

在 Markov 模型下的股票大宗交易中的清算问题

张曹津^①, 殷刚^{①*}, 张庆^②

^① Department of Mathematics, Wayne State University, Detroit 48202, USA;

^② Department of Mathematics, The University of Georgia, Athens 30602, USA

E-mail: caojin.zhang@wayne.edu, gyin@math.wayne.edu, qz@uga.edu

收稿日期: 2014-04-18; 接受日期: 2014-12-01; * 通信作者

美国国家科学基金会 (批准号: DMS-1207667) 资助项目

摘要 这项研究得出了股票交易的最佳清算规则. 与现有文献相比, 本文有几个显著特征. 首先, 使用连续时间的 Markov 链构建模型, 以代替 Brown 运动为基础的模型. 其次, 在这项研究中, 本文专注于在大宗股票出售时, 如何寻找最优的清算策略. 本文通过动态规划的方法来解决这个问题. 这种方法将这个问题转化为解一个具有状态约束的 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程的问题. HJB 方程的解析解是很难找到的, 因此, 本文研究这个方程的数值解. 最后, 提供了两个例子作为示范.

关键词 股票清算 Markov 链模型 最优的出售准则 状态约束

MSC (2010) 主题分类 91B26, 91G80, 93E20

1 引言

这项研究是关于大宗股票交易的最优清算原则. 与以往的方法相比, 我们的方法有以下几点不同之处. 第一, 我们不再使用通常基于 Brown 运动的模型 (如几何 Brown 运动模型). 我们提出一个由连续时间 Markov 链构建的模型, 这是在离散系统中, 比二叉树模型更符合实际的一般化. 第二, 我们处理的是大宗股票交易的问题. 这是源于对市场重要参与者的考虑, 他们的行为对市场有重大的影响. 我们的数学形式进而成为一个具有状态约束的优化控制问题. 通过随机控制的方法, 我们得出了最优的清算准则.

1.1 Markov 链模型

基于 Brown 运动的模型 (如几何 Brown 运动、跳扩散过程和切换扩散模型) 已经被广泛地研究, 在大量的文献中可以查到, 如文献 [1-7] 等.

由于控制扩散模型或者其变种的数学处理, 这些模型已被广泛地使用. 然而, 有一种重要的代替方案, 那就是 Cox-Ross-Rubinstein 的二叉树模型 (BTM), 由于在美式期权定价时简单明了的优势, 它被广泛应用于期权定价. 因为方法简单, 这种模型也被广泛应用在真正的市场交易. 但是, BTM 的一个主要缺点是它的非 Markov 性质. Markov 属性的缺乏使得我们难以用数学方法进行研究, 更不用提获得解析解的难度.

最近, Zhang^[8] 提出了有限状态的 Markov 链模型, 以保留 BTM 的简单特性便于数学处理. 在文献 [8] 中的 Markov 链模型适用于不频繁交易的证券等, 如流动性差的股票. 由于它能密切地符合这

英文引用格式: Zhang C J, Yin G, Zhang Q. Liquidation of a large block stock under a Markov chain model (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, 45: 497-514, doi: 10.1360/N012014-00269

种类型的市场的特征, 在相关的应用中, 这种模型是更可取的. 此外, 当各种状态之间的跳跃更加频繁时, 在文献 [8] 中的 Markov 模型与传统的几何 Brown 运动 (GBM) 紧密相连. 这种想法与扩散逼近方法有关. 基于 Markov 链的模型的相关知识可以在文献 [9, 10] 中找到. 其中, 文献 [9] 提出了一个基于股票分红率和 Markov 链噪声的股票价格模型. 文献 [10] 用 Markov 链来表示利率并考虑 Markov 链驱动的市场模型. 特别地, 文献 [10] 中的市场模型和 GBM 的相似之处在于, “飘移” 是由随机跳跃之间的时间间隔近似, 而波动率是由跳跃的次数来近似. Markov 链驱动的一个额外的优点是, 它的价格是处处可微的. 这种可微性在文献 [11] 的最优控制性市场分析中是理想的. 在动态规划的问题中, 由于相关的 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程是一阶的, 对方程的分析要比传统的基于 Brown 运动的模型简单得多.

1.2 大宗股票交易的出售准则

何时卖出股票在股票交易中是十分关键的, 这直接决定何时获利了结或止损. 显然, 这是股票投资人在交易过程中最受情绪影响的部分. 金融市场中的股票出售准则已经被研究了很长时间. 例如, Zhang^[12] 研究了由两个界 (目标价格和止损限额) 确定的出售准则. Guo 和 Zhang^[13] 研究了带有状态切换的 GBM 模型的最优出售准则. 使用光滑切合的方法, 他们能够把问题转化成由一组代数方程确定的最优停时问题.

关于实物期权的问题, 最近, Bensoussan 等人^[14] 证明了从变分不等式得出的最优策略, 且最优策略确实由临界准则给出. 而且, 它是变分不等式在文献 [14] 的唯一解. 随后, 在可变的经济环境下, Bensoussan 等人^[15] 验证了双头垄断博弈中的不可逆的投资策略; 他们通过把时间的灵活性、市场竞争和金融市场的变化整合成状态切换的现金流过程的形式, 进而将问题构建成为基于文献 [15] 中的领导-跟随者竞争模型中的停时策略. 在文献 [12] 中, Zhang 推导出了状态切换的扩散过程的股票交易的最佳清算原则, 而在文献 [8] 中, 研究了一个基于出售策略的 Markov 链模型. 除了这些分析结果, 多种计算这些阈值水平的数学工具已被开发出来了. 例如, Yin 等人^[16] 使用的随机逼近技术和由 Helmes^[17] 开发的线性规划方法. 此外, Merhi 和 Zervos^[18] 根据在 GBM 市场模型下的动态规划, 研究了投资能力的增减问题. 在更一般的市场模型中类似的问题被 Løkka 和 Zervos^[19] 解决. 此外, Du Toit 和 Peskir^[20] 研究了在几何 Brown 运动下如何在峰值出售股票的问题. Henderson 和 Hobson^[21] 研究了在最优或停时控制的框架下的风险规避出售策略. 关于最优停时和金融上的应用的研究在 Peskir 和 Shiryaev^[22] 的书上可以找到.

上述文献有一个共同特点: 一次完成所有销售. 当股份数量相对较小时, 这是可行的. 但是, 如果一下卖出大量的股票通常会导致市场紧缩, 进而导致股票价格下降. 一种典型的卖出大量股票的策略是, 在一段较长的时间里, 每次卖出较少股份. 以 Brown 运动为基础的大量股票出售的规则已有研究. 例如, Pemy 等人^[23-25] 使用随机控制和随机逼近的方法, 研究了基于不同模型的大量股票的出售策略. 特别地, 在清算过程由股票出售的速率主导的意义下, 他们使用了流体模型来处理这个问题. 不同于单一地考虑股票价格, 他们总是考虑一对变量, 即股价和股份, 来获得关于阈值曲线的最优策略.

1.3 本文大纲

本文考虑基于简单且灵活的 Markov 链模型的大量股票出售问题, 并研发解决此问题的数值方法. 股票价格被假定是一个 Markov 链模型而非 Brown 运动为基础模型. 在这种模式下, Markov 链的状态可以基于股票价格的增量进行估计, 这使得 Markov 链是可观测的. 除了它的简单性, 所述 Markov

链模型使我们能够捕捉到更广泛的股票的价格走势. 根据 Markov 链模型, 我们得出最佳的股票出售准则, 并获得相应的阈值曲线. 特别地, 我们采用有限差分的方法来解决相应的动态规划问题, 并获得阈值水平. 本文的其余部分布局如下: 第 2 节提出问题的构建; 第 3 节讨论值函数的性质; 第 4 节提出解决该问题的数值方法; 第 5 节致力于数值试验, 这些实验结果说明了我们的定理.

2 问题的提出

我们用 $X(t)$ 表示股票的价格, 它满足

$$dX(t) = X(t)\mu(\alpha(t))dt, \quad X(0) = x, \quad (2.1)$$

其中 $\alpha(t) \in \mathcal{M} = \{1, 2\}$ 是一个两个状态的连续时间的 Markov 链. 假设 N 是将要出售的股份总量, $Y(t)$ 是在 t 时刻前出售的股份. $u(t)$ 是股票出售的速率. 我们假设任何比例的股份都可以出售. 考虑最大销售率是 1 的情形. 用 $\Gamma = [0, 1]$ 表示控制集. 然后, 我们有

$$dY(t) = u(t)dt, \quad Y(0) = y, \quad u(t) \in \Gamma. \quad (2.2)$$

相应的状态空间: $\Omega = (0, \infty) \times [0, N]$ 和 $\bar{\Omega} = (0, \infty) \times [0, N]$. Markov 链 $\alpha(t)$ 的生成元如下:

$$Q(u) = \begin{pmatrix} -\lambda_1(u) & \lambda_1(u) \\ \lambda_2(u) & -\lambda_2(u) \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

其中 $\lambda_1(\cdot)$ 和 $\lambda_2(\cdot)$ 是适当的非负函数.

假设 2.1 我们假设下面的条件成立,

(A1) $\mu(1)$ 和 $\mu(2)$ 是已知常数, 有 $\mu(1) > \mu(2)$;

(A2) 切换的频率 $\lambda_1(\cdot)$ 和 $\lambda_2(\cdot)$ 如下:

$$\begin{cases} \lambda_1(u) = a_1 u + b_1, & a_1 > 0, \quad b_1 > 0, \\ \lambda_2(u) = -a_2 u + b_2, & a_2 > 0, \quad b_2 > 0, \quad b_2 - a_2 > 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

定义 2.1 我们说一个控制 $u(\cdot)$ 是关于初值 $(x, y, i) \in \bar{\Omega} \times \mathcal{M}$ 是可容许的, 如果

(i) $u(\cdot)$ 是 $\mathcal{F}_t = \sigma\{X(s), \alpha(s) : s \leq t\}$ 适应的;

(ii) $u(t) \in \Gamma$ 对所有的 $t \geq 0$ 成立;

(iii) 对应的状态过程.

$(X(t), Y(t)) \in \Omega$ 对所有的 $t \geq 0$ 成立. 用 $U(x, y, i)$ 表示关于 (x, y, i) 所有可容许的控制的集合.

让 $\rho > 0$ 表示贴现率. 我们假设 $\rho > \mu(1)$ 并定义

$$J(x, y, i, u(\cdot)) = E \left[\int_0^\infty e^{-\rho t} g(X(t), u(t)) dt \mid X(0) = x, Y(0) = y, \alpha(0) = i \right], \quad (2.5)$$

其中 $g(x, u)$ 是运行收益函数.

我们的问题是选择适当的出售速率 $u(\cdot) \in U$ 使得 $J(x, y, i, u(\cdot))$ 得到最大值. 值函数是

$$V(x, y, i) = \sup_{u(\cdot) \in U} J(x, y, i, u(\cdot)). \quad (2.6)$$

一般情形下, HJB 方程系统 (参见文献 [26, 第 A.4 节]) 为

$$\rho V(x, y, i) = \max_{u \in \Gamma} \left[\mu(i)x \frac{\partial V(x, y, i)}{\partial x} + u \frac{\partial V(x, y, i)}{\partial y} + g(x, u) + Q(u)V(x, y, \cdot)(i) \right], \quad (2.7)$$

对于 $0 \leq y \leq N$, $i = 1, 2$, 其中

$$\begin{cases} Q(u)V(x, y, \cdot)(1) = \lambda_1(u)(V(x, y, 2) - V(x, y, 1)), \\ Q(u)V(x, y, \cdot)(2) = \lambda_2(u)(V(x, y, 1) - V(x, y, 2)). \end{cases}$$

关于一般受控扩散过程的 HJB 方程, 参见文献 [7, 27].

3 主要结果

本节介绍本文的主要结果. 首先证明, 对于任何的 i , 值函数是关于 (x, y) Lipschitz 连续. 其次证明, 值函数实际上是 HJB 方程的唯一解. 然后给出边界条件. 最后得出指定的最佳销售的规则. 以下的附加假设在全文中成立,

(A3) 假设 $\rho > \mu(1) > \mu(2)$;

(A4) $g(x, u) = g_0(x)u$ 使得 g_0 是二阶可导的并且 $x(\partial/\partial x)g_0(x)$ 和 $x^2(\partial^2/\partial x^2)g_0(x)$ 是有界的.

注 3.1 一个满足以上假设 (A4) 条件的例子如下: 对于足够大的 κ , 令 $h(x) = \min\{x, \kappa\}$. $g_0(x)$ 为 h 和核

$$q_{\eta_0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_0}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\eta_0^2}\right)$$

的卷积, 那么, 对于足够小的 η_0 , 我们可以用 $g_0(x)$ 逼近 $h(x)$. 在实践中, 所有的股票价格是有限的. 所以, 通过选取足够大的 κ 和足够小的 η_0 , 我们可以用 $g_0(x)$ 来逼近 x .

3.1 值函数的性质

定理 3.2 以下结论成立,

(i) 对于任意的 (x, i) , $V(x, y, i)$ 关于 y 的非增函数;

(ii) 对于任意的 i , $V(x, y, i)$ 是关于 (x, y) Lipschitz 连续的. 也就是说, 存在 K_1 和 K_2 使得

$$|V(x_1, y_1, i) - V(x_2, y_2, i)| \leq K_1|x_1 - x_2| + K_2|y_1 - y_2|$$

对于 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 在 $\bar{\Omega}$ 中成立.

证明 为了验证第一个结论, 令 $i \in \mathcal{M}$. 我们知道 $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq N$, $U(x, y_1, i) \subseteq U(x, y_2, i)$. 给定 $u(\cdot) \in U(x, y_2, i)$, 我们有 $u(\cdot) \in U(x, y_1, i)$, 而且

$$V(x, y_1, i) \geq J(x, y_1, i, u(\cdot)) = J(x, y_2, i, u(\cdot)).$$

因为 $u(\cdot)$ 是任意的, 所以, $V(x, y_1, i) \geq V(x, y_2, i)$. 现在证明第二个结论. 我们知道

$$X(t) = x \exp\left(\int_0^t \mu(\alpha(s))ds\right).$$

对于任意的 $x_1 > 0$ 和 $x_2 > 0$, $U(x_1, y, i) = U(x_2, y, i)$, 对于 $0 \leq y \leq N$ 成立. 令

$$H(t) = \exp \left(\int_0^t \mu(\alpha(s)) ds \right).$$

我们计算 $EX(t) = xEe^{H(t)}$. 由 Dynkin 公式, 我们得到

$$Ee^{H(t)} = 1 + \int_0^t E[e^{H(s)} \mu(\alpha(s))] ds \leq 1 + \mu(1) \int_0^t E[e^{H(s)}] ds.$$

通过 Gronwall 不等式, 可得 $Ee^{H(t)} \leq e^{\mu(1)t}$. 因此, $EX(t) \leq xe^{\mu(1)t}$. 类似地, 我们可以证明,

$$Ee^{-\rho\tau} X(\tau) \leq x \quad (3.1)$$

对于任何的停时 τ 成立. 给定 $x_1 > 0$ 和 $x_2 > 0$, 对于任意的 $u(\cdot) \in U(x_1, y, i) = U(x_2, y, i)$, 我们有

$$|J(x_1, y, i, u(\cdot)) - J(x_2, y, i, u(\cdot))| = |x_1 - x_2| E \int_0^\infty e^{-(\rho - \mu(1))t} dt \leq \frac{|x_1 - x_2|}{\rho - \mu(1)}. \quad (3.2)$$

我们还需要证明 $V(x, y, i)$ 关于 y 是 Lipschitz 连续的. 已知定理 3.2(i) 和 (3.2), 我们只需证明对于 $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq N$,

$$V(x, y_2, i) \geq V(x, y_1, i) - \left(x + 1 + \frac{\rho - \mu(2)}{\rho - \mu(1)} \right) |y_1 - y_2|.$$

取 $u_0(\cdot) \in U(x, y_1, i)$ 使得 $y_1 + \int_0^\infty u_0(s) ds = N$ 并且

$$V(x, y_1, i) \leq J(x, y_1, i, u_0(\cdot)) + |y_1 - y_2|$$

成立. 令 $\tau = \inf\{t > 0 : \int_0^t u_0(s) ds = y_1 - y_2\}$. 我们得到

$$\int_0^t u_0(s) ds = y_2 - y_1. \quad (3.3)$$

定义

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} 0, & \text{若 } 0 \leq t \leq \tau, \\ u_0(t), & \text{若 } t \geq \tau. \end{cases} \quad (3.4)$$

接着, $\tilde{u}(\cdot) \in U(x, y_2, i)$, 而且,

$$|J(x, y_1, i, u_0(\cdot)) - J(x, y_2, i, \tilde{u}(\cdot))| \leq E \int_0^\infty e^{-\rho t} X(t) |u_0(t) - \tilde{u}(t)| dt = E \int_0^\tau e^{-\rho t} X(t) u_0(t) dt.$$

然后, 我们验证

$$E \int_0^\tau e^{-\rho t} X(t) u_0(t) dt \leq (x + 1) |y_1 - y_2|.$$

事实上, 通过分部积分, 我们有

$$E \int_0^\tau X(t) u_0(t) dt = E \left[e^{-\rho\tau} X(\tau) \int_0^\tau u_0(s) ds \right] + E \int_0^\tau e^{-\rho t} \left(\int_0^\tau u_0(s) ds \right) X(t) (\rho - \mu(\alpha(t))) dt.$$

已知 $\rho > \mu(1)$, 由 (3.1) 和 (3.3), 得

$$E \left[e^{-\rho\tau} X(\tau) \int_0^\tau u_0(s) ds \right] \leq (y_2 - y_1) E[e^{-\rho\tau} X(\tau)] \leq x |y_1 - y_2|.$$

类似地, 由 (3.1) 和 (3.3), 我们有

$$\begin{aligned} E \int_0^\tau \left(\int_0^\tau u_0(s) ds \right) X(t) dt &\leq (y_2 - y_1) E \int_0^\tau e^{-\rho t} X(t) dt \leq (y_2 - y_1) \int_0^\infty e^{(-\rho - \mu(1))t} X(t) dt \\ &= \frac{|y_1 - y_2|}{\rho - \mu(1)}. \end{aligned}$$

因此,

$$|J(x, y_1, i, u_0(\cdot)) - J(x, y_2, i, \tilde{u}(\cdot))| \leq \left(x + \frac{\rho - \mu(2)}{\rho - \mu(1)} \right) |y_1 - y_2|.$$

由此可得

$$\begin{aligned} V(x, y_2, i) &\geq J(x, y_2, i, \tilde{u}(\cdot)) \\ &\geq J(x, y_1, i, u_0(\cdot)) - \left(x + \frac{\rho - \mu(2)}{\rho - \mu(1)} \right) |y_1 - y_2| \\ &\geq V(x, y_1, i) - \left(x + 1 + \frac{\rho - \mu(2)}{\rho - \mu(1)} \right) |y_1 - y_2|. \end{aligned}$$

定理证毕. $\square$

我们证明了定理 3.2, 接着将要证明 $V(x, y, i)$ 是唯一的黏性解. 对于黏性解的相关文献, 我们建议读者参见文献 [28, 29].

定理 3.3 值函数 $V(x, y, i)$ 是 $\bar{\Omega} \times \mathcal{M}$ 中唯一的黏性解.

证明 首先, 我们证明 V 是 $(0, \infty) \times (0, N)$ 中的黏性上解. 对于任何的停时 τ , 动态规划准则告诉我们,

$$V(x, y, i) = \max_{u(\cdot) \in U} E \left\{ \int_0^\tau e^{-\rho t} X(t) u(t) dt + e^{-\rho \tau} V(X(\tau), Y(\tau), \alpha(\tau)) \right\} \quad (3.5)$$

对于每个 $i \in \mathcal{M}$ 成立. 给定 $(X(0), Y(0)) = (x_0, y_0) \in (0, \infty) \times [0, N]$, 令 $i_0 \in \mathcal{M}$, $\varphi(x, y) \in C^2((0, \infty) \times [0, N])$, 使得 $V(x, y, i_0) - \varphi(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的邻域 $N(x_0, y_0)$ 中有局部最小值. 不失一般性, 我们可以假设 $V(x_0, y_0, i_0) - \varphi(x_0, y_0) = 0$. 令 τ 作为 $\alpha(\cdot)$ 首次跳跃时间. 而且, 令 $\tau_0 \in (0, \tau]$ 作为一个停时, 使得对于 $0 \leq t \leq \tau_0$, $(X(t), Y(t)) \in N(x_0, y_0)$ 成立. 考虑控制 $u(t) = u \in \Gamma$, 对于 $t \in [0, \tau_0]$, u 是一个常数, 使得 $u(\cdot) \in U(x_0, y_0, i_0)$ 成立. 而且, 对于 $t \in (0, \tau)$, $V(X(t), Y(t), i) - \varphi(X(t), Y(t)) \geq 0$ 成立. 给定 $0 \leq \theta \leq \tau_0$, 使用 (3.5), 我们有

$$V(x_0, y_0, i_0) \geq E \int_0^\theta e^{-\rho s} X(s) u(s) ds + E e^{-\rho \theta} V(X(\theta), Y(\theta), \alpha(\theta)). \quad (3.6)$$

定义

$$\psi(x, y, i) = \begin{cases} \varphi(x, y) + V(x_0, y_0, i_0) - \varphi(x_0, y_0), & \text{若 } i = i_0, \\ V(x, y, i), & \text{若 } i \neq i_0. \end{cases} \quad (3.7)$$

由 Dynkin 公式, 我们有

$$\begin{aligned} &E e^{-\rho \theta} \psi(X(\theta), Y(\theta), i_0) - \psi(x_0, y_0, i_0) \\ &= E \int_0^\theta e^{-\rho s} \left\{ \mu(i_0) X(s) \frac{\partial \varphi(X(s), Y(s))}{\partial x} + u(s) \frac{\partial \varphi(X(s), Y(s))}{\partial y} \right. \\ &\quad \left. + Q(u) \psi(X(s), Y(s), \cdot)(i_0) - \rho \psi(X(s), Y(s), i_0) \right\} ds. \end{aligned} \quad (3.8)$$

我们已知 (x_0, y_0) 是 $V(x, y, i_0) - \varphi(x, y)$ 的局部最小值, 对于 $0 \leq t \leq \theta$, 我们有

$$V(X(t), Y(t), i_0) \geq \varphi(X(t), Y(t)) + V(x_0, y_0, i_0) - \varphi(x_0, y_0) = \psi(X(t), Y(t), i_0). \quad (3.9)$$

由此可得

$$\begin{aligned} & Ee^{-\rho\theta}V(X(\theta), Y(\theta), i_0) - V(x_0, y_0, i_0) \\ & \geq E \int_0^\theta e^{-\rho s} \left\{ \mu(i_0)X(s) \frac{\partial \varphi(X(s), Y(s))}{\partial x} + u(s) \frac{\partial \varphi(X(s), Y(s))}{\partial y} \right. \\ & \quad \left. + Q(u)\psi(X(s), Y(s), \cdot)(i_0) - \rho\psi(X(s), Y(s), i_0) \right\} ds. \end{aligned} \quad (3.10)$$

同时, 不等式 (3.9) 告诉我们,

$$Q(u)\psi(X(s), Y(s), \cdot)(i_0) \geq Q(u)V(X(s), Y(s), \cdot)(i_0). \quad (3.11)$$

所以, 方程 (3.10) 变成了

$$\begin{aligned} & Ee^{-\rho\theta}V(X(\theta), Y(\theta), i_0) - V(x_0, y_0, i_0) \\ & \geq E \int_0^\theta e^{-\rho s} \left\{ \mu(i_0)X(s) \frac{\partial \varphi(X(s), Y(s))}{\partial x} + u(s) \frac{\partial \varphi(X(s), Y(s))}{\partial y} \right. \\ & \quad \left. + Q(u)V(X(s), Y(s), \cdot)(i_0) - \rho V(X(s), Y(s), i_0) \right\} ds. \end{aligned} \quad (3.12)$$

合并 (3.6) 和 (3.12), 我们得到

$$\begin{aligned} 0 & \geq E \int_0^\theta e^{-\rho s} \left\{ \mu(i_0)X(s) \frac{\partial \varphi(X(s), Y(s))}{\partial x} + u(s) \frac{\partial \varphi(X(s), Y(s))}{\partial y} \right. \\ & \quad \left. + u(s)X(s) + Q(u)V(X(s), Y(s), \cdot)(i_0) - \rho V(X(s), Y(s), i_0) \right\} ds. \end{aligned}$$

令 $\theta \rightarrow 0$, 我们可以得到

$$\begin{aligned} & \max_{u \in U} \left[\mu(i_0)x_0 \frac{\partial \varphi(X(s), Y(s))}{\partial x} + u \frac{\partial \varphi(X(s), Y(s))}{\partial y} + u(s)X(s) \right. \\ & \quad \left. + Q(u)V(X(s), Y(s), \cdot)(i_0) \right] - \rho V(x_0, y_0) \leq 0. \end{aligned}$$

因此, V 是黏性上解.

下面将证明 V 是在 $(0, \infty) \times (0, N)$ 中的黏性下解. 假设并非如此. 令 $i_0 \in \mathcal{M}$, 则存在 $(x_0, y_0) \in (0, \infty) \times (0, N)$ 和 $\delta > 0$ 使得对所有的控制 $u(\cdot) \in U$,

$$\mu(i_0)x \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} + u \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} + ux + Q(u)V(x, y, \cdot)(i_0) - \rho V(x, y, i_0) \leq -\delta \quad (3.13)$$

在邻域 $N(x_0, y_0)$ 中成立, 其中 $\varphi \in C^2((0, \infty) \times (0, N))$, 使得 $V(x, y, i_0) - \varphi(x, y)$ 取得在 (x_0, y_0) 在 $N(x_0, y_0)$ 中的最大值. 不失一般性, 我们假设 $V(x_0, y_0) - \varphi(x_0, y_0) = 0$. 令 $u(\cdot) \in U(x_0, y_0, i_0)$. 令 τ 作为过程 $\alpha(\cdot)$ 的第一次跳跃时间. 令 $\tau_0 \leq \tau$ 作为一个停时, 使得对于 $0 \leq s \leq \tau_0 \leq \tau$, $(X(t), Y(t)) \in N(x_0, y_0)$, $V(X(t), Y(t), i_0) - \varphi(X(t), Y(t)) \leq 0$. 然后, 对于 $0 \leq \theta \leq \tau_0$, 我们有

$$J(x_0, y_0, i_0, u) \leq E \int_0^\theta e^{-\rho s} X(s)u(s)ds + Ee^{-\rho\theta}V(X(\theta), Y(\theta), i_0)$$

$$\leq E \int_0^\theta e^{-\rho s} X(s) u(s) ds + E e^{-\rho \theta} \varphi(X(\theta), Y(\theta)). \quad (3.14)$$

我们知道 (x_0, y_0) 是 $V(x, y, i_0) - \varphi(x, y)$ 的局部最大值. 由 (3.7), 对于 $0 \leq t \leq \theta$, 我们有

$$V(X(t), Y(t), i_0) \leq \varphi(X(t), Y(t)) + V(x_0, y_0, i_0) - \varphi(x_0, y_0) = \psi(X(t), Y(t), i_0). \quad (3.15)$$

类似地, 我们有

$$Q(u) \psi(X(s), Y(s), \cdot)(i_0) \leq Q(u) V(X(s), Y(s), \cdot)(i_0). \quad (3.16)$$

使用 (3.8)、(3.13) 和 (3.16), 我们有

$$\begin{aligned} J(x_0, y_0, i_0, u) &\leq E \int_0^\theta e^{-\rho s} (-\delta + \rho V(X(s), Y(s), i_0) - \mu(i_0) X(s) \frac{\partial \varphi(X(s), Y(s))}{\partial x} - u \frac{\partial \varphi(X(s), Y(s))}{\partial y} \\ &\quad - Q(u) V(X(s), Y(s), \cdot)(i_0)) ds + E e^{-\rho \theta} \varphi(X(\theta), Y(\theta)) \\ &\leq E \int_0^\tau e^{-\rho s} (-\delta + \rho \psi(X(s), Y(s), i_0) - \mu(i_0) X(s) \frac{\partial \varphi(X(s), Y(s))}{\partial x} - u \frac{\partial \varphi(X(s), Y(s))}{\partial y} \\ &\quad - Q(u) \psi(X(s), Y(s), \cdot)(i_0)) ds + E e^{-\rho \tau} \psi(X(\tau), Y(\tau), i_0) \\ &\leq -E \int_0^\tau e^{-\rho s} \delta ds + \varphi(x_0, y_0) \\ &= -E \int_0^\tau e^{-\rho s} \delta ds + V(x_0, y_0, i_0). \end{aligned} \quad (3.17)$$

对于所有可容许的控制 $u \in U$ 取上确界, 我们有

$$V(x_0, y_0, i_0) \leq -E \int_0^\tau e^{-\rho s} \delta ds + V(x_0, y_0, i_0). \quad (3.18)$$

这与 $\delta > 0$ 的事实矛盾. 因此, $V(x, y, i_0)$ 是黏性下解. 最后, 唯一性可以由文献 [30, 31] 中的方法得到. $\square$

3.2 边界条件

对于每个 $i \in \mathcal{M}$, 我们考虑当 $V(x, y, i) \in C^{1,1}(\bar{\Omega})$ 的情形. 首先, 选定 $i = 1$. 那么, $V(x, y, 1)$ 满足 HJB 方程. 取 $\varphi(x, y) = V(x, y, 1) + \beta(y - N)$, 其中 $\beta > 0$. 然后, $V(x, y, 1) - \varphi(x, y)$ 在 (x_0, N) 取到最小值. 因为它是方程的黏性上解, 我们有

$$\begin{aligned} &\max_{u \in \Gamma} \left\{ u \frac{\partial \varphi(x_0, N)}{\partial y} + g(x, u) + a_1(V(x_0, N, 2) - V(x_0, N, 1))u \right\} \\ &\leq \max_{u \in \Gamma} \left\{ u \frac{\partial V(x_0, N, 1)}{\partial y} + g(x, u) + a_1(V(x_0, N, 2) - V(x_0, N, 1))u \right\}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

另一方面, 我们已知,

$$\begin{aligned} &\max_{u \in \Gamma} \left\{ u \frac{\partial \varphi(x_0, N)}{\partial y} + g(x, u) + a_1(V(x_0, N, 2) - V(x_0, N, 1))u \right\} \\ &= \max_{u \in \Gamma} \left\{ u \left(\frac{\partial V(x_0, N, 1)}{\partial y} + \beta \right) + g(x, u) + a_1(V(x_0, N, 2) - V(x_0, N, 1))u \right\} \\ &\geq \max_{u \in \Gamma} \left\{ u \frac{\partial V(x_0, N, 1)}{\partial y} + g(x, u) + a_1(V(x_0, N, 2) - V(x_0, N, 1))u \right\}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

如果

$$\max_{u \in \Gamma} \left\{ \frac{\partial V(x_0, N, 1)}{\partial y} + g_0(x_0) + a_1(V(x_0, N, 2) - V(x_0, N, 1)) \right\} > 0,$$

最大控制元 $u^* = 1$. 这与 (3.19) 和 (3.20) 矛盾. 由 $\beta > 0$, 我们必须有

$$\max_{u \in \Gamma} \left\{ \frac{\partial V(x_0, N, 1)}{\partial y} + g_0(x_0) + a_1(V(x_0, N, 2) - V(x_0, N, 1)) \right\} \leq 0.$$

同样, 当 $i = 2$, 我们有

$$\max_{u \in \Gamma} \left\{ \frac{\partial V(x_0, N, 2)}{\partial y} + g_0(x_0) + a_1(V(x_0, N, 2) - V(x_0, N, 1)) \right\} \leq 0.$$

在 $y = 0$ 时, 没有限制, 因为 $u(t) \geq 0$ 使得 $Y(t) \geq 0$ 对于所有的 t 成立.

3.3 最佳出售策略

接下来给出一个关于值函数的验证定理.

定理 3.4 对于每个 $i \in \mathcal{M}$, 令 $v(\cdot, \cdot, i) \in C_b^{1,1}(\bar{\Omega})$ 作为 HJB 方程的一个解, 则

$$v(x, y, i) \geq J(x, y, i, u(\cdot))$$

对于所有可容许的控制 $u(\cdot)$ 成立. 同时, 令

$$\begin{aligned} u^*(x, y, 1) &= \begin{cases} 0, & \text{若 } \frac{\partial v(x, y, 1)}{\partial y} + g_0(x) + a_1(v(x, y, 2) - v(x, y, 1)) \leq 0, \\ 1, & \text{若 } \frac{\partial v(x, y, 1)}{\partial y} + g_0(x) + a_1(v(x, y, 2) - v(x, y, 1)) > 0, \end{cases} \\ u^*(x, y, 2) &= \begin{cases} 0, & \text{若 } \frac{\partial v(x, y, 2)}{\partial y} + g_0(x) - a_2(v(x, y, 1) - v(x, y, 2)) \leq 0, \\ 1, & \text{若 } \frac{\partial v(x, y, 2)}{\partial y} + g_0(x) - a_2(v(x, y, 1) - v(x, y, 2)) > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.21)$$

我们可得 $v(x, y, i) = V(x, y, i) = J(x, y, i, u^*(\cdot))$. 也就是说, u^* 最优控制.

证明 对于, 每个 $v(x, y, i)$, 任意的 $u \in U$, 相应的轨迹是 $(X(\cdot), Y(\cdot))$. 由 Dynkin 公式, 我们有

$$\begin{aligned} & Ee^{-\rho T} v(X(T), Y(T), \alpha(T)) - v(x, y, i) \\ &= E \int_0^T e^{-\rho s} \left[\mu(i) X(s) \frac{\partial v(X(s), Y(s), i)}{\partial x} + u \frac{\partial v(X(s), Y(s), i)}{\partial y} \right. \\ & \quad \left. + Q(u) v(X(s), Y(s), \cdot)(i) - \rho v(X(s), Y(s), i) \right] ds. \end{aligned} \quad (3.22)$$

我们已知 $v(x, y, i)$ 是 HJB 方程的一个解:

$$\rho v(x, y, i) = \max_{u \in U} \mu(i) x \frac{\partial v(x, y, i)}{\partial x} + u \frac{\partial v(x, y, i)}{\partial y} + g(x, u) + Q(u) v(x, y, \cdot)(i). \quad (3.23)$$

合并它们, 我们有

$$Ee^{-\rho T} v(X(T), Y(T), \alpha(T)) - v(x, y, i) \leq -E \int_0^T e^{-\rho s} g(X(s), u(s)) ds. \quad (3.24)$$

令 $T \rightarrow \infty$, 我们有

$$v(x, y, i) \geq E \int_0^\infty e^{-\rho s} g(X(s), u(s)) ds. \quad (3.25)$$

因此, 最优控制如下:

$$u^*(x, y, i) = \arg \max_u \left[u \frac{\partial v(x, y, i)}{\partial y} + g(x, u) + Q(u)v(x, y, \cdot)(i) \right]. \quad (3.26)$$

定理证毕. $\square$

注 3.5 本文考虑出售率以 1 为界的情形. 这限制并不苛刻. 当我们在实践中使用出售准则的时候, 我们可以拓展本文的结果, 以便解决任何固定的、以大数值 M_0 为上界的出售率的情形.

4 数值方法

虽然最优策略已经发现, 要获得 HJB 方程系统的闭合形式的解 (解析解) 仍然是一个艰难的任务. 作为一个可行的选择, 我们寻求方程的数值解法.

本节构造一个显式有限差分法, 并表明它收敛到方程 (2.7) 的唯一的黏性解. 给定正整数 κ , 我们考虑下面的最优控制问题与值函数 V_κ :

$$V_\kappa(x, y, i) = \sup_{u \in U(x, y, i)} E \left[\int_0^\infty e^{-\rho t} \min(X(t), \kappa) u(t) dt \mid X(0) = x, Y(0) = y, \alpha(0) = i \right], \quad (4.1)$$

相应的 HJB 方程为

$$\begin{aligned} \rho V_\kappa(x, y, i) = \max_{u \in \Gamma} \left[\mu(i)x \frac{\partial V_\kappa(x, y, i)}{\partial x} + u \frac{\partial V_\kappa(x, y, i)}{\partial y} + \min(x, \kappa)u + Q(u)V_\kappa(x, y, \cdot)(i) \right], \\ 0 \leq y \leq N, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.2)$$

相应的 Hamilton 函数是

$$\begin{aligned} \tilde{H}_\kappa(x, y, i, V, D_x V, D_y V) = \max_{u \in \Gamma} [\mu(i)x D_x V(x, y, i) + u D_y V(x, y, i) \\ + \min(x, \kappa)u + Q(u)V(x, y, \cdot)(i) - \rho V(x, y, i)]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

在上一节中, 我们已经证明, 值函数 V_κ 是方程

$$\tilde{H}_\kappa(x, y, i, V, D_x V, D_y V) = 0, \quad \text{对于 } (x, y, u) \in S \times \mathcal{M} \quad (4.4)$$

的唯一约束黏性解. 而且, 当 $\kappa \rightarrow \infty$ 时, $V_\kappa \rightarrow V$ 对于所有的 (x, y) 成立. 因此, 我们只需要考虑 V_κ 的数值解. 我们引入变量替换如下: 对于每个 $x > 0$, 定义 $z = \log x$, 令 $V(x, y, i) = \bar{V}(\log x, y, i)$. 然后, 我们有

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial y}.$$

因此, 定义在 (4.3) 的 Hamiltonian 函数变成了

$$\begin{aligned} \tilde{H}_\kappa(x, y, i, \bar{V}, D_x \bar{V}, D_y \bar{V}) = \max_{u \in \Gamma} [\mu(i) D_x \bar{V}(x, y, i) + u D_y \bar{V}(x, y, i) \\ + \min(x, \kappa)u + Q(u)\bar{V}(x, y, \cdot)(i) - \rho \bar{V}(x, y, i)], \end{aligned} \quad (4.5)$$

我们想逼近以下方程解:

$$\max_{u \in \Gamma} \left[\mu(i) \frac{\partial \bar{V}(x, y, i)}{\partial x} + u \frac{\partial \bar{V}(x, y, i)}{\partial y} + \min(x, \kappa)u + Q(u) \bar{V}(x, y, \cdot)(i) \right] - \rho \bar{V}(x, y, i) = 0, \quad (4.6)$$

对于 $(z, y, i) \in \mathbb{R} \times [0, N] \times \mathcal{M}$. 我们可以证明方程 (4.6) 存在唯一的黏性解 $\bar{V}$. 令 $\mathbb{B}(\mathbb{R} \times [0, N] \times \mathcal{M})$ 作为有界函数 $\bar{V}(z, y, i)$ 空间, 定义在 $\mathbb{R} \times [0, N] \times \mathcal{M}$ 关于 (z, y) 连续. 令 h ($0 < h < 1$) 作为离散变量 z 的步长. 同时, h_1 ($0 < h_1 < 1$) 作为 y 的步长. 我们考虑有限差分算子, 它们的定义如下:

$$\begin{aligned} \Delta_z \bar{V}(z, y, i) &= \frac{\bar{V}(z+h, y, i) - \bar{V}(z, y, i)}{h}, \quad \mu(i) \geq 0, \\ \Delta_z \bar{V}(z, y, i) &= \frac{\bar{V}(z, y, i) - \bar{V}(z-h, y, i)}{h}, \quad \mu(i) \leq 0, \\ \Delta_y \bar{V}(z, y, i) &= \frac{\bar{V}(z, y+h_1, i) - \bar{V}(z, y, i)}{h_1}. \end{aligned}$$

相应的离散形式的方程 (4.6) 如下:

$$\begin{aligned} \rho \bar{V}(z, y, i) &= \max_{u \in \Gamma} \left[\mu^+(i) \frac{\bar{V}(z+h, y, i) - \bar{V}(z, y, i)}{h} + \mu^-(i) \frac{\bar{V}(z-h, y, i) - \bar{V}(z, y, i)}{h} \right. \\ &\quad \left. + u \frac{\bar{V}(z, y+h_1, i) - \bar{V}(z, y, i)}{h_1} + \min(e^z, \kappa)u + \lambda_i(u)(\bar{V}(z, y, j) - \bar{V}(z, y, i)) \right], \end{aligned} \quad (4.7)$$

其中

$$\mu^+(i) = \max(\mu(i), 0), \quad \mu^-(i) = \max(-\mu(i), 0).$$

整理上式可得

$$\begin{aligned} \max_{u \in \Gamma} \left[\frac{1}{\rho + \frac{|\mu(i)|}{h} + \frac{u}{h_1} + \lambda_i(u)} \left(\bar{V}(z, y+h_1, i) \frac{u}{h_1} + \bar{V}(z+h, y, i) \frac{\mu^+(i)}{h} \right. \right. \\ \left. \left. + \bar{V}(z-h, y, i) \frac{\mu^-(i)}{h} + \min(e^z, \kappa)u + \lambda_i(u) \bar{V}(z, y, j) \right) \right] - \bar{V}(z, y, i) = 0, \end{aligned} \quad (4.8)$$

其中

$$\mu^+(i) = \max(\mu(i), 0), \quad \mu^-(i) = \max(-\mu(i), 0).$$

定理 4.1 令 $\bar{V}_{h, h_1}^\kappa$ 作为方程 (4.8) 的解. 当 $(h, h_1) \rightarrow 0$, 序列 $\bar{V}_{h, h_1}^\kappa$ 在 $\mathbb{R} \times [0, N]$ 局部一致收敛到方程 (4.6) 唯一的黏性解 $\bar{V}_\kappa$; 当 $\kappa \rightarrow \infty$ 时, $\bar{V}_\kappa$ 收敛于方程 (2.7) 的唯一黏性解 V .

注 4.2 使用变量替换时, 我们知道 $V_\kappa(x, y, i) = \bar{V}_\kappa(\log x, y, i)$, 对于 $(x, y, i) \in (0, \infty) \times [0, N] \times \mathcal{M}$, 而且我们知道 V_κ 收敛于 V , 是方程 (2.7) 唯一的黏性解. 因此,

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \lim_{h \rightarrow 0, h_1 \rightarrow 0} \bar{V}_{h, h_1}^\kappa(\log x, y, i) = V(x, y, i), \quad (x, y, i) \in (0, \infty) \times [0, N] \times \mathcal{M}.$$

为了证明定理 4.1, 我们需要一些准备. 定义映射: $\mathcal{A}_\kappa: (0, 1) \times (0, 1) \times \mathcal{M} \times \mathbb{R} \times [0, N] \times \mathbb{R} \times \mathbb{B}(\mathbb{R} \times [0, N] \times \mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\kappa(h_1, h, i, z, y, t, \bar{V}) &= \max_{u \in \Gamma} \left[ht \left(\rho + \frac{|\mu(i)|}{h} + \frac{u}{h_1} + \lambda_i(u) \right) - h \left(\bar{V}(z, y+h_1, i) \frac{u}{h_1} + \bar{V}(z+h, y, i) \frac{\mu^+(i)}{h} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \bar{V}(z-h, y, i) \frac{\mu^-(i)}{h} + \min(e^z, \kappa)u + \lambda_i(u) \bar{V}(z, y, j) \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

接着有 (4.7) 等价于 $\mathcal{A}_\kappa(h_1, h, i, z, y, \bar{V}(z, y, i), \bar{V}) = 0$. 而且, 注意到 $\bar{V}$ 在 $\mathcal{A}_\kappa$ 中的系数是负数, 说明 $\mathcal{A}_\kappa$ 是单调的, 也就是, 对所有的 $t \in \mathbb{R}$, $h, h_1 \in (0, 1)$, $z \in \mathbb{R}$, $y \in [0, N]$, $\bar{V}_1, \bar{V}_2 \in \mathbb{B}(\mathbb{R} \times [0, n] \times \mathcal{M})$. 我们有 $\mathcal{A}_\kappa(h_1, h, i, z, y, t, \bar{V}_1) \leq \mathcal{A}_\kappa(h_1, h, i, z, y, \bar{V}_2)$, 对于任何的 $\bar{V}_1 \geq \bar{V}_2$.

定义 4.3 我们说逼近算法 $\mathcal{A}_\kappa$ 是一致的, 如果对于任意的 $z \in \mathbb{R}$, $y \in [0, N]$, 并且对于任意的检验函数 $\bar{V}$, 其中 $\bar{V}(\cdot, \cdot, i) \in C^{1,1}(\mathbb{R} \times [0, N])$, $i \in \mathcal{M}$, 我们有

$$\frac{\mathcal{A}_\kappa(h_1, h, i, \xi, \zeta, \bar{V}(\xi, \zeta, i) + \varepsilon, \bar{V} + \varepsilon)}{h} \rightarrow \tilde{H}_\kappa(z, y, i, \bar{V}, D_z \bar{V}, D_y \bar{V}),$$

当 $\xi \rightarrow z$, $\zeta \rightarrow y$, $h \downarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$, $h_1 \downarrow 0$.

引理 4.4 逼近算法 $\mathcal{A}_\kappa$ 是一致的.

证明 令 $\bar{V}(\cdot, \cdot, i) \in C^{1,1}(\mathbb{R} \times [0, N])$, 其中 $i \in \mathcal{M}$, 我们有

$$\begin{aligned} & \frac{\mathcal{A}_\kappa(h_1, h, i, \xi, \zeta, \bar{V}(\xi, \zeta, i), \bar{V})}{h} \\ &= \left[\left(\rho + \frac{|\mu(i)|}{h} + \frac{u}{h_1} + \lambda_i(u) \right) \bar{V}(\xi, \zeta, i) - \left(\bar{V}(\xi, \zeta + h_1, i) \frac{u}{h_1} + \bar{V}(\xi + h, \zeta, i) \frac{\mu^+(i)}{h} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \bar{V}(\xi - h, \zeta, i) \frac{\mu^-(i)}{h} + \min(e^z, \kappa)u + \lambda_i(u) \bar{V}(\xi, \zeta, i) \right) \right]. \end{aligned}$$

让 $\xi \rightarrow z$, $\zeta \rightarrow y$, $h \downarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$ 且 $h_1 \downarrow 0$, 可得

$$\frac{\mathcal{A}_\kappa(h_1, h, i, \xi, \zeta, \bar{V}(\xi, \zeta, i) + \varepsilon, \bar{V} + \varepsilon)}{h} \rightarrow \tilde{H}_\kappa(z, y, i, \bar{V}, D_z \bar{V}, D_y \bar{V}).$$

引理证毕. □

已知 $\mathcal{A}_\kappa(h_1, h, i, z, y, \bar{V}(z, y, i), \bar{V}) = 0$ 等价于方程

$$\begin{aligned} \bar{V}(z, y, i) = \max_{u \in \Gamma} & \left[\frac{1}{\rho + \frac{|\mu(i)|}{h} + \frac{u}{h_1} + \lambda_i(u)} \left(\bar{V}(z, y + h_1, i) \frac{u}{h_1} + \bar{V}(z + h, y, i) \frac{\mu^+(i)}{h} \right. \right. \\ & \left. \left. + \bar{V}(z - h, y, i) \frac{\mu^-(i)}{h} + \min(e^z, \kappa)u + \lambda_i(u) \bar{V}(x, y, j) \right) \right], \end{aligned} \quad (4.10)$$

其中

$$\mu^+(i) = \max(\mu(i), 0), \quad \mu^-(i) = \max(-\mu(i), 0).$$

我们定义一个算子 $\mathcal{O}_{h, h_1} \in \mathbb{B}(\mathbb{R} \times [0, N] \times \mathcal{M})$ 如下:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{h, h_1} \bar{V}(z, y, i) = \max_{u \in \Gamma} & \left[\frac{1}{\rho + \frac{|\mu(i)|}{h} + \frac{u}{h_1} + \lambda_i(u)} \left(\bar{V}(z, y + h_1, i) \frac{u}{h_1} + \bar{V}(z + h, y, i) \frac{\mu^+(i)}{h} \right. \right. \\ & \left. \left. + \bar{V}(z - h, y, i) \frac{\mu^-(i)}{h} + \min(e^z, \kappa)u + \lambda_i(u) \bar{V}(x, y, j) \right) \right] - \bar{V}(z, y, i) = 0. \end{aligned}$$

引理 4.5 对于任意的 k 和 h , $\mathcal{O}_{h, h_1}$ 是一个压缩映射.

证明 为了证明 $\mathcal{O}_{h, h_1}$ 是压缩映射, 我们需要证明, 存在 $0 < \beta < 1$ 使得

$$\|\mathcal{O}_{h, h_1} f - \mathcal{O}_{h, h_1} g\| < \beta \|f - g\|$$

对于所有的 $f, g \in \mathbb{B}(\mathbb{R} \times [0, N])$, 其中 $\|\cdot\|$ 是上确界范数. 我们定义 c_{h, h_1} 如下:

$$c_{h, h_1} = \rho + \frac{|\mu(i)|}{h} + \frac{u}{h_1} + \lambda_i(u).$$

注意到对于任意的 $\varphi, \psi \in \mathbb{B}(\mathbb{R} \times [0, N])$,

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{h,h_1}\varphi(z,y,i) - \mathcal{O}_{h,h_1}\psi(z,y,i) &= \max_{u \in \Gamma} \left[\frac{1}{c_{h,h_1}(u)} \left(\varphi(z,y+h_1,i) \frac{u}{h_1} + \varphi(z+h_1,y,i) \frac{\mu^+(i)}{h} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \varphi(z-h,y,i) \frac{\mu^-(i)}{h} + \min(e^z, \kappa)u + \lambda_i(u)\varphi(z,y,i) \right) \right] \\ &\quad - \max_{u \in \Gamma} \left[\frac{1}{c_{h,h_1}(u)} \left(\psi(z,y+h_1,i) \frac{u}{h_1} + \psi(z+h_1,y,i) \frac{\mu^+(i)}{h} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \psi(z-h,y,i) \frac{\mu^-(i)}{h} + \min(e^z, \kappa)u + \lambda_i(u)\psi(z,y,i) \right) \right]. \end{aligned}$$

这说明, 对所有的 z, y 和 i , 我们有

$$|\mathcal{O}_{h,h_1}\varphi(z,y,i) - \mathcal{O}_{h,h_1}\psi(z,y,i)| \leq \max_{u \in \Gamma} \left[\frac{\frac{u}{h_1} + \frac{|\mu(i)|}{h} + \lambda_i(u)}{c_{h,h_1}(u)} \right] \|\varphi - \psi\|.$$

其中

$$\frac{\frac{u}{h_1} + \frac{|\mu(i)|}{h} + \lambda_i(u)}{c_{h,h_1}(u)} = \frac{\frac{u}{h_1} + \frac{|\mu(i)|}{h} + \lambda_i(u)}{\frac{u}{h_1} + \frac{|\mu(i)|}{h} + \lambda_i(u) + \rho} < 1.$$

因为 u 的取值范围在 $[0, 1]$,

$$\max_{u \in \Gamma} \frac{\frac{u}{h_1} + \frac{|\mu(i)|}{h} + \lambda_i(u)}{c_{h,h_1}(u)} < 1.$$

因此,

$$\|\mathcal{O}_{h,h_1}\varphi - \mathcal{O}_{h,h_1}\psi\| < \beta_{h,h_1} \|\varphi - \psi\|,$$

其中

$$\beta = \beta_{h,h_1} = \max_{u \in \Gamma} \frac{\frac{u}{h_1} + \frac{|\mu(i)|}{h} + \lambda_i(u)}{c_{h,h_1}(u)} = \frac{c_{h,h_1}(u) - \rho}{c_{h,h_1}(u)} < 1.$$

证毕. $\square$

定义 4.6 我们说逼近算法 $\mathcal{A}_\kappa$ 是稳定的, 如果对于每个 $h, h_1 \in (0, 1)$, 存在一个有界的解 $\bar{V}_{h,h_1} \in \mathbb{B}(\mathbb{R} \times [0, N] \times \mathcal{M})$, 使得方程

$$\mathcal{A}_\kappa(h_1, h, i, z, y, \bar{V}(z, y), \bar{V}) = 0 \quad (4.11)$$

对于独立的 h_1 和 h 成立.

注 4.7 我们由 Banach 不动点定理, 严格的压缩映射 $\mathcal{O}_{h,h_1}$ 有唯一的不动点, 我们用 $\bar{V}_{h,h_1}^\kappa$ 表示. 给定任意的函数 $\bar{V}_0 \in \mathbb{B}(\mathbb{R} \times [0, N] \times \mathcal{M})$, 我们构造下列的序列, $\bar{V}_{n+1} = \mathcal{O}_{h,h_1}\bar{V}_n$, 对于 $n \geq 0$. 容易看到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{V}_n = \bar{V}_{h,h_1}^\kappa.$$

而且, 我们还注意到

$$\begin{aligned} \bar{V}_{n+1}(z,y,i) &= \max_{u \in \Gamma} \left[\frac{1}{c_{h,h_1}(u)} \left(\bar{V}_n(z,y+h_1,i) \frac{u}{h_1} + \bar{V}_n(z+h_1,y,i) \frac{\mu^+(i)}{h} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \bar{V}_n(z-h,y,i) \frac{\mu^-(i)}{h} + \min(e^z, \kappa)u + \lambda_i(u)\bar{V}_n(z,y,i) \right) \right] \\ &\leq \beta_{h,h_1} \|\bar{V}_n\| + \frac{1}{c_{h,h_1}(1)} \kappa, \end{aligned} \quad (4.12)$$

此外, 我们还有

$$\beta_{h,h_1} = \max_{u \in \Gamma} \frac{\frac{u}{h_1} + \frac{|\mu(i)|}{h} + \lambda_i(u)}{c_{h,h_1}(u)} = \frac{\frac{u}{h_1} + \frac{|\mu(i)|}{h} + \lambda_i(u)}{\frac{u}{h_1} + \frac{|\mu(i)|}{h} + \lambda_i(u) + \rho} \leq \frac{c_{h,h_1}(1) - \rho}{c_{h,h_1}(1)} < 1.$$

因为 $c_{h,h_1}(u)$ 是一个关于 u 的仿射函数, 且 $\Gamma = [0, 1]$, 这说明,

$$\bar{V}_{n+1} \leq \left(\frac{c_{h,h_1} - \rho}{c_{h,h_1}(1)} \right) \|\bar{V}_n\| + \frac{1}{c_{h,h_1}} \kappa. \quad (4.13)$$

从 (4.13), 我们推导出

$$\bar{V}_{n+1} \leq \left(\frac{c_{h,h_1} - \rho}{c_{h,h_1}(1)} \right)^{n+1} \|\bar{V}_0\| + \frac{1}{c_{h,h_1}} \kappa \sum_{i=0}^n \left(\frac{c_{h,h_1} - \rho}{c_{h,h_1}(1)} \right)^i.$$

令 $n \rightarrow \infty$, 我们得到

$$\|\bar{V}_{h,h_1}^\kappa\| \leq \frac{\kappa}{c_{h,h_1}} \frac{1}{1 - \frac{c_{h,h_1}(1) - \rho}{c_{h,h_1}(1)}} = \frac{\kappa}{\rho}.$$

这证明逼近算法 $\mathcal{A}_\kappa$ 是稳定的.

定理 4.1 的证明 定义:

$$\begin{aligned} \bar{V}_\kappa^*(x, y, i) &= \limsup_{\xi \rightarrow x, \zeta \rightarrow y, h \downarrow 0, h_1 \downarrow 0} \bar{V}_{h,h_1}^\kappa(\xi, \zeta, i), \\ \bar{V}_{*\kappa}(x, y, i) &= \liminf_{\xi \rightarrow x, \zeta \rightarrow y, h \downarrow 0, h_1 \downarrow 0} \bar{V}_{h,h_1}^\kappa(\xi, \zeta, i). \end{aligned} \quad (4.14)$$

我们认为 $\bar{V}_\kappa^*$ 和 $\bar{V}_{*\kappa}$ 分别是方程 (4.6) 的黏性下解和黏性上解. 为了证明这个结论, 我们只考虑 $\bar{V}_\kappa^*$. 关于 $\bar{V}_{*\kappa}$ 的证明是相似的. 对于每个 $i \in \mathcal{M}$, 我们需证明

$$\tilde{H}_\kappa(x_0, y_0, i, \bar{V}_\kappa^*(x_0, y_0, i), D_x \Psi(x_0, y_0), D_y \Psi(x_0, y_0)) \leq 0,$$

对于任意的检验函数 $\Psi \in C^{1,1}(\mathbb{R} \times [0, N])$ 成立, 并且使得 (x_0, y_0) 是 $\bar{V}_\kappa^*(x, y, i) - \Psi(x, y)$ 严格的局部最大值. 不失一般性, 我们假设 $\bar{V}_\kappa^*(x_0, y_0, i) = \Psi(x_0, y_0)$. 由于逼近算法的稳定性, 我们可以假设 $\Psi \leq 2 \sup_{h_1, h} \|\bar{V}_{h,h_1}^\kappa\|$ 在球 $B((x_0, y_0), r)$ 之外成立, 其中 $r > 0$, 使得

$$\bar{V}_\kappa^*(x, y, i) - \Psi(x, y) \leq 0 = \bar{V}_\kappa^*(x_0, y_0, i) - \Psi(x_0, y_0)$$

在 $B((x_0, y_0), r)$ 内成立. 由此, 存在序列 $h_{1,n} > 0$, $h_n > 0$ 和 $(\xi_n, \zeta_n) \in \mathbb{R} \times [0, N]$ 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$h_{1,n} \rightarrow 0, \quad h_n \rightarrow 0, \quad \xi_n \rightarrow x_0, \quad \zeta_n \rightarrow y_0, \quad \bar{V}_{h_{1,n}, h_n}^\kappa(\xi_n, \zeta_n, i) \rightarrow \bar{V}_\kappa^*(x_0, y_0, i), \quad (4.15)$$

其中 (ξ_n, ζ_n) 是 $\bar{V}_{h_{1,n}, h_n}^\kappa - \Psi$ 的全局最大值. 记 $\varepsilon_n = \bar{V}_{h_{1,n}, h_n}^\kappa - \Psi(\xi_n, \zeta_n)$. 我们注意到 $\varepsilon_n \rightarrow 0$ 和

$$\bar{V}_{h_{1,n}, h_n}^\kappa(x, y, i) \leq \Psi(x, y) + \varepsilon_n, \quad \text{对于所有的 } (x, y) \in \mathbb{R} \times [0, N] \text{ 成立.} \quad (4.16)$$

由此可得

$$\mathcal{A}_\kappa(h_{1,n}, h_n, i, \xi_n, \zeta_n, \bar{V}_{h_{1,n}, h_n}^\kappa(\xi_n, \zeta_n, i), \bar{V}_{h_{1,n}, h_n}^\kappa) = 0.$$

由 $\mathcal{A}_\kappa$ 的单调性和 (4.16) 可得

$$\mathcal{A}_\kappa(h_{1,n}, h_n, i, \xi_n, \zeta_n, \Psi(\xi_n, \zeta_n) + \varepsilon_n, \Psi + \varepsilon_n)$$

$$\leq \mathcal{A}_\kappa(h_{1,n}, h_n, i, \xi_n, \zeta_n, \bar{V}_{h_{1,n}, h_n}^\kappa(\xi_n, \zeta_n, i), \bar{V}_{h_{1,n}, h_n}^\kappa) = 0. \quad (4.17)$$

易知,

$$\lim_n \frac{\mathcal{A}_\kappa(h_{1,n}, h_n, i, \xi_n, \zeta_n, \Psi(\xi_n, \zeta_n) + \varepsilon_n, \Psi + \varepsilon_n)}{h_n} \leq 0,$$

所以,

$$\begin{aligned} & \tilde{H}_\kappa(x_0, y_0, i, \bar{V}_\kappa^*(x_0, y_0, i), D_x \Psi(x_0, y_0), D_y \Psi(x_0, y_0)) \\ &= \lim_{\xi_n \rightarrow x_0, \zeta_n \rightarrow y_0, h_{1,n} \downarrow 0, h_n \downarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{A}_\kappa(h_{1,n}, h_n, i, \xi_n, \zeta_n, \Psi(\xi_n, \zeta_n) + \varepsilon, \Psi + \varepsilon)}{h_n} \leq 0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

这就证明了 $\bar{V}_\kappa^*$ 是一个黏性下解. 类似地, 我们可以证明 $\bar{V}_{*\kappa}$ 是一个黏度上解. 因此, 由黏度解的唯一性, 我们可得 $\bar{V}_\kappa = \bar{V}_\kappa^* = \bar{V}_{*\kappa}$. 因此, 我们可以得到结论: 序列 $\{\bar{V}_{h, h_1}^\kappa\}_{h, h_1}$ 局部一致收敛于 $\bar{V}_\kappa$. 根据注 4.2, 我们有 $\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \bar{V}_\kappa(\log x, y, i) = V(x, y, i)$. $\square$

5 数值实验结果

本节通过使用上一节中定义的数值方法, 开始进行拟合和数值实验. 我们报告值函数和相应的最优控制区域的拟合结果.

例 5.1 假设连续时间 Markov 链有两个状态, 其状态空间是 $\mathcal{M} = \{1, 2\}$. 状态 1 表示牛市, 相反, 状态 2 表示熊市. 我们取 $\mu(1) = 0.3$, $\mu(2) = -0.1$, $\rho = 0.05$, $N = 35$ (股份). 假设 Markov 链的生成元如下:

$$\begin{pmatrix} -(4u+1) & (4u+1) \\ -u+10 & u-10 \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

在这个例子中, 我们取 $g_0(x)$ 为 $h(x) = \min(x, 6)$ 和足够小的 η_0 的卷积. 在下面的图像中, 一条曲线划分了每个 x 和 y 区域成两部分. 左边表示不进行股票出售的区域 ($u = 0$), 而右边的部分表示将股票全部卖出的区域 ($u = 1$), 我们有 $\mu(1) > \mu(2)$. 因此, 当 $\alpha = 1$, 预期的回报比较高而且相应的控制 u 在图 1(a) 比图 1(b) 要小. 因为高的回报率, 人们可以持有股份等待股票的价格更高一些. 图 2(a) 和 2(b) 分别表示在状态 1 和 2 中的值函数的图像.

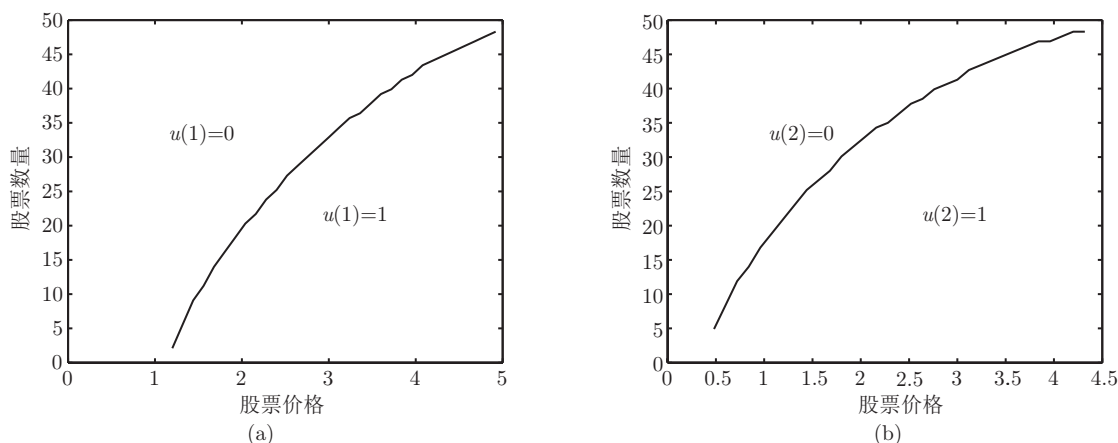


图 1 控制对应于例 5.1. (a) u 对应于 Markov 状态 1; (b) u 对应于 Markov 状态 2

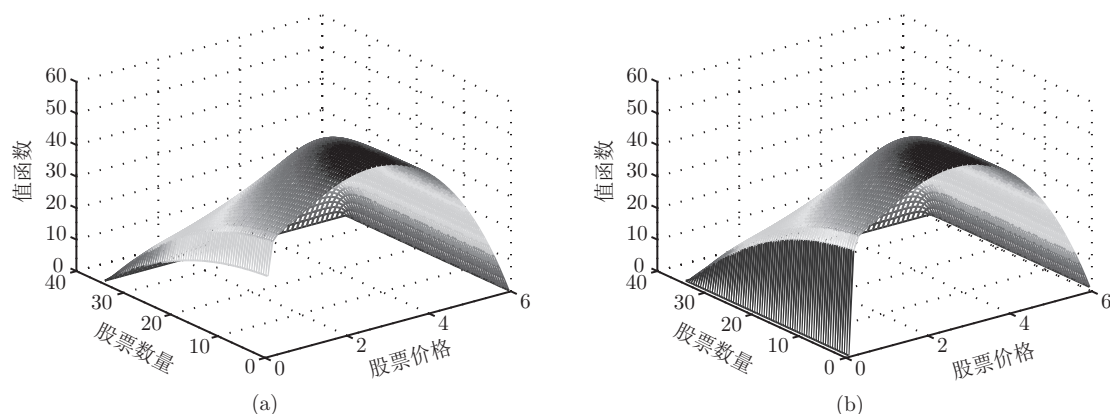


图 2 值函数对应于例 5.1. (a) u 对应于 Markov 状态 1; (b) u 对应于 Markov 状态 2

例 5.2 同样假设连续时间 Markov 链有两个状态, 其状态空间是 $\mathcal{M} = \{1, 2\}$. 状态 1 表示牛市, 相反, 状态 2 表示熊市. 我们改变相应参数的值, 令 $\mu(1) = 3$, $\mu(2) = -3$, $\rho = 0.5$, $N = 35$ (股份). 改变后的 Markov 链的生成元如下:

$$\begin{pmatrix} -(100u + 50) & (100u + 50) \\ -100u + 150 & 100u - 150 \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

在这个例子中, 我们同样取 $g_0(x)$ 为 $h(x) = \min(x, 6)$ 和足够小的 η_0 的卷积. 所得的结论如下面的图像: 一条曲线将 xy 区域分成两部分. 左边表示不进行股票出售的区域 ($u = 0$), 而右边的部分表示将股票全部卖出的区域 ($u = 1$), 我们有

$$\mu(1) > \mu(2).$$

因此, 当 $\alpha = 1$, 预期的回报比较高而且相应的控制 u 在图 3(a) 比图 3(b) 要小. 因为有高的回报率, 人们可以持有股份等待股票的价格再高一些. 图 4(a) 和 4(a) 分别表示在状态 1 和 2 中的值函数的图像. 进而, 我们得到了类似的结论. 我们发现, 最优控制的阈值曲线几乎是垂直于 x 轴的. 我们以为这与该例中特有的 Markov 链生成元有关. 为此, 我们保持其他参数不变, 仅改变贴现率 ρ 的值, 又进行了几组实验, 也得到了类似图 3 和 4 的结论. 从中, 我们得出结论, 在这种生成元的条件下, 最优控制的阈值曲线确实是垂直的.

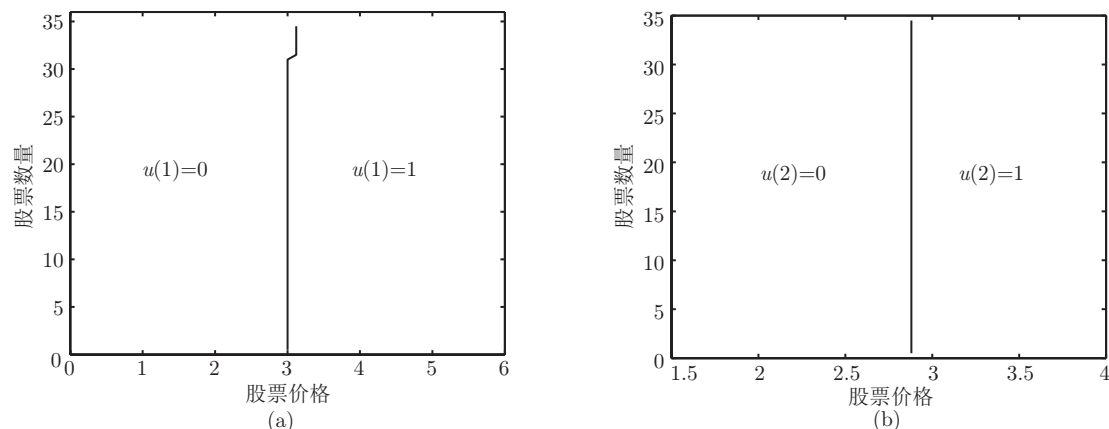


图 3 控制对应于例 5.2. (a) u 对应于 Markov 状态 1; (b) u 对应于 Markov 状态 2

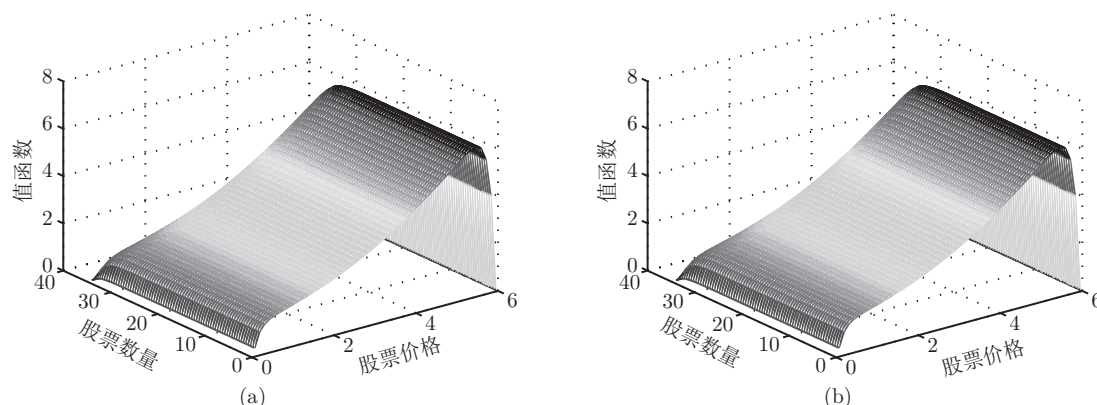


图 4 值函数对应于例 5.2. (a) u 对应于 Markov 状态 1; (b) u 对应于 Markov 状态 2

致谢 感谢吴付科老师和严钧老师在中文编辑上的帮助.

参考文献

- 1 Duffie D. Dynamic Asset Pricing Theory. 2nd ed. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1996
- 2 Elliott R J, Kopp P E. Mathematics of Financial Markets. New York: Springer-Verlag, 1998
- 3 Fouque J P, Papanicolaou G, Sircar R K. Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility. Cambridge: Cambridge University Press, 2000
- 4 Hull J C. Options, Futures, and Other Derivatives. 3rd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1997
- 5 Karatzas I, Shreve S E. Methods of Mathematical Finance. New York: Springer-Verlag, 1998
- 6 Musiela M, Rutkowski M. Martingale Methods in Financial Modeling. New York: Springer-Verlag, 1997
- 7 Øksendal B. Stochastic Differential Equations. 6th ed. New York: Springer-Verlag, 2003
- 8 Zhang Q. Explicit solutions for an optimal stock selling problem under a Markov chain model. J Math Anal Appl, 2014, 420: 1210–1227
- 9 van der Hoek J, Elliott R J. American option prices in a Markov chain market model. Appl Stoch Models Bus Ind, 2012, 28: 35–59
- 10 Norberg R. The Markov chain market. Astin Bull, 2003, 33: 265–287
- 11 Barmish B R, Primbs J A. On market-neutral stock trading arbitrage via linear feedback. In: American Control Conference, 2012. Montreal, QC: IEEE, 2012, 3693–3698
- 12 Zhang Q. Stock trading: An optimal selling rule. SIAM J Control Optim, 2001, 40: 64–87
- 13 Guo X, Zhang Q. Optimal selling rules in a regime switching model. IEEE Trans Automat Control, 2005, 50: 1450–1455
- 14 Bensoussan A, Yan Z, Yin G. Threshold-type policies for real options using regime-switching models. SIAM J Finan Math, 2012, 3: 667–689
- 15 Bensoussan A, Hoe S, Yan Z, et al. Real options with competition and regime switching. Math Finance, doi: 10.1111/mafi.12085, 2014
- 16 Yin G, Liu R H, Zhang Q. Recursive algorithms for stock Liquidation: A stochastic optimization approach. SIAM J Optim, 2002, 13: 240–263
- 17 Helmes K. Computing optimal selling rules for stocks using linear programming. In: Contemporary Mathematics, vol. 351. Providence, RI: Amer Math Soc, 2004, 187–198
- 18 Merhi A, Zervos M. A model for reversible investment capacity expansion. SIAM J Control Optim, 2007, 46: 839–876
- 19 Løkka A, Zervos M. Long-term optimal investment strategies in the presence of adjustment costs. SIAM J Control Optim, 2013, 51: 996–1034
- 20 Du Toit J, Peskir G. Selling a stock at the ultimate maximum. Ann Appl Probab, 2009, 19: 983–1014
- 21 Henderson V, Hobson D. An explicit solution for an optimal stopping/optimal control problem which models an asset sale. Ann Appl Probab, 2008, 18: 1681–1705
- 22 Peskir G, Shiryaev A. Optimal Stopping and Free-Boundary Problems. Berlin: Birkhäuser, 2006
- 23 Pemy M, Yin G, Zhang Q. Liquidation of a large block of stock. J Bank Finance, 2007, 31: 1295–1305

- 24 Pemy M, Yin G, Zhang Q. Liquidation of a large block of stock with regime switching. *Math Finance*, 2008, 18: 629–648
- 25 Pemy M, Yin G, Zhang Q. Selling a large stock position: A stochastic control approach with state constraints. *Commun Inf Syst*, 2007, 7: 93–110
- 26 Yin G, Zhang Q. *Continuous-Time Markov Chains and Applications, A Two-Time-Scale Approach*. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 2013
- 27 Fleming W H, Rishel R. *Deterministic and Stochastic Optimal Control*. New York: Springer-Verlag, 1975
- 28 Crandall M G, Ishii H, Lions P L. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bull Amer Math Soc*, 1992, 27: 1–67
- 29 Fleming W H, Soner H M. *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*. New York: Springer-Verlag, 1993
- 30 Soner H M. Optimal control of a one-dimensional storage process. *Appl Math Optim*, 1985, 13: 175–191
- 31 Ishii H. Uniqueness of unbounded viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Indiana Univ Math J*, 1984, 33: 721–748

Liquidation of a large block stock under a Markov chain model

ZHANG CaoJin, YIN Gerge & ZHANG Qing

Abstract This work develops an optimal liquidation rule for stock trading. There are several distinct features compared to the existing literature. First, in lieu of a Brownian motion based model, a formulation using a continuous-time Markov chain is proposed. Second, in this work, we focus on finding the liquidation strategies for a large block stock. We solve the problem using a dynamic programming approach leading to the associate HJB equations with state constraints. We design a numerical method because a closed-form solution is difficult to obtain. Finally, Two example are provided for demonstration purpose.

Keywords stock liquidation, Markov chain model, optimal selling rule, state constraint

MSC(2010) 91B26, 91G80, 93E20

doi: 10.1360/N012014-00269