

各向异性双重孔隙介质有效应力定律

赵颖 陈勉 张广清

(石油大学石油天然气工程学院, 北京 102249. E-mail: cc_zhao@163.com)

摘要 通过对双重孔隙介质有效应力的研究, 建立了各向异性双重孔隙介质线弹性变形的有效应力定律. 并在此基础上, 分析了横向各向同性及结构各向异性、固体材料各向同性时的有效应力定律形式. 通过该有效应力定律进行以下两种简化: (1) 简化成各向同性双重孔隙介质有效应力定律; (2) 简化成各向异性单重孔隙有效应力定律, 并将简化后的模型分别与已有的模型相比较, 说明该模型的合理性.

关键词 各向异性 单重孔隙介质 双重孔隙介质 孔隙 裂隙 有效应力

有效应力定律对于描述孔隙流体压力作用下的孔隙介质的力学响应十分重要. Terzaghi首先根据经验将有效应力概念引入到土壤力学中. 他认为^[1]: (i) 增加外部静水压力与降低相同值的孔隙压力所产生的材料的体积变化相同; (ii) 剪切强度仅与法向应力 σ 与孔隙压力 p 的差有关. 通过上述观点建立的有效应力定律认为 $\alpha = 1$. 对于土壤来说, 这个假定是合理的. 但是, 对于岩石而言, 则必须考虑 α 与1的偏差.

对于单重孔隙介质, 最常采用的有效应力张量形式为

$$\sigma_{ij}^e = \sigma_{ij} - \alpha p \delta_{ij}, \quad (1)$$

其中, σ_{ij}^e 是有效应力, σ_{ij} 是施加应力(以压应力为正), p 为孔隙流体压力, δ_{ij} 为Kronecker符号, α 为有效应力系数($0 < \alpha \leq 1$). 对于线弹性变形, Geertsma^[2], Chen H Y^[3], Nur & Byerlee^[4]等给出的 α 值为:

$$\alpha = 1 - \frac{c_s}{c_b}, \quad (2)$$

其中, c_b 为干孔隙材料的压缩系数, c_s 为无孔隙材料的压缩系数.

(2)式是基于孔隙材料和固体材料都是各向同性这一假设建立起来的. 事实上, 有效应力定律的一般形式(1)式也是基于各向同性这一基本假设建立起来的.

对于各向异性单重孔隙介质, Carroll^[5,6]讨论了相应的有效应力定律形式.

虽然有效应力定律对于单重孔隙介质来说已经比较完善, 但这种有效应力形式对于裂隙性孔隙介质来说并不适用. 其后Chen H Y, 陈勉和黎水泉^[7~9]等人将Barrenblatt^[10]首先提出的双重孔隙概念模型应

用到有效应力定律中, 得到了各向同性双重孔隙介质的有效应力定律:

$$\sigma_{ij}^e = \sigma_{ij} - \alpha_1 p_1 \delta_{ij} - \alpha_2 p_2 \delta_{ij}, \quad (3)$$

$$\alpha_1 = 1 - \frac{c^*}{c_b}, \quad \alpha_2 = \frac{c^* - c_s}{c_b}, \quad (4)$$

其中, p_1 为基质孔隙流体压力; p_2 为裂隙流体压力; α_1 , α_2 为有效应力系数; $*$ 代表单重孔隙非裂隙系统; c 为压缩系数; 下标 b, s 分别表示骨架体积和固体.

本文将对各向异性双重孔隙介质有效应力定律进行研究.

1 各向异性双重孔隙介质线弹性变形的有效应力定律

假定干孔隙材料发生的变形为线弹性变形, 则应力-应变关系为:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}, \quad \epsilon_{ij} = M_{ijkl} \sigma_{kl}, \quad (5)$$

其中, C_{ijkl} 和 M_{ijkl} 分别为弹性系数张量和弹性柔度张量, 重复指标表示求和. 弹性张量关于指标 $(i, j)(k, l)$ 和 (ij, kl) 对称. M_{ijkl} 和 C_{ijkl} 之间存在下列关系^[5]:

$$C_{ijkl} M_{klmn} = \frac{1}{2} (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm}). \quad (6)$$

考虑双重孔隙材料的一个代表性体积单元, 其内包含有足够多的固体颗粒、基质孔隙和裂隙. 为了图解方便, 在下面的代表性体积单元中只画出了一个孔隙和一个裂隙, 其受载形式如下(如图1(a)所示):

$$t_i^{B_0} = \sigma_{ij} n_j, \quad t_i^{B_1} = p_1 n_i, \quad t_i^{B_2} = p_2 n_i, \quad (7)$$

其中, B_0 , B_1 和 B_2 分别为双重孔隙材料代表性体积单元的外边界及孔隙、裂隙的边界; $t_i^{B_0}$, $t_i^{B_1}$ 和 $t_i^{B_2}$ 则分别表示作用在上述边界上的力.

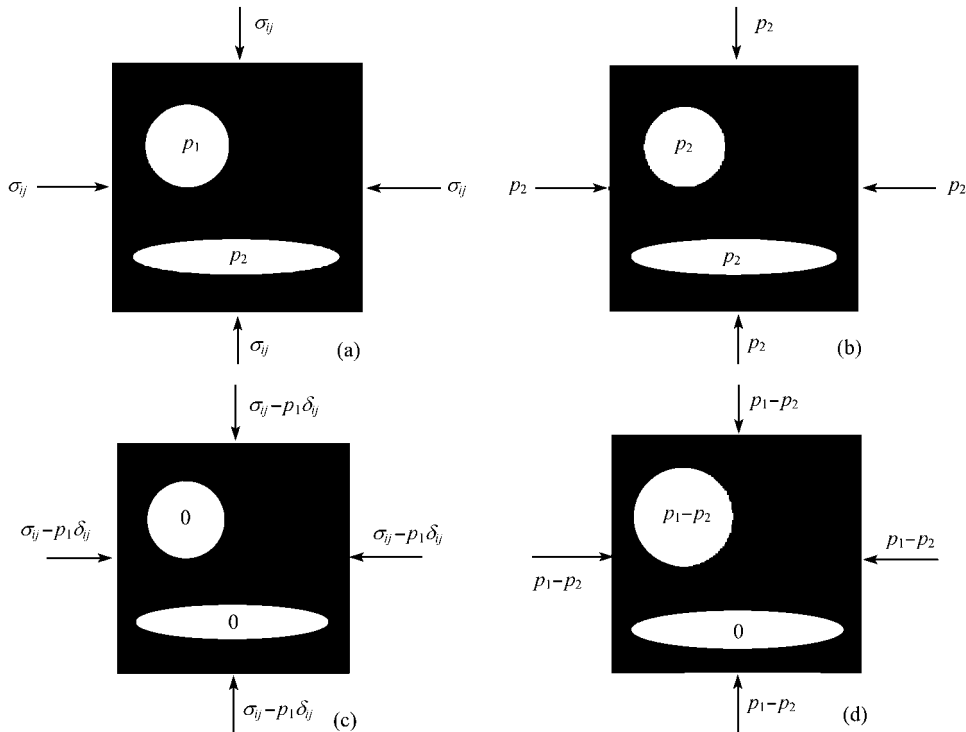


图 1 代表性体积单元所受载荷示意图

现将上述载荷情况看成三种分开载荷的叠加(分别如图 1(b)~(d)所示):

$$t_i^{B_0} = p_2 n_i, \quad t_i^{B_1} = p_2 n_i, \quad t_i^{B_2} = p_2 n_i, \quad (8)$$

和

$$t_i^{B_0} = \sigma_{ij} n_j - p_1 n_i, \quad t_i^{B_1} = 0, \quad t_i^{B_2} = 0, \quad (9)$$

及

$$t_i^{B_0} = (p_1 - p_2) n_i, \quad t_i^{B_1} = (p_1 - p_2) n_i, \quad t_i^{B_2} = 0. \quad (10)$$

(8)式表示的载荷情况(如图 1(b)所示)相当于对固体骨架作用一个均匀的静水压力 p_2 , 并使之产生一个均匀应变. 因此, 孔隙材料的应变处处相等; 事实上, 固体骨架的均匀应变使得孔隙空间应变与之相等. Nur和Byerlee^[4]对此做了明确说明, 他们指出(8)式所示载荷情况是通过将孔隙中填满固体颗粒来实现的. 因此, 在均匀固体中由上述载荷产生的应变 $\varepsilon_{ij}^{(1)}$ 是均匀的, 其形式为

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = M_{ijkl}^s (p_2 \delta_{kl}) = p_2 M_{ijkk}^s, \quad (11)$$

其中, M_{ijkl}^s 为固体材料的弹性柔度张量.

(9)式所示载荷情况(如图 1(c)所示)相当于对均质的双重孔隙岩石试样施加均匀应力 $\sigma_{ij} - p_1 \delta_{ij}$, 而该试样是干的孔隙材料, 即孔隙、裂隙压力均为零. 故

其产生的应变 $\varepsilon_{ij}^{(2)}$ 的表达式为:

$$\varepsilon_{ij}^{(2)} = M_{ijkl} (\sigma_{kl} - p_1 \delta_{kl}), \quad (12)$$

其中, M_{ijkl} 为双重孔隙介质的弹性柔度张量.

(10)式所示载荷情况(如图 1(d)所示)相当于对均质的双重孔隙岩石试样施加均匀应力 $p_1 - p_2$, 岩石基质孔隙被固体颗粒所充满, 而岩石裂隙是干的, 即裂隙压力为零. 故由该种载荷产生的应变 $\varepsilon_{ij}^{(3)}$ 的表达式为

$$\varepsilon_{ij}^{(3)} = M_{ijkl}^* (p_1 - p_2) \delta_{kl} = (p_1 - p_2) M_{ijkk}^*, \quad (13)$$

其中, M_{ijkl}^* 为单重孔隙介质的柔度张量.

因此, 由(7)式所示载荷产生的总应变 ε_{ij} 为

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)} + \varepsilon_{ij}^{(3)} \\ &= p_2 M_{ijkk}^s + M_{ijkl} (\sigma_{kl} - p_1 \delta_{kl}) \\ &\quad + (p_1 - p_2) M_{ijkk}^* \\ &= M_{ijkl} \sigma_{kl} - p_1 (M_{ijkk} - M_{ijkk}^*) \\ &\quad + p_2 (M_{ijkk}^s - M_{ijkk}^*), \end{aligned} \quad (14)$$

将上式代入到有效应力 σ_{ij}^e 所满足的应力-应变关系式

$$\sigma_{ij}^e = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad \varepsilon_{ij} = M_{ijkl} \sigma_{kl}^e, \quad (15)$$

得到

$$\sigma_{ij}^e = C_{ijkl}[M_{klmn}\sigma_{mn} - p_1(M_{klmm} - M_{klmm}^*) + p_2(M_{klmm}^s - M_{klmm}^*)], \quad (16)$$

并利用(6)式, 得到

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^e &= \sigma_{ij} - p_1(\delta_{ij} - C_{ijkl}M_{klmm}^*) \\ &\quad - p_2(C_{ijkl}M_{klmm}^* - C_{ijkl}M_{klmm}^s) \\ &= \sigma_{ij} - \alpha_{ij}^1 p_1 - \alpha_{ij}^2 p_2, \end{aligned} \quad (17)$$

(17)式即为各向异性双重孔隙介质线弹性变形的有效应力定律. 其中

$$\begin{cases} \alpha_{ij}^1 = \delta_{ij} - C_{ijkl}M_{klmm}^*, \\ \alpha_{ij}^2 = C_{ijkl}M_{klmm}^* - C_{ijkl}M_{klmm}^s. \end{cases} \quad (18)$$

为 Biot 系数张量(1, 2 分别代表基质孔隙和裂隙).

对于单重孔隙介质, $M_{ijkl} = M_{ijkl}^*$ 且 $p_1 = p_2 = p$, 则各向异性双重孔隙介质线弹性变形的有效应力定律(17)式简化为

$$\sigma_{ij}^e = \sigma_{ij} - p(\delta_{ij} - C_{ijkl}M_{klmm}^w) = \sigma_{ij} - \alpha_{ij} p, \quad (19)$$

其中, $\alpha_{ij} = \delta_{ij} - C_{ijkl}M_{klmm}^*$ 为 Biot 系数张量.

(19)式即为各向异性单重孔隙介质线弹性变形的有效应力定律, 与Carroll^[5]所给出的形式相同.

2 横向各向同性双重孔隙介质线弹性变形的有效应力定律

对于横向各向同性双重孔隙介质, 有效应力定律(17)、(19)式将变得更为容易确定. 横向各向同性是地球物理应用的一种重要类型, 因为材料的特性经常是在层理面上为各向同性, 而在与该层理面垂直的方向上表现为各向异性. 各向异性有的时候是结构各向异性(孔隙几何体的各向异性), 有的时候是固有各向异性(固体材料的各向异性), 或者两者皆有.

对于横向各向同性材料, 其弹性模量张量的形式为^[5]

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} \\ &\quad + \alpha(\delta_{ik}h_jh_l + \delta_{jl}h_ih_k + \delta_{il}h_jh_k + \delta_{jk}h_ih_l) \\ &\quad + \beta(\delta_{ij}h_kh_l + \delta_{kl}h_ih_j) + \gamma h_ih_jh_kh_l, \end{aligned} \quad (20)$$

其中, $\mu, \lambda, \alpha, \beta$ 和 γ 是常数, h_i 是对称轴的方向余弦. 对于各向同性材料, α, β 和 γ 消失, μ, λ 为拉梅弹性常数(Lamé constants). 柔度张量具有与上述弹性模量张量相似的形式, 其柔度系数 $\mu_1, \lambda_1, \alpha_1, \beta_1$ 和 γ_1 可以由模量 $\mu, \lambda, \alpha, \beta$ 和 γ 表示.

以下研究发生体积应变和发生对称轴方向的单

轴应变时所分别对应的应力, 及施加静水压力和施加对称轴方向的单轴应力时所分别产生的应变.

(1) 首先, 研究 $\varepsilon_{ij} = \varepsilon\delta_{ij}$, 则

$$\sigma_{ij} = \varepsilon C_{ijkk}, \quad C_{ijkk} = A\delta_{ij} + B h_i h_j, \quad (21)$$

其中

$$A = 2\mu + 3\lambda + \beta, \quad B = 4\alpha + 3\beta + \gamma. \quad (22)$$

(2) 当 $\varepsilon_{ij} = \varepsilon h_i h_j$ 时, 得到

$$\sigma_{ij} = \varepsilon C_{ijkl} h_k h_l, \quad C_{ijkl} h_k h_l = C\delta_{ij} + D h_i h_j, \quad (23)$$

其中

$$C = \lambda + \beta, \quad D = 2\mu + 4\alpha + \beta + \gamma. \quad (24)$$

(3) 同样地, 考虑 $\sigma_{ij} = \sigma\delta_{ij}$, 则

$$\varepsilon_{ij} = \sigma M_{ijkk}, \quad M_{ijkk} = A_1\delta_{ij} + B_1 h_i h_j, \quad (25)$$

其中, $A_1 = 2\mu_1 + 3\lambda_1 + \beta_1, B_1 = 4\alpha_1 + 3\beta_1 + \gamma_1$. 可见, A_1, B_1 的形式与式(22)中 A, B 的形式相同, 只要将模量 $\mu, \lambda, \alpha, \beta$ 和 γ 换成 $\mu_1, \lambda_1, \alpha_1, \beta_1$ 和 γ_1 即可.

(4) 当 $\sigma_{ij} = \sigma h_i h_j$ 时, 得到

$$\varepsilon_{ij} = \sigma M_{ijkl} h_k h_l, \quad M_{ijkl} h_k h_l = C_1\delta_{ij} + D_1 h_i h_j, \quad (26)$$

其中, C_1, D_1 的形式与(24)式中 C, D 的形式相同, 只要将模量 $\mu, \lambda, \alpha, \beta$ 和 γ 换成 $\mu_1, \lambda_1, \alpha_1, \beta_1$ 和 γ_1 即可.

从(21)式可以看出, 并不是在静水压应力状态下产生体积应变; 而(25)式则表明静水压应力产生的应变不是体积应变.

利用方程(6), 可以得到用 A, B, C 和 D 表示的 A_1, B_1, C_1 和 D_1 的表达式(反之也可), 其关系如下:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{D}{AD - BC}, \quad B_1 = \frac{-B}{AD - BC}, \\ C_1 &= \frac{-C}{AD - BC}, \quad D_1 = \frac{A}{AD - BC}. \end{aligned} \quad (27)$$

将(27)式中的 A_1, B_1, C_1 和 D_1 与 A, B, C 和 D 对调, 即可得到用 A_1, B_1, C_1 和 D_1 表示的 A, B, C 和 D 的表达式.

将(23)和(25)式代入到(17)式中, 得到横向各向同性双重孔隙介质有效应力定律

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^e &= \sigma_{ij} - p_1[\delta_{ij}(1 - AA_1^* - CB_1^*) - (BA_1^* + DB_1^*)h_i h_j] \\ &\quad - p_2[\delta_{ij}(AA_1^* + CB_1^* - AA_1^s - CB_1^s) \\ &\quad + (BA_1^* + DB_1^* - BA_1^s - DB_1^s)h_i h_j], \end{aligned} \quad (28)$$

或

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^e &= \sigma_{ij} - p_1 \left[\delta_{ij} \left(1 - \frac{AD^* - CB^*}{A^*D^* - B^*C^*} \right) - \left(\frac{BD^* - DB^*}{A^*D^* - B^*C^*} \right) h_i h_j \right] \\ &\quad - p_2 \left[\delta_{ij} \left(\frac{AD^* - CB^*}{A^*D^* - B^*C^*} - \frac{AD^s - CB^s}{A^sD^s - B^sC^s} \right) \right] \end{aligned}$$

$$+\left(\frac{BD^*-DB^*}{A^*D^*-B^*C^*}-\frac{BD^S-DB^S}{A^SD^S-B^SC^S}\right)h_ih_j\Bigg], \quad (29)$$

其中, 柔度参数 A_1^S, B_1^S 与 A_1^*, B_1^* 描述的分别是固体材料和单重孔隙材料在静水压力状态下的变形情况; 而模量参数 A^S, B^S, C^S, D^S 与 A^*, B^*, C^*, D^* 描述的则分别是固体材料和单重孔隙材料发生体积应变和单轴应变时的应力情况. 上式也可写成下述形式:

$$\sigma_{ij}^e = \sigma_{ij} - \alpha_1 p_1 [\delta_{ij} - \zeta_1 h_i h_j] - \alpha_2 p_2 [\delta_{ij} - \zeta_2 h_i h_j]. \quad (30)$$

从(28)式可以看出, 上式中常数 $\alpha_1, \alpha_2, \zeta_1, \zeta_2$ 共包括 8 个材料常数——两个固体材料的柔度系数、两个单重孔隙介质的柔度系数和四个双重孔隙介质的刚度系数. 如果各向异性仅仅是结构上的各向异性, 而固体材料是各向同性的, 则由(22)及(27)式得到

$$A_1^S = \frac{1}{A^S} = \frac{1}{3K_s} = \frac{C_s}{3}; B_1^S = B^S = 0, \quad (31)$$

故(28)式简化为:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^e = & \sigma_{ij} - p_1 [\delta_{ij} (1 - AA_1^* - CB_1^*) - (BA_1^* + DB_1^*) h_i h_j] \\ & - p_2 \left[\delta_{ij} \left(AA_1^* + CB_1^* - \frac{A}{3K_s} \right) \right. \\ & \left. + \left(BA_1^* + DB_1^* - \frac{B}{3K_s} \right) h_i h_j \right]. \end{aligned} \quad (32)$$

上述形式的有效应力定律包含固体体积模量 K_s ($= 1/C_s$) 等 7 个常数. 如果孔隙体积的几何形状也是各向同性的, 则对于孔隙材料也满足类似于(31)式的表达式:

$$A_1^* = \frac{C^*}{3}, B_1^* = 0; A = \frac{3}{C_b}, B = 0, \quad (33)$$

故(32)式所示的有效应力定律就变为各向同性双重孔隙介质有效应力定律, 即(3)和(4)式.

对于单重孔隙介质, $M_{ijkl} = M_{ijkl}^*$ 且 $p_1 = p_2 = p$, 则(29)和(30)式分别简化为:

$$\sigma_{ij}^e = \sigma_{ij} - p \left[\delta_{ij} \left(1 - \frac{AD^S - CB^S}{A^S D^S - B^S C^S} \right) - \frac{BD^S - DB^S}{A^S D^S - B^S C^S} h_i h_j \right] \quad (34)$$

和

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^e = & \sigma_{ij} - p [(\alpha_1 + \alpha_2) \delta_{ij} - (\alpha_1 \zeta_1 + \alpha_2 \zeta_2) h_i h_j] \\ = & \sigma_{ij} - \alpha p [\delta_{ij} - \zeta h_i h_j], \end{aligned} \quad (35)$$

(34)和(35)式即为横向各向同性单重孔隙介质线弹性变形的有效应力定律, 与Carroll^[5]所给出的形式相同.

3 结论

在全世界范围内, 裂缝性油藏的开采具有极大

的潜力, 许多经济效益最好的油藏都是裂缝性油藏. 对于裂缝性油藏, 石油和天然气的储集层岩石主要是裂缝性岩石. 该岩石为包括基质孔隙和裂隙的双重孔隙介质. 事实上, 绝大多数岩石都有不同程度的各向异性. 因此, 研究饱和的各向异性双重孔隙介质对石油天然气开发具有重要意义.

有效应力是研究双重孔隙介质在孔隙流体压力作用下的力学响应的最重要的基础. 对于单重孔隙介质, Carroll^[5]给出了各向异性有效应力的形式; 而对于双重孔隙介质及多重孔隙介质, 陈勉^[8]给出了各向同性有效应力定律的形式. 目前, 尚无人建立各向异性双重孔隙介质有效应力定律. 本文通过对饱和双重孔隙介质的代表性体积单元的研究, 得到各向异性双重孔隙介质线弹性变形的有效应力定律(17)式. 对于横向各向同性双重孔隙介质, 例如储集石油天然气的沉积岩油藏, 有效应力定律的简化形式为(30)式. 特别是对于仅仅是结构上的各向异性的情况, 其有效应力定律又可简化成(32)式.

上述分析都是在假定固体材料和孔隙材料所产生的变形都是线弹性变形的基础上进行的.

致谢 感谢金衍的有益讨论. 本工作为国家自然科学基金资助项目(批准号: 50274054)和教育部科学技术研究重点项目(批准号: 01111).

参 考 文 献

- 1 Erling Fjaer, Rune M Holt, Per Horsrud, et al. Petroleum Related Rock Mechanics. New York: Elsevier Science Publishers B V, 1992, 38~39
- 2 Geertsma J. The effect of fluid pressure decline on volumetric changes of porous rocks. Trans AIME, 1957, 210(1): 331~340
- 3 Chen H -Y, Teufel L W, Lee R L. Coupled fluid flow and geomechanics in reservoir study -1. Theory and governing equations. In: SPE, eds. 1995 SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Dallas, 1995, 507~519
- 4 Nur A, Byerlee J D. An exact effective stress law for elastic deformation of rock with fluids. J Geophys Res, 1971, 76(26): 6414~6419
- 5 Carroll M M. An effective stress law for anisotropic elastic deformation. Journal of Geophysical Research, 1979, 84(B13): 7510~7512
- 6 Carroll M M, Katsube N. The role of Terzaghi effective stress in linearly elastic deformation. Journal of Energy Resources Technology, 1983, 105: 509~511
- 7 Chen H -Y, Teufel L W. Coupling fluid-flow and geomechanics in dual-porosity modeling of naturally fractured reservoirs. In: SPE, eds. 1997 SPE Annual Technical Conference and Exhibition, San Antonio, 1997, 419~433
- 8 陈勉, 陈至达. 多重孔隙介质的有效应力定律, 应用数学和力学, 1999, 20(11): 1121~1127
- 9 黎水泉, 徐秉业. 双重孔隙介质流固耦合理论模型, 水动力学研究与进展, 2001, 16(4): 460~466.
- 10 Barrenblatt G I, Zehltov Iu P, Kochina I N. Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks. J Appl Math Mech, 1960, 24: 1286~1303

(2004-06-23 收稿, 2004-08-26 收修改稿)