



基于等效源法的 Patch 近场声全息

毕传兴* 陈心昭 徐亮 陈剑

(合肥工业大学噪声振动工程研究所, 合肥 230009)

摘要 在基于等效源法的近场声全息的基础上, 提出了基于等效源法的 Patch 近场声全息. 该方法克服了传统近场声全息要求全息面大于源面的缺陷, 它不需要对整个声源建模, 也不需要测量面覆盖整个声源, 可以根据实际需要, 对所感兴趣的区域进行测量, 并直接对该区域进行重建. 由于该方法具有适应性强、计算效率高、测量方便等优点, 因而为近场声全息向实际应用推广创造了条件. 数值仿真研究说明了常规基于等效源法的近场声全息在全息测量数据不足时的局限性及其重建的不可行性, 验证了采用 Patch 近场声全息重建局部声源的可行性和有效性, 以及全息声压存在误差时, 采用正则化处理方法的有效性.

关键词 声全息 近场 等效源 正则化

近场声全息是一种功能强大的噪声源识别和声场可视化工具, 通过测量声源近场的声压信息, 可以重建声源表面以及整个三维声场中各声学量. 由于该方法是在声源近场进行测量, 包含了随距离迅速消逝的“倏逝波”成分, 因而可以突破 Rayleigh 波长的限制, 获得高分辨率的重建图像, 为噪声源的识别与控制提供帮助^[1-3].

Patch 近场声全息是 2003 年 Williams^[4,5]在对近场声全息中“近场”的概念进一步理解的基础上, 提出的一种新的近场声全息重建思想, 最初在基于 FFT 法的近场声全息中得以实现, 并引起了极大的关注. 所谓 Patch 近场声全息, 是指当测量面比实际声源小时的全息重建方法. 在传统的近场声全息中, 通常要求全息面要大于源面, 如: 在基于 FFT 法的近场声全息中, 要求全息面至少为源面的两倍^[6]; 在基于边界元法的近场声全息中, 要求全息面要覆盖整个源面^[7,8]. 这种要求对于小型声源也许可行. 但对于大型声源, 一方面测量点较多, 使测量时间和成本增加, 测量难度加大; 另一方面, 计算效率也大大降低. 实际上, 研究者可能只关心该声源的某个区域的噪声振动特性, 而对其他区域不感兴趣, 在这种情形下, 如果采用常规的近场声全息对整个声源进行测量和建模, 显然是不值得的. Patch 近场声全息的提出, 在很大程度上解决了这方面的缺陷. 该方法允许测量面小于实际源面, 重建区域可以是局部源面, 全息面可以只覆盖局部源面, 因而为近场声全息的实际应用带来了极大的方便. 虽然 Patch 近场声全息

收稿日期: 2006-01-04; 接受日期: 2007-02-03

国家自然科学基金(批准号: 10504006, 50675056)和高等学校博士点基金(批准号: 20060359003)资助项目

* E-mail: cxbi@hfut.edu.cn

是对常规近场声全息的一种近似,且存在一定的误差,但是仍可获得非常有效的结果,这也是 Patch 近场声全息吸引了众多学者研究的关键所在.

在最近两年时间里,国外许多学者对该方法展开了研究,尤其是对 Patch 重建的思想进行了推广,并相继提出了基于统计最优法^[9]、边界元法^[10]等的 Patch 近场声全息和柱面坐标系下的 Patch 近场声全息^[11]等,且都取得了良好的效果.目前, Patch 近场声全息可以归为两类:一类是通过对测量数据补零、重建过程迭代的方法来实现局部声源的重建或全息面的延伸^[10-12],另一类则显得更为简单,它是直接对局部源面建模,并直接建立局部源面和全息面之间的关系,再重建出局部源面的振动信息^[9,13,14].这两种方法都能获得较好的精度.

等效源法最初是由 Koopmann 等^[15,16]提出,并成功用于结构声辐射计算,该方法也可以称为波叠加方法、源模拟法、特解源法等.等效源法的优势是:它通过直接确定分布在声源内部的等效源的源强,即可计算出整个三维声场,因而它避开了边界元法中存在的复杂的插值运算、奇异积分处理以及特征波数处解的非唯一性处理等问题,具有计算速度快,计算精度高、计算稳定性好等优点.文献^[17]已成功将该方法用于实现近场声全息.

本文在前期对等效源法和近场声全息研究的基础上,提出采用等效源法实现 Patch 近场声全息,通过直接建立全息面和局部源面对应的等效源之间的关系实现局部声源的重建.文中首先简单地介绍了基于等效源法的近场声全息原理,并说明了测量面小于源面时,常规重建方法的有效性;在此基础上,提出了基于等效源法的 Patch 近场声全息,并通过数值仿真分析,验证了该方法的有效性,以及在全息声压存在误差时,采取正则化处理方法的有效性.

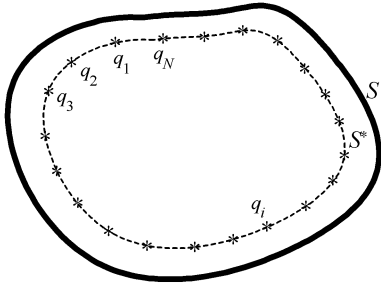


图 1 等效源点的布置图

1 基于等效源法的近场声全息^[17]

基于等效源法的近场声全息的基本思想是通过分布在声源内部的一系列等效源加权叠加来近似实际声场,各等效源的源强由全息面上的复声压确定,声场中所有声学量均可采用等效源构造的传递矩阵和源强计算获得.通常等效源分布在实际声源表面背离分析域一定距离的虚源面上(如图 1 所示),且等效源的个数等于表面节点数.设在声源近场全息面上测量所得全息声压为 p_h ,则全息声压与等效源之间的关系可以描述为

$$p_h = p_h^* Q, \quad (1)$$

式中

$$p_h^* = \begin{bmatrix} p_{h1}^*(r_{h1}) & p_{h2}^*(r_{h1}) & \cdots & p_{hN}^*(r_{h1}) \\ p_{h1}^*(r_{h2}) & p_{h2}^*(r_{h2}) & \cdots & p_{hN}^*(r_{h2}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{h1}^*(r_{hM}) & p_{h2}^*(r_{hM}) & \cdots & p_{hN}^*(r_{hM}) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$Q = [q_1 \ q_2 \ \cdots \ q_N]^T, \quad (3)$$

式中, M 为全息面上测量点的个数, N 为等效源点的个数, $p_{hi}^*(r_{hj})$ 为第 i 个等效源在第 j 个测量点处所产生的声压, q_i 为第 i 个等效源的源强, $i=1, \cdots, N$, $j=1, \cdots, M$.

对于(1)式, 只要传递矩阵 $\mathbf{p}_h^*$ 满足使 $M \geq N$, 则通过奇异值分解法可以唯一确定各个等效源所占的源强 $\mathbf{Q}$, 其中传递矩阵 $\mathbf{p}_h^*$ 的奇异值分解如下^[7]:

$$\mathbf{p}_h^* = \mathbf{U}_h \boldsymbol{\Sigma}_h \mathbf{V}_h^H, \quad (4)$$

式中, $\boldsymbol{\Sigma}_h = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N)$ 为对角阵, 其对角元素为奇异值 σ_i , $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_N \geq 0$; $\mathbf{U}_h$ 和 $\mathbf{V}_h$ 为列向量相互正交的酉矩阵, 即满足 $\mathbf{u}_i^H \mathbf{u}_j = \delta_{ij}$, $\mathbf{v}_i^H \mathbf{v}_j = \delta_{ij}$, δ_{ij} 为 Dirac 常量.

对式(1)中传递矩阵进行奇异值分解和求逆变换, 可得源强列向量为

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{p}_h^*)^+ \mathbf{p}_h = ((\mathbf{p}_h^*)^H \mathbf{p}_h^*)^{-1} (\mathbf{p}_h^*)^H \mathbf{p}_h = \mathbf{V}_h \boldsymbol{\Sigma}_h^{-1} \mathbf{U}_h^H \mathbf{p}_h. \quad (5)$$

式中, 上标 “+” 和 “H” 分别为广义逆和 Hermitian 算子.

根据计算所得源强, 可以预测出声场中的声压、质点振速、声强以及辐射声功率等. 其中场点 r 处的声压和质点振速可以分别表示为

$$p(r) = \mathbf{p}^*(r) \mathbf{Q}, \quad (6)$$

$$\mathbf{v}(r) = \mathbf{v}^*(r) \mathbf{Q}, \quad (7)$$

式中

$$\mathbf{p}^*(r) = [p_1^*(r) \ p_2^*(r) \ \dots \ p_N^*(r)], \quad (8)$$

$$\mathbf{v}^*(r) = [v_1^*(r) \ v_2^*(r) \ \dots \ v_N^*(r)], \quad (9)$$

式中 $p_i^*(r)$ 和 $v_i^*(r)$ 分别为第 i 个等效源在场点 r 处产生的声压和质点振速.

在基于等效源法的近场声全息中, 为了获得有效的重建结果, 首先必须要求测量点数 M 不小于等效源个数 N , 即不小于声源表面节点数; 此外还要求全息面要大于源面, 以包含足够的源面信息, 因而对于大型声源, 要求测量点多, 且测量面要足够大. 事实上, 在很多情形下, 人们并不是对声源的所有区域都感兴趣, 或者说只想知道声源的某个区域的振动情形. 此时, 如果只减少测量点数, 即只在感兴趣的区域测量, 并采用此数据重建整个声源, 则由于测量面小于源面, 测量点小于声源表面节点数, 传递方程为欠定, 所获得的结果会出现较大的误差; 如果同时减少等效源的个数, 并使其满足不大于测量点个数的条件, 但由于等效源个数不足以近似整个声源实际边界条件, 同样重建过程失效. 因而如果采用上述方法进行分析, 唯一的途径就是对整个声源进行测量和建模. 对此下面将通过一个算例说明.

选取一个半径为 0.4 m 的球源作为研究对象, 球源的表面法向振速和全息声压是由位于声源内部 (0, 0, 0.3 m) 和 (-0.2 m, 0, 0.2 m) 处的两个半径为 a , 表面径向振速为 V 的脉动球产生. 该脉动球在场点 r 处声压的解析解为

$$p(r) = -V \cdot \frac{i 2 \pi f \rho a^2}{r(1 - ika)} \cdot \exp[ik(r - a)], \quad (10)$$

式中 $a = 0.03$ m, 径向速度 $V = 1$ m/s, 空气密度为 $\rho = 1.2$ kg/m³, 声源振动频率为 1 kHz.

如图 2 所示, 全息面为曲面 ($r = 0.44$ m, $34\pi/41 \leq \phi \leq 70\pi/41$, $\pi/6 \leq \theta \leq 13\pi/30$), 全息面上均匀地分布了 19×9 个测量点, 球源表面分布了 41×31 个节点, 等效源所在的虚源面为球源内与球源表面相距 0.28 m 的球面, 其中球面坐标与 Cartesian 坐标之间的关系如图 3 所示. 为便于研究, 定义重建误差为

$$\varepsilon = \frac{\|\text{Re}(\mathbf{v}_{ns} - \hat{\mathbf{v}}_{ns})\|}{\|\text{Re}(\hat{\mathbf{v}}_{ns})\|} \times 100 (\%), \quad (11)$$

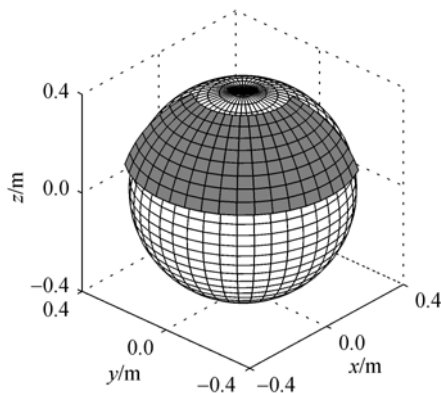


图2 声源表面节点和全息面测量点分布图

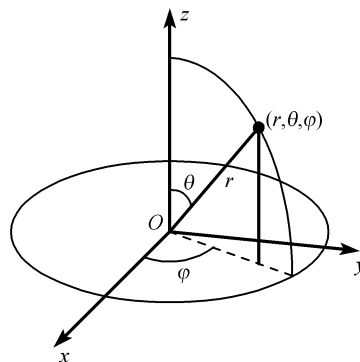


图3 球面坐标与 Cartesian 坐标之间的关系图

式中 $\text{Re}(\cdot)$ 指复数的实部, $\hat{v}_{ns}$ 为表面法向振速理论值.

根据理论公式计算所得球源表面理论法向振速如图4所示. 当分布在虚源面上的等效源数与表面节点数相等时, 采用上述全息面上的声压重建所得整个声源表面法向振速如图5所示. 显然, 此时全息面远小于源面, 测量点数远远小于等效源数, 所建立的传递方程为欠定, 其重建的结果严重偏离理论值, 此时重建误差 ε 已超过 $10^6\%$, 重建已毫无意义. 当分布在虚源面上的等效源数减少到与测量点数相等时, 重建所得整个声源表面法向振速如图6所示. 此时虽然由所建立的方程组可以唯一确定一组源强, 但是由于等效源数过少, 不足以近似整个声源实际边界条件, 其重建结果同样完全失效, 此时重建误差 ε 也已超过 $10^6\%$.

由上述重建结果可知, 对于上述全息测量数据, 如果采用常规的对整个声源建模的方法重建, 无论是直接重建还是减小等效源的个数再重建, 都会存在很大的误差. 如果要想获得有效的结果, 就必须增加测量点的数量, 并使全息面尽可能包含源面辐射的信息, 即全息面要大于源面. 事实上这样做很不值得, 一方面计算出大量无用的信息, 同时又增加了测量和计算时间以及成本. 而 Patch 近场声全息的提出则正好解决了这个问题.

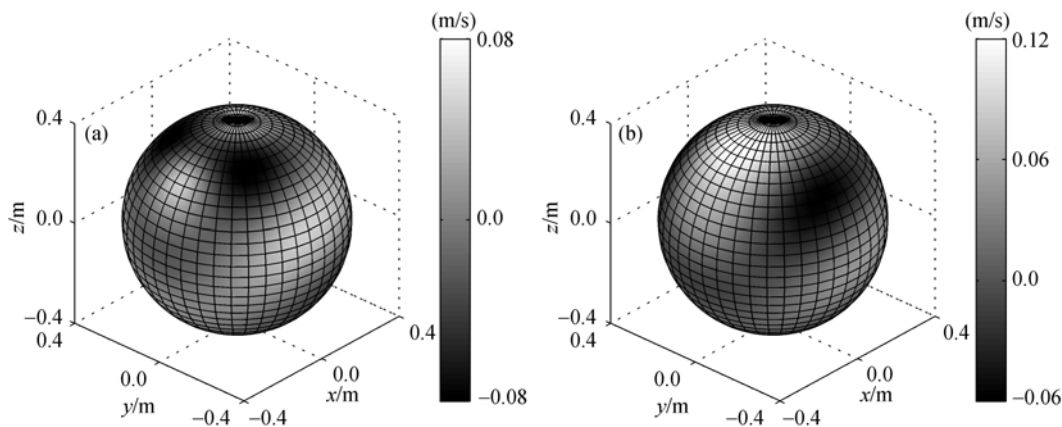


图4 声源表面法向振速实部和虚部理论值

(a)为实部; (b)为虚部

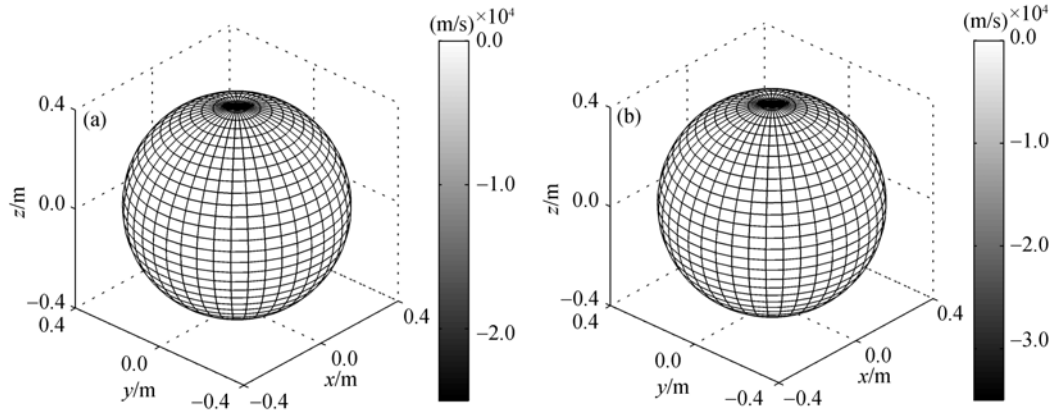


图5 当等效源数和表面节点数相同时,重建整个声源表面法向振速实部和虚部
(a)为实部; (b)为虚部

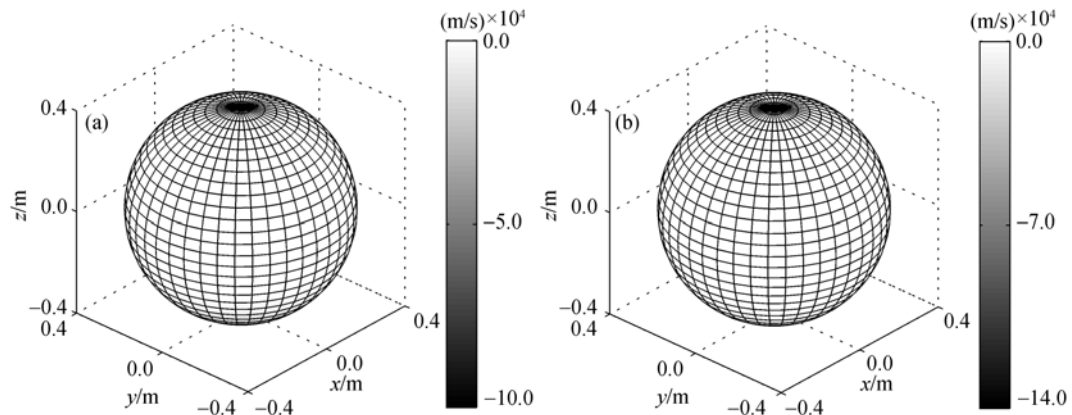


图6 等效源数减少到测点数相同后,重建整个声源表面法向振速实部和虚部
(a)为实部; (b)为虚部

2 Patch 近场声全息

与常规的近场声全息不同的是, Patch近场声全息并不需要对整个声源建模,也不需要测量面覆盖整个声源,而是根据实际需要,对所感兴趣的区域进行测量,并对局部区域进行重建. 对于上述仿真实例,此时只对全息面正前方区域($r=0.4\text{ m}$, $34\pi/41 \leq \phi \leq 70\pi/41$, $\pi/6 \leq \theta \leq 13\pi/30$)进行建模(如图7所示),并直接建立源面和全息面之间的关系.

由(1)式可知,全息面上声压与等效源之间的关系为

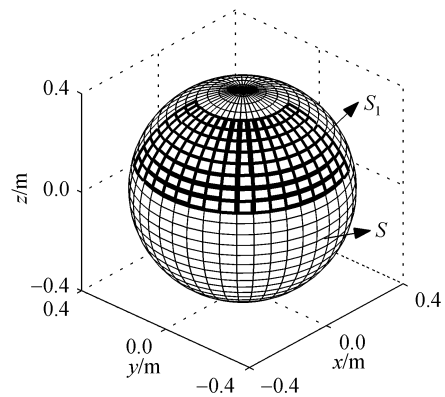


图7 所选局部声源分布图

$$p_h = p_h^* Q = p_{h1}^* Q_1 + p_{h2}^* Q_2, \quad (12)$$

等式右边第 1 项为 S_1 区域产生, Q_1 对应该区域节点所对应等效源的源强; 右边第 2 项为 $S - S_1$ 区域产生, Q_2 对应该区域节点所对应等效源的源强. 由于全息面与所需重建的局部源面非常近, 因而局部源面 S_1 以外区域对全息面上声压的贡献非常小, 即通常情形下, $p_{h2}^* Q_2 \ll p_h$, 因而在 Patch 近场声全息中, (12) 式中 $p_{h2}^* Q_2$ 作为微小的误差处理, 则 S_1 区域所对应的等效源与全息声压的关系近似为

$$p_h \approx p_{h1}^* Q_1. \quad (13)$$

对于 (13) 式, 采用第 1 节中相似方法可以重建 Q_1 为

$$Q_1 = (p_{h1}^*)^+ p_h = \left((p_{h1}^*)^H p_{h1}^* \right)^{-1} (p_{h1}^*)^H p_h = V_{h1} \Sigma_{h1}^{-1} U_{h1}^H p_h, \quad (14)$$

式中 Σ_{h1} 为对角阵, U_{h1} 和 V_{h1} 为酉矩阵.

根据重建的源强, 可以预测 S_1 区域声源表面法向振速为

$$v_{nS_1} = v_{nS_1}^* Q_1. \quad (15)$$

对于上述算例, 源面 ($r = 0.4$ m, $34\pi/41 \leq \phi \leq 70\pi/41$, $\pi/6 \leq \theta \leq 13\pi/30$) 的理论法向振速分布如图 8 所示. 采用本节方法计算所得声源表面法向振速如图 9 所示, 其重建误差 ε 为 0.76%. 显然, 此时重建结果和实际结果已基本一致, 重建信息能够准确地描述出声源表面的实际振动信息.

由此可知, Patch 近场声全息可以克服常规近场声全息要求全息测点多、需要对整个声源建模的缺点, 它只需对感兴趣区域进行测量和建模, 即可重建出该区域的振速分布. 虽然该方法存在一定的重建误差, 但是仍能比较准确地给出声源的实际振动信息. 由于该方法可以大大减少测量和计算工作量, 而且实现起来比较容易, 因而为近场声全息走向实际应用创造了良好的条件.

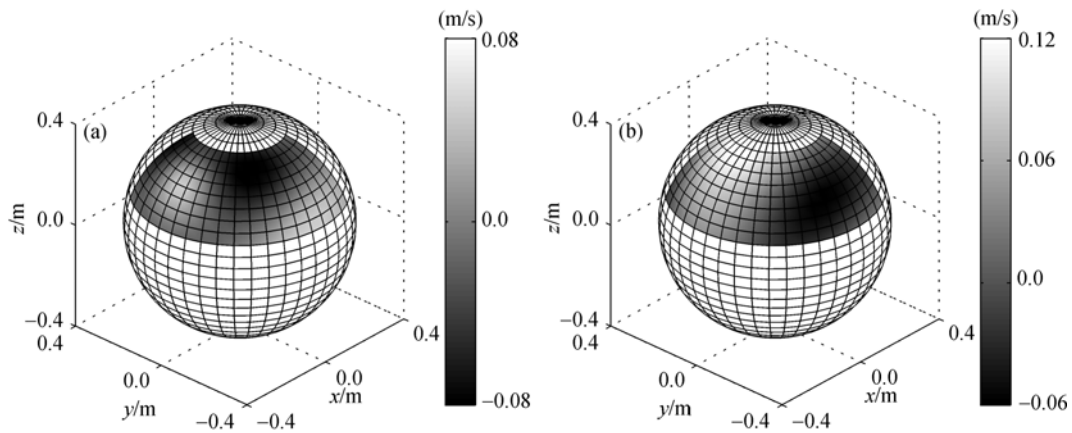


图 8 所取局部声源表面法向振速实部和虚部理论值

(a) 为实部; (b) 为虚部

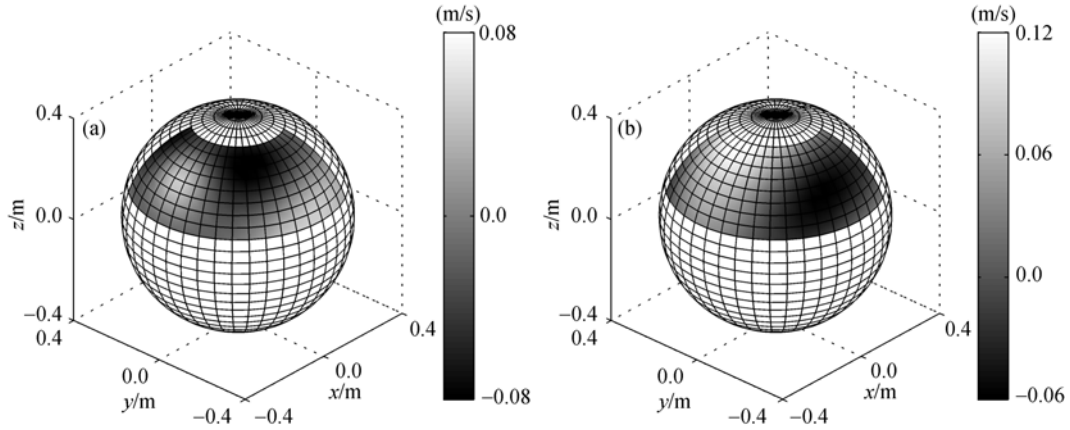


图9 采用本节方法重建局部声源表面法向振速实部和虚部

(a)为实部; (b)为虚部

3 正则化处理

事实上, 当Patch近场声全息中近似所带来的误差或者全息声压的测量误差的影响较大时, 还可以通过正则化处理方法进行控制. 所谓正则化方法是指在全息重建求逆的过程中对各奇异值分解项进行滤波处理, 通过滤掉奇异值分解项中对误差非常敏感而对重建结果贡献小的项的影响, 达到较好的重建效果^[18].

上述全息重建过程是在等效源源强重建时实施的, 此时通过正则处理后重建的源强为

$$(\mathbf{Q}_1)_{\text{reg}} = \mathbf{V}_{h1} \mathbf{F}_{h1} \mathbf{\Sigma}_{h1}^{-1} \mathbf{U}_{h1}^H \mathbf{p}_h, \quad (16)$$

式中 $\mathbf{F}_{h1} = \text{diag}(f_1, f_2, \dots, f_{N_1})$ 为对角矩阵, 其对角元素 f_i 为对应每一个奇异值分解项的滤波系数, N_1 为 Patch 源面上的节点个数.

根据滤波系数的选取方法不同, 正则化方法可以分为不同的种类. 当滤波系数为

$$\begin{cases} f_i = 1, & \sigma_i \geq \alpha \sigma_1, \\ f_i = 0, & \sigma_i < \alpha \sigma_1, \end{cases} \quad (17)$$

时, 称其为截断滤波正则化法^[19], 其中 α 为截断系数比. 当滤波系数为

$$f_i^{(k)} = 1 - (1 - \beta \sigma_i^2)^k \quad (18)$$

时, 称其为Landweber反复正则化法^[20], 其中 k 为反复计算的次数, $f_i^{(k)}$ 为第 k 次计算时的滤波系数, β 为收敛因子. 当滤波系数为

$$f_i = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \lambda^2} \quad (19)$$

时, 称其为标准Tikhonov正则化方法^[21], 其中 λ 为正则化系数.

对于上述正则化方法, 截断系数比 α 、反复次数 k 以及正则化系数 λ 直接控制着重建结果对误差扰动的影响, 因而准确地选取这些系数也非常关键. 到目前为止, 还没有一种最好的选取方法, 根据具体情形的不同, 可以采用信噪比法^[19]、Morozov离差原理法^[22]、L曲线准则^[23]或广义交叉校验法^[24]等来选取.

对于上述算例,在全息声压中加入 30dB 信噪比的随机误差,再采用 Patch 近场声全息重建.如果不采取正则化处理,直接重建的结果如图 10 所示.显然,重建结果与图 8 所示理论值存在较大的差异,此时重建误差 ε 已达 257.7%,因而必须采取正则化处理措施.本文采取标准 Tikhonov 正则化处理方法,其正则化系数通过 L 曲线准则选取为 0.3.经过正则化处理后,重建所得结果如图 11 所示,其重建误差 ε 为 9.2%.显然,此时重建结果已接近实际结果.由此可知,如果全息声压存在一定的误差,通过正则化处理方法同样可以获得有效的重建结果.

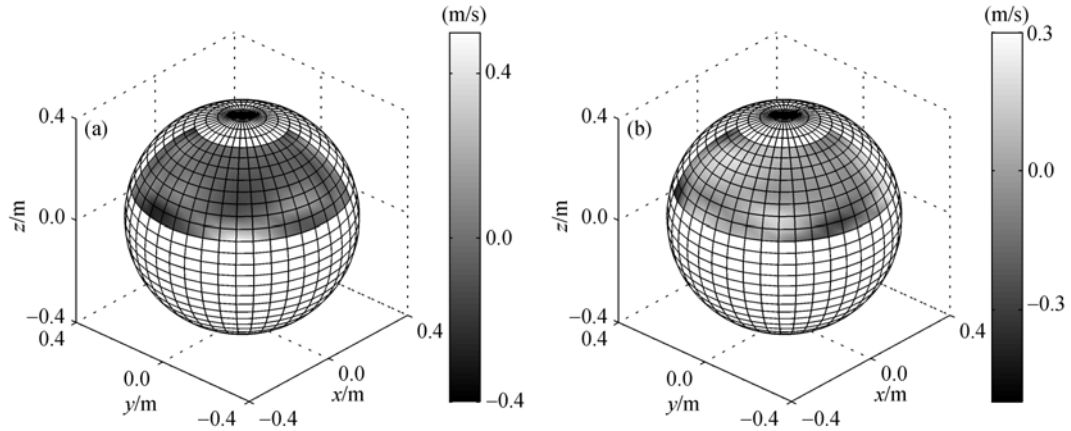


图 10 加入随机误差而不采取正则化方法,采用 Patch 近场声全息重建局部声源表面法向振速实部和虚部
(a)为实部;(b)为虚部

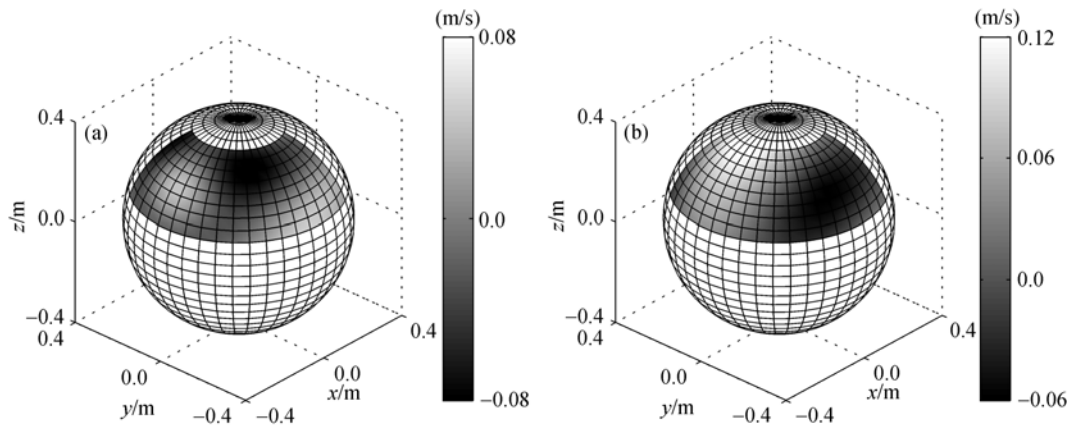


图 11 加入随机误差且采取正则化方法,采用 Patch 近场声全息重建局部声源表面法向振速实部和虚部
(a)为实部;(b)为虚部

4 结论

(i) 在基于等效源法的近场声全息的基础上,进一步提出了基于等效源法的 Patch 近场声全息.该方法克服了传统的近场声全息要求全息面要大于源面的缺陷,它不需要对整个声源建模,也不需要测量面覆盖整个声源,可以根据实际需要,对所感兴趣的区域进行测量,并对局部区域进行重建.因此,该方法具有适应性强、计算效率高、测量方便等优点,为近场声

全息向实际推广创造了条件.

(ii) 对于 Patch 近场声全息本身近似所带来的误差或全息声压的测量误差, 通过采取正则化处理措施, 可以将误差的影响减小到最小, 以保证重建结果的有效性.

(iii) 数值仿真研究说明了常规基于等效源法的近场声全息在全息测量数据不足时的局限性及其重建的不可行性, 验证了基于等效源法的 Patch 近场声全息重建局部声源的可行性和有效性, 以及在全息声压存在误差时, 采用正则化处理方法的有效性.

参 考 文 献

- 1 Williams E G, Maynard J D, Skudrzyk E. Sound source reconstruction using a microphone array. *J Acoust Soc Am*, 1980, 68(1): 340—344[DOI]
- 2 Veronesi W A, Maynard J D. Digital holographic reconstruction of source with arbitrarily shaped surfaces. *J Acoust Soc Am*, 1989, 85: 588—598[DOI]
- 3 Wang Z, Wu S F. helmholtz equation-least squares method for reconstructing the acoustic pressure field. *J Acoust Soc Am*, 1997, 102(4): 2020—2032[DOI]
- 4 Williams E G. Continuation of acoustic near-fields. *J Acoust Soc Am*, 2003, 113(3): 1273—1281[DOI]
- 5 Williams E G, Houston B H. Fast Fourier transform and singular value decomposition formulations for patch nearfield acoustical holography. *J Acoust Soc Am*, 2003, 114(3): 1322—1333[DOI]
- 6 Maynad J D, Williams E G, Lee Y. Nearfield acoustic holography I: Theory of generalized holography and development of NAH. *J Acoust Soc Am*, 1985, 78(4): 1395—1413[DOI]
- 7 Bai M R. Application of BEM (boundary element method)-based acoustic holography to radiation analysis of sound sources with arbitrarily shaped geometries. *J Acoust Soc Am*, 1992, 92: 533—549[DOI]
- 8 Kim B K, Ih J G. On the reconstruction of the vibro-acoustic field over the surface enclosing an interior space using the boundary element method. *J Acoust Soc Am*, 1996, 100(5): 3003—3016[DOI]
- 9 Hald J. Patch near-field acoustical holography using a new statistically optimal method. In: *Proc INTER-NOISE 2003*. Seogwipo, Korea: I-INCE, 2003. 2203—2210
- 10 Saijyou K, Uchida H. Data extrapolation method for boundary element method-based near-field acoustical holography. *J Acoust Soc Am*, 2004, 115(2): 785—796[DOI]
- 11 Lee M Y, Bolton J S. Patch near-field acoustical holography in cylindrical geometry. *J Acoust Soc Am*, 2005, 118(6): 3721—3732[DOI]
- 12 Saijyou K, Yoshikawa S. Reduction methods of the reconstruction error for large-scale implementation of near-field acoustical holography. *J Acoust Soc Am*, 2001, 110(4): 2007—2023[DOI]
- 13 Sarkissian A. Extension of measurement surface in near-field acoustic holography. *J Acoust Soc Am*, 2004, 115(4): 1593—1596[DOI]
- 14 Sarkissian A. Method of superposition applied to patch near-field acoustic holography. *J Acoust Soc Am*, 2005, 118(2): 671—678[DOI]
- 15 Koopmann G H, Song L, Fahnlne J. A method for computing acoustic fields based on the principle of wave superposition. *J Acoust Soc Am*, 1989, 86(5): 2433—2438[DOI]
- 16 Song L, Koopmann G H, Fahnlne J. Numerical errors associated with the method of superposition for computing acoustic fields. *J Acoust Soc Am*, 1991, 89(6): 2625—2633[DOI]
- 17 毕传兴, 陈心昭, 周蓉, 等. 基于等效源法的近场声全息技术. *中国科学 E 辑: 技术科学*, 2005, 35(5): 535—548
- 18 Williams E G. Regularization methods for near-field acoustical holography, *J Acoust Soc Am*, 2001, 110(4): 1976—1988[DOI]
- 19 Williams E G, Houston B H. Interior near-field acoustical holography in flight. *J Acoust Soc Am*, 2000, 108(4): 1451—1463
- 20 Landweber L. An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind. *Am J Math*, 1951, 73: 615—624
- 21 Tikhonov A N. Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method. *Soviet Math Dokl*, 1963, 4: 1035—1038
- 22 Morozov V A. On regularization of Ill-posed problems and selection of regularization parameter. *J Comp Math Phys*, 1966, 6(1): 170—175
- 23 Hansen P C. Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve. *SIAM Rev*, 1992, 34: 561—580[DOI]
- 24 Golub G H, Heath M, Wahba G. Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter. *Technometrics*, 1979, 21: 215—223