典型时空的变换群和不变量

郭 汉 英

（中国科学院高能物理研究所）

一

本文给出典型时空*[1] 和 de Sitter 伪超球的关系，建立典型时空理论的基本定理；指出满足局部光速不变原理和相对性原理的四维时空，只有资料［1］所给出的三种典型时空：除 Minkonski 时空之外，其它两种常曲率典型时空分别为曲率为正或为负的 de Sitter 球的对经贴合．本文由这种关系自然导出典型时空的坐标条件，不变度量和变换群的参数表达式．

同时，本文给出典型时空中的光锥方程，以及任意二时空点测地间隔的一般表达式．

最后，给出类空变换子群；利用它的不变性，考查了同时性和固有空间距离的问题，建立了与资料［2］有所不同的概念．

二

资料［1］假定，自由空间满足下面两个原理：

局部光速不变原理：经过任意惯性坐标系时空原点的自由空间中的光速恒为 C；

相对性原理：不同惯性系中物理定律的数学形式相同．

这里所谓的惯性坐标系，是指包括光的传播在内的自由粒子作匀速直线运动，且满足这两个原理的坐标系．

存在这类惯性系的时空称为典型时空．

类比狭义相对论，对于标度固定的情形，这些原理要求，在时空原点不同、空间方位不同、相对速度不同（一共十种）的惯性系之间，存在 10 参数的变换群 $\mathfrak{G}$；群 $\mathfrak{G}$ 将表示惯性运动的四维直线变为直线，并保持惯性系的度量不变，亦即群 $\mathfrak{G}$ 是典型时空的运动群．同时，原理要求，在任意惯性坐标系的时空原点处，度规取 Galileo 值 $(\eta_{ij})_{ij=0-3} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$．这表明典型时空是双曲 Riemann 流形．

按照射影几何[2]，最一般的直线是射影直线，它们之间的变换群是射影群．因此，群 $\mathfrak{G}$ 应当是四维射影直线的变换群的子群，典型时空的几何应当是四维射影几何的子几何．

同时，根据 Riemann 几何[3]，号差为 (p, q) 的 n 维伪 Riemann 空间 $(n = p + q)$ 最大运动群参数的数目为 $\alpha = \frac{1}{2} n(n + 1)$，该流形有常曲率，可在号差为 $(p, q + 1)$ 或 $(p + 1, q)$ 的 $n + 1$ 维伪欧空间中的伪超球面上实现，而使伪球不变的旋转群 $SO(p, q + 1)$ 或 $SO(p + 1, q)$ 就是该流形的运动群．由于典型时空维数 $n=4$，号差 $(p, q)=(3, 1)$，运动群参数数目 $\alpha = 10$，因而是常曲率空间，可以在号差为 $(3,2)$ 或 $(4,1)$ 的五维伪欧空间中的伪超球面上实现．显然，这种伪超球就是 de Sitter 球．它们的运动群是 $SO(3, 2)$ 或 $SO(4, 1)$，狭义相对论的 Minkowski 时空和 Poincaré 群是它们曲率为零的退化形式．

本文 1977 年 7 月 12 日收到．

* 陆启铿，为什么一定要用 Minkowski 度量？（1970，未发表）．

综上所述，我们在四维射影几何齐次坐标 $\{\xi^i, \xi^5\}$ 表述的空间中，按号差(3,2)或(4,1)引入伪欧度量

$$dS^2 = (d\xi^0)^2 - (d\xi^1)^2 - (d\xi^2)^2 - (d\xi^3)^2 - \theta(d\xi^5)^2, \quad \theta = \frac{\lambda}{|\lambda|}; \tag{2.1}$$

并以射影中心为球心引入相应的 de Sitter 球

$$(\xi^0)^2 - (\xi^1)^2 - (\xi^2)^2 - (\xi^3)^2 - \theta(\xi^5)^2 = -\frac{1}{\lambda} \tag{2.2}$$

作为射影变换下的不变形；于是，典型时空就一定且只能在这个不变形及其退化形式上实现．按照这个线索，再回到限制在 de Sitter 球(2.2)上的射影非齐次坐标

$$\sqrt{|\lambda|}\,x^i = (\xi^5)^{-1}\xi^i \tag{2.3}$$

便自然得到 de Sitter 球和资料[1]中给出的典型时空的关系，以及典型时空惯性系的不变度量、坐标条件和变换群的参数方程．求解此参数方程可以得到变换群的参数表达式．加以资料[1]中关于测地线和自由粒子（包括光的自由传播）的结果（从射影几何的角度来看，上述不变形的测地线自然是直线），便可以建立

典型时空理论的**基本定理**:

满足局部光速不变原理和相对性原理的典型时空为三种常曲率时空；

曲率为 $\lambda < 0$ 或 $\lambda > 0$ 的两种典型时空，分别是运动群为 $SO(3, 2)$ 或 $SO(4, 1)$ 的 de Sitter 球(2.2)去掉 ξ^5 之无穷点后的对经贴合，其中可以定义满足条件

$$\sigma(x, x) \equiv 1 - \lambda\eta_{ij}x^ix^j > 0, \quad (i, j = 0 - 3), \tag{I}$$

且具有度量

$$dS^2 = [\eta_{ij}\sigma(x, x)^{-1} + \lambda\eta_{ir}\eta_{js}x^rx^s\sigma(x, x)^{-2}]dx^idx^j \tag{II}$$

的坐标系 $\{x^i\}$，在 $SO(3, 2)$ 或 $SO(4, 1)$ 的变换[4]下，$\{x^i\}$ 变为 $\{\tilde{x}^i\}$

$$\begin{aligned} x^i \to \tilde{x}^i &= \sigma(a, a)^{\frac{1}{2}}\sigma(a, x)^{-1}(x^j - a^j)D_j^i, \\ D_j^i &= L_j^i + \lambda[\sigma(a, a) + \sigma(a, a)^{\frac{1}{2}}]^{-1}\eta_{kl}a^la^iL_j^K, \\ L &\equiv (L_j^i)_{i,j=0-3} \in SO(3, 1), \\ &\sigma(a, a) > 0, \end{aligned} \tag{III}$$

同时，条件(I)、度量(II)保持不变；

曲率 $\lambda = 0$ 的典型时空即 Minkowski 时空，是前两种时空曲率为零的退化形式；

坐标系 $\{x^i\}$ 是惯性系，其中测地线是直线，描述自由粒子（包括光的自由传播）的惯性运动．

三

根据局部光速不变原理，以时空坐标原点为顶点的光锥上的点 $X(x^i)$ 的坐标 (x^i) 满足方程

$$\eta_{ij}x^ix^j = 0 \tag{3.1}$$

引入二时空点 $A(a^i)$ 与 $X(x^i)$ 之间的量

$$\Delta^2(a, x) = [\eta_{ij}\sigma(a, x)^{-1} + \lambda\eta_{ir}\eta_{js}a^ra^s\sigma(a, x)^{-2}] \times (x - a)^i(x - a)^j. \tag{3.2}$$

不难证明，在变换 III 下，$\Delta^2(a, x)$ 是不变量．又由于当 $a^i = 0$ 时，$\Delta^2(0, x) = \eta_{ij}x^ix^j$．因此，根据相对性原理，以时空点 $A(a^i)$ 为顶点的光锥方程为

$$\Delta^2(a, x) = 0. \tag{3.3}$$

显然，对任意两时空点 $A(a^i)$ 与 $B(b^i)$，视 $\Delta^2(a, b) > 0$、$= 0$ 或 < 0，可分别确定为类时、类光或类空的．

定义两点 $A(a^i)$ 与 $B(b^i)$ 间的测地间隔，为沿测地线段 $\overline{AB}$ 的积分

$$S(a, b) = \int_{\overline{AB}} dS. \tag{3.4}$$

显然，类光间隔为零，而对于类时间隔和类空间隔，可以证明[5]分别有

$$S_{类时}(a, b) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|\lambda|}} \operatorname{arctg} \sqrt{|\lambda|}\, |\Delta(a, b)|, & \lambda < 0, \\ [\eta_{ij}(a-b)^i(a-b)^j]^{\frac{1}{2}}, & \lambda = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{Arth} \sqrt{\lambda}\, |\Delta(a, b)|, & \lambda > 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

$$S_{类空}(a, b) = \begin{cases} \frac{i}{\sqrt{|\lambda|}} \operatorname{Arth} \sqrt{|\lambda|}\, |\Delta(a, b)|, & \lambda < 0, \\ [\eta_{ij}(a-b)^i(a-b)^j]^{\frac{1}{2}}, & \lambda = 0, \\ \frac{i}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{arctg} \sqrt{\lambda}\, |\Delta(a, b)|, & \lambda > 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

注意,类空间隔为虚数.

四

考虑典型时空的坐标变换中将空间坐标 $\{x^\alpha\}(\alpha = 1, 2, 3)$ 仍变为空间坐标，而与时间坐标 x^0 无关的一类变换. 称这类变换为类空变换.

利用典型时空和 de Sitter 球之间的关系,可以证明

引理 类空变换形成群 $\mathfrak{S}$ 的子群 $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{S}$, 在群 $\mathfrak{D}$ 的变换下,

$$\sigma(x, x)^{-\frac{1}{2}} x^0 = \xi^0 = 常数 \tag{4.1}$$

保持不变.

根据这个引理,并利用(2.1)和(2.2),马上可以得到群 $\mathfrak{D}$ 下的不变度量和不变形为

$$\left.\begin{aligned} dS^2 &= -(d\xi^1)^2 - (d\xi^2)^2 - (d\xi^3)^2 \\ &\quad - \theta(d\xi^5)^2, \\ -(\xi^1)^2 &- (\xi^2)^2 - (\xi^3)^2 - \theta(\xi^5)^2 \\ &= -\frac{1}{\lambda} - (\xi^0)^2 = 常数. \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

将第二式看作半径之模为

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}} K^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{|\lambda|}} \sigma_\Sigma(x, x)^{\frac{1}{2}} \sigma(x, x)^{-\frac{1}{2}}, \\ &\sigma_\Sigma(x, x) \equiv 1 - \lambda \eta_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta, \\ &(\eta_{\alpha\beta})_{\alpha\beta=1-3} = \operatorname{diag}(-1, -1, -1) \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

的三维类空(伪)超球,以 $\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}} K^{\frac{1}{2}}$ 为标度重新定义(4.2)的对经贴合坐标,重复建立基本定理的步骤，便可以得到类空变换群的不变量和参数表达式. 值得注意的是，当 $\lambda > 0$ 时，(4.2) 式描述的就是三维球. 而当 $\lambda < 0$ 时，(4.2) 式描述的是伪欧空间 $E^{3,1}$ 中的三维伪球，且视 σ_Σ 之符号，此伪球为实、为零、为虚. 因此，我们有

定理 在典型时空中，存在满足条件

$$\begin{aligned} &\sigma(x, x)^{-\frac{1}{2}} x^0 = 常数, \\ &\sigma_\Sigma(x, x) > 0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

的类空超曲面 Σ;在 Σ 上,线元可表为

$$dS^2 = \sigma(x, x)^{-1} [\eta_{\alpha\beta} + \lambda \eta_{\alpha\gamma} \eta_{\beta\delta} x^\gamma x^\delta \sigma_\Sigma(x, x)^{-1}] \times dx^\alpha dx^\beta; \tag{4.5}$$

对于 $\lambda > 0$ 与 $\lambda < 0$, 类空变换群分别为 $SO(4) \subset SO(4, 1)$ 与 $SO(3, 1) \subset SO(3, 2)$; 在它们的变换下,

$$\left.\begin{aligned} &x^0 \to \tilde{x}^0 = \sigma_\Sigma(a, a)^{\frac{1}{2}} \sigma_\Sigma(a, x)^{-1} x^0, \\ &x^\alpha \to \tilde{x}^\alpha = \sigma_\Sigma(a, a)^{\frac{1}{2}} \sigma_\Sigma(a, x)^{-1} \\ &\qquad \times (x^\beta - a^\beta) O^\alpha_\beta, \\ &O^\alpha_\beta = R^\alpha_\beta + \lambda[\sigma_\Sigma(a, a) \\ &\qquad + \sigma_\Sigma(a, a)^{\frac{1}{2}}]^{-1} \eta_{\gamma\delta} a^\delta a^\alpha R^\gamma_\beta, \\ &(R^\alpha_\beta)_{\alpha\beta=1-3} \in SO(3), \\ &\sigma_\Sigma(a, a) > 0, \quad a^0 = 0; \end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

同时，条件 (4.4)、度量 (4.5) 以及比例因子

$$K \equiv \sigma_\Sigma(x, x) \sigma(x, x)^{-1} = 常数$$

保持不变，即超曲面 Σ 在类空变换群下映为自身.

五

我们知道，Minkowski 时空中类空事件的同时性，以及类空同时事件的空间距离，可

以由 Poincaré 群的类空变换子群 $ISO(3)$ 下的不变性质来确定. 与狭义相对论相一致，我们可以根据上节的引理和定理，给出典型时空中类空事件的同时性，以及类空同时事件间的空间距离元的一般定义.

定义 在给定的惯性坐标系 $\{x^i\}$ 中，满足条件

$$\sigma(x, x)^{-\frac{1}{2}}x^0 = \xi^0 = \text{常数} \tag{5.1}$$

的类空事件是同时的.

按照这个定义，超曲面 Σ 上的事件都是同时的. 应该指出,这个定义与资料[1]给出的定义相比，除了在原点为顶点的光锥上相同外,一般并不相同. 而这里定义的同时性，根据上节的定理，在类空同时超曲面 Σ 上显然具有传递性,这正是物理上所要求的.

同时,可以证明,对于同一坐标系中从原点看是静止的钟，如果在 $x^0 = 0$ 时刻彼此同时，那末，条件 (5.1) 定义的同时性意味着这些钟走过的固有时将永远相同. 因此，这样定义的同时性具有明确的物理意义.

定义 相邻二同时的类空事件，即超曲面 Σ 上相邻事件的固有距离元*为

$$dl^2 = -dS^2 = -\sigma(x, x)^{-1}[\eta_{\alpha\beta} + \lambda\eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\delta}x^\gamma x^\delta\sigma_\Sigma(x, x)^{-1}]dx^\alpha dx^\beta. \tag{5.2}$$

可以证明，此式可由度量(II)的分量表为

$$dl^2 = -(g_{\alpha\beta} - g_{0\alpha}g_{0\beta}/g_{00})dx^\alpha dx^\beta, \tag{5.3}$$

这在形式上与广义相对论中引进的空间距离元相同.但是,定义(5.2)具有群不变的意义.

定义 超曲面 Σ 上二同时事件 $A(a^i)$ 与 $B(b^i)$ 的固有距离为沿测地线段 $\overline{AB} \subset \Sigma$ 的积分

$$L(a, b) = \int_{\overline{AB}\subset\Sigma} dl. \tag{5.4}$$

显然,固有距离 $L(a, b)$ 是群 $\mathfrak{D}$ 下的不变量.

可以求出固有距离的表达式. 例如，对于 $\lambda < 0$ 的情形

$$\left.\begin{aligned} L(a, b) &= \frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}K^{\frac{1}{2}}\operatorname{Arth}\sqrt{|\lambda|}\times \\ &\quad \times R(a, b), \quad a^i, b^i \in \Sigma \\ R(a, b) &\equiv \{-[\eta_{\alpha\beta}\sigma_\Sigma(a, b)^{-1} \\ &\quad + \lambda\eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\delta}a^\gamma b^\delta\sigma_\Sigma(a, b)^{-2}]\times \\ &\quad \times (a-b)^\alpha(a-b)^\beta\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

值得指出的是,除了因子 K 外,这就是普通非欧几何中距离的表达式.

作者感谢华罗庚、陆启铿等同志的指教和讨论. 本文的结果是在 1974 年底至 1975 年初得到的. 主要内容曾提交 1975 年南京天体物理会议和 1977 年 3 月北京高能物理会议.

参考资料

[1] 陆启铿、邹振隆、郭汉英,物理学报, **23**(1974), 225.
[2] 华罗庚、万哲先,典型群,上海科学技术出版社,1963.
[3] 例如见 Eisenhart, L. P., *Riemannian Geometry*.
[4] 华罗庚,从单位圆谈起(1962 年在中山大学的讲义),其中给出正定度量下的类似的变换.
[5] 陆启铿，典型流形和典型域,上海科学技术出版社, 1963,计算(3.4)类型的积分可以采用其中给出的一般方法.

---

* 徐湛,关于典型时空空间几何的来信(1974—1975). 信中建议采用线元(5.2)，并得到与类空变换(4.6)类似的不完整的表达式.
陆启铿,典型时空的光测距离(1975,未发表)，其中用不同的方法导出线元(5.2)和类空变换(4.6).