpha\frac{2\beta-1}{1-\beta}}, \tag{3.15}$$

以上 C_1, C_2, C 都是绝对常数．由

$$\sum_{m=2^k+1}^{2^{k+1}}(a_m^2(f)+b_m^2(f))\leqslant\frac{1}{2\pi}\frac{1}{2^{k+2}}\int_0^{2\pi}\sum_{m=1}^{2^{k+2}}\left[f\left(t+\frac{m\pi}{2^{k+1}}\right)-f\left(t+\frac{(m-1)\pi}{2^{k+1}}\right)\right]^2dt$$

$$\leqslant 2^{-(k+2)} \max_{t\in[0,2\pi]} \eta_{2^{k+2}}(t) \leqslant C_2 \cdot 2^{-k+k\alpha\frac{2\beta-1}{1-\beta}}. \tag{3.16}$$

再由 Cauchy 不等式,

$$\sum_{m=2^k+1}^{2^{k+1}} (|a_m| + |b_m|) \leqslant 2^{k/2}\left\{\sum_{m=2^k+1}^{2^{k+1}} (a_m^2 + b_m^2)\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant C_3 \cdot 2^{k\alpha\frac{2\beta-1}{1-\beta}}. \tag{3.17}$$

注意到 $\beta < \frac{1}{2}$,

$$\sum_{m=1}^{\infty}(|a_m| + |b_m|) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=2^k+1}^{2^{k+1}}(|a_m| + |b_m|) < \infty. \tag{3.18}$$

定理 8 证毕.

最后我们指出,如果 $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha\left(\alpha > \frac{1}{2}\right)$, 那么由熟知的 Bernstein 定理, $\mathfrak{S}[f]$ 绝对收敛, 此时根本不需要其他条件.假如 $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$, 那么定理 8 说明,当 $f \in \Lambda BV$, 而 $\Lambda = \{n^\beta\}$ $\left(0 \leqslant \beta < \frac{1}{2}\right)$时, $\mathfrak{S}[f]$ 绝对收敛,另方面, Hardy-Littlewood 的例子[8,Vol I, 243页]

$$f_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\lg n}}{n} e^{inx} \qquad \in \mathrm{Lip}\,\frac{1}{2},$$

并且 $f_0(x) \in \Lambda BV$, 其中 $\Lambda = \{n^\beta\}$, $\beta > \frac{1}{2}$. 但是 $\mathfrak{S}[f]$ 不绝对收敛,这说明 $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$ 时,条件 $f \in \{n^\beta\}BV$ $\left(\beta > \frac{1}{2}\right)$ 对 $\mathfrak{S}[f]$ 的绝对收敛起不了什么作用.

参　考　文　献

[1] Waterman, D., *Studia Math.*, 44(1972), 107—117; Errata, *ibid.*, **44**(1972), 651.
[2] Goffman, C. & Waterman, D., *J. London Math. Soc.*, **10**(1975), 69—74.
[3] Waterman, D., *Studia Math.*, 55(1976), 97—109.
[4] ——————, *ibid.*, **57**(1976), 33—45.
[5] ——————, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **74**(1979), 119—123.
[6] Perlman, S. & Waterman, D., *ibid.*, 74(1979), 113—118.
[7] Бари, Н., *Тригонометрические ряды*, Москва, 1961.
[8] Zygmund, A., *Trigonometric Series*, Cambridge, 1959.