第 24 卷第 4 期 南京气象学院学报 Vol. 24 No. 4
2001 年 12 月 Journal of Nanjing Institute of Meteorology Dec. 2001

文章编号: 1000-2022(2001) 04-0564-06

论 1998 年全国大学生数模竞赛 A 题的若干问题

蒋志芳
(南京审计学院基础部, 南京 210029)

摘 要: 对于 1998 年全国大学生数模竞赛 A 题(CMCM-98 竞赛 A 题) 的解答有许多争议, 如: 风险—收益曲线是否为折线? 若是, 应分成几段? 用收益—风险最大模型是否合理? 偏好系数模型的正确答案是什么? 本文对CMCM-98 竞赛 A 题进行全面求解, 并详细讨论了上述问题。

关键词: 数学模型, 最优解, 风险, 收益
中图分类号: O142 文献标识码: A

1 CMCM-98 试题 A 的数学模型

A 题(投资的收益和风险): 市场上有 n 种资产(如股票、债券、…) S_i($i=1,2,\cdots,n$) 供投资者选择, 某公司有数额为 M 的一笔相当大的资金可用作一个时期的投资。公司财务分析人员对这 n 种资产进行了评估, 估算出在这一时期内购买 S_i 的平均收益率为 r_i, 并预测出购买 S_i 的风险损失率为 q_i。考虑到投资越分散, 总的风险越小, 公司确定, 当用这笔资金购买若干种资产时, 总体风险可用所投资的 S_i 中最大的一个风险来度量。

购买 S_i 要付交易费, 费率为 p_i, 并且当购买额不超过给定值 u_i 时, 交易费按购买 u_i 计算(不买当然无须付费)。另外, 假定同期银行存款利率是 r_0($r_0=5\%$), 且既无交易费又无风险。数据略[1]。

设 Mx_i 表示购买第 i 种资产 S_i 的资金数额, Mx_0 表示存银行的金额。令

$$f_i(x)=\begin{cases} Mxp_i, & x\geq u_i/M;\\ u_ip_i, & 0<x<u_i/M;\\ 0, & x=0。\end{cases}$$

则净收益为

$$R=\sum_{i=0}^{n}M(1+r_i)x_i-M,$$

总体风险为

$$Q=\max_{0\leq i\leq n}Mx_iq_i,$$

收稿日期: 2001-04-02; 改回日期: 2001-06-13
作者简介: 蒋志芳, 女, 1964 年 2 月生, 硕士, 讲师.

约束条件为

$$\sum_{i=0}^{n} f_i(x_i) + \sum_{i=0}^{n} M x_i = M。$$

由于 u_i 与 M 相比很小, 因而可以简化约束条件为

$$\sum_{i=0}^{n} (1 + p_i) x_i = 1,$$

同时

$$R = \sum_{i=0}^{n} M(1 + r_i) x_i - M \sum_{i=0}^{n} (1 + p_i) x_i = M \sum_{i=0}^{n} (r_i - p_i) x_i。$$

略去 M, 原题化为双目标决策问题:

$$\max R = \sum_{i=0}^{n} x_i (r_i - p_i),$$

$$\min Q = \max_{0 \le i \le n} x_i q_i。 \tag{1}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{i=0}^{n} (1 + p_i) x_i = 1, \\ x_i \ge 0。\end{cases}$$

以下设 $r_i - p_i > 0$, 否则不对该资产投资。

模型(1) 可用如下多种方法化为单目标决策问题[2~5]。1) 固定 R 使 Q 尽量小; 2) 固定 Q 使 R 尽量大; 3) 使 R/Q 尽量大; 4) 选择偏好系数 μ, 使 $(1-\mu)R - \mu Q$ 尽量大。不同的方法又可导出不同模型, 以下将分别给出上述 4 种方法, 并回答前面提及的 3 个相应问题。

2 固定 *R* 使 *Q* 最小的模型

由方法 1), 将模型(1) 化为

$$\min Q = \max_{0 \le i \le n} q_i x_i。$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{i=0}^{n} (r_i - p_i) x_i = R, & ① \\ \sum_{i=0}^{n} (1 + p_i) x_i = 1, & ② \\ x_i \ge 0。\end{cases} \tag{2}$$

此模型又可改写为

$$\min y。$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{i=0}^{n} (r_i - p_i) x_i = R, \\ \sum_{i=0}^{n} (1 + p_i) x_i = 1, \\ x_i q_i \le y, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \\ x_i \ge 0, y \ge 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n。\end{cases}$$

再用参数规划法求解, 但是参数规划法计算复杂, 下面给出简便解法。

令 $\rho_i=(r_i-p_i)/(1+p_i)$，表示投资 s_i 的净收益率。ρ_i 必大于 ρ_0，否则，若 $\rho_i\le\rho_0$，则不对 s_i 投资，因为对该项目投资纯收益率不如存银行，而风险损失率又大于存银行。将 ρ_i 从小到大排序，设 ρ_k 最大，则易见对模型(2) 的可行解必有 $0.05\le R\le\rho_k$。

当 $R=0.05$ 时，所有资金都存银行，$Q=0$；当 $R=\rho_k$ 时，所有资金用于购买 S_k，$Q=\dfrac{q_k}{1+p_k}$；当 $0.05<R<\rho_k$ 时，有定理 1。

定理 1 若 $0.05<R<\rho_k$，$(x_0,x_1,\cdots,x_n)$ 是模型(2) 的最优解，则 $x_1q_1=\cdots=x_nq_n$。

证明 用反证法。若不相等，令 $Q=\max\limits_{0\le i\le n}x_iq_i$，不妨设 $x_nq_n<Q$，由①式减②式再乘以 0.05 得

$$\sum_{i=0}^{n}\alpha_ix_i=\beta。\tag{3}$$

其中，$\alpha_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$；$\beta>0$。

设 $J=\{j\ \ x_j>0\}$，取

$$\epsilon_n=\frac{1}{N},\ \epsilon_j=\epsilon_n\ \ \alpha_n/\sum_{i\in J}\alpha_i,$$

$$x_n^*=x_n+\epsilon_n,$$

$$x_j^*=x_j-\epsilon_j,\quad j\in J,$$

$$x_j^*=x_j,\quad j\overline{\in}J\ 且\ j\neq0,$$

$$x_0^*=1-\sum_{j=1}^{n}(1+p_j)x_j^*,$$

则当 N 充分大时，$x_j^*\ge0$，$0\le j\le n$。

容易验证$(x_0^*,x_1^*,\cdots,x_n^*)$满足②式和(3)式，从而满足①式，而 $x_j^*q_j<Q$，所以$(x_0,x_1,\cdots,x_n)$不是模型(2) 的最优解。此处矛盾，可以反证定理 1 成立。

由定理 1(风险分散原理) 知，当 $R\in(0.05,\rho_k)$ 时，可按下述步骤求出最优解：1) 将①式与②式消去 x_0 得(3) 式；2) 将 $x_i=\dfrac{Q}{q_i}$ 代入(3) 式解出 Q；3) 由 $x_i=\dfrac{Q}{q_i}$，$1\le i\le n$，$x_0=1-\sum\limits_{i=1}^{n}(1+p_i)x_i$ 求出最优解。

例如，对于 $n=4$ 的情形，我们算得如下结果：

(1) $R=0.05$ 时，$x_0=1$，$x_1=x_2=x_3=x_4=0$，$Q=0$；

(2) $R=0.27/1.01$ 时，$x_0=x_2=x_3=x_4=0$，$x_1=1/1.01$，$Q=0.025/1.01$；

(3) $R\in(0.05,0.27/1.01)$ 时，$Q=\dfrac{R-0.05}{25.5276}$，$x_1=\dfrac{R-0.05}{0.6382}$，$x_2=\dfrac{R-0.05}{0.3829}$，$x_3=\dfrac{R-0.05}{1.4040}$，$x_4=\dfrac{R-0.05}{0.6637}$，$x_0=1-1.01x_1-1.02x_2-1.045x_3-1.065x_4$。

3 风险—收益曲线是否为折线

由方法(2)，将模型(1) 化为线性规则模型，

$$\max R=\sum_{i=0}^{n}(r_i-p_i)x_i。$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_iq_i\le Q,\quad i=1,2,\cdots,n,\\ \sum\limits_{i=0}^{n}(1+p_i)x_i=1,\\ x_i\ge0。\end{cases}\tag{4}$$

对于每一个 Q, 用模型(4) 都能求出 R, 许多参赛队用 Math 软件画出 Q-R 曲线[5], 但该曲线是否为折线? 若是, 应分成几段? 有的队认为应是两条线所成折线[5], 这是不对的。

由净收益率 $\rho_i=(r_i-p_i)/(1+p_i)$, 直观上想到 ρ_i 越大, x_i 应尽量大, 这种想法是正确的, 可将其写为定理 2。

定理 2　设$(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 是模型(4) 的最优解, 若 $\rho_i>\rho_j$, $x_j>0$, 则 $x_i=Q/q_i$。

证明　用反证法。假设 $\rho_i>\rho_j$, $x_j>0$, 而 $x_i<Q/q_i$。

选取充分小的正数 ϵ, 使得

$$(x_i+\epsilon)q_i<Q,\ \epsilon(1+p_i)<x_j(1+p_j)。$$

令 $x_i^*=x_i+\epsilon$, $x_j^*=x_j-\epsilon(1+p_i)/(1+p_j)$, 当 $k\neq i,j$ 时, 令 $x_k^*=x_k$, 则 $x_k^*\geq 0$, 且

$$\sum_{k=0}^{n}x_k^*(1+p_k)=\sum_{k\neq i,j}x_k^*(1+p_k)+(x_i+\epsilon)(1+p_i)+$$
$$[x_j-\epsilon(1+p_i)/(1+p_j)](1+p_j)=1,$$

$$\sum_{k=0}^{n}x_k^*(r_k-p_k)=\sum_{k\neq i,j}x_k^*(r_k-p_k)+(x_i+\epsilon)(r_i-p_i)+$$
$$[x_j-\epsilon(1+p_i)/(1+p_j)](r_i-p_j)>\sum_{k=0}^{n}x_k(r_k-p_k)。$$

因此, $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 不是模型(4) 的最优解。此处矛盾, 可以反证定理 2 成立。

由此定理, 我们可将 ρ_i 从大到小排序, 使 ρ_i 最大的 k 应尽量满足 $x_kq_k=Q$, 若还有多余资金, 再投资 ρ_i 次大的, ……。对于不同的 Q, 会有不同的投资方案, 我们可以算出 Q 临界值, 从而确定曲线。以 $n=4$ 的情形为例, 设 $\rho_1>\rho_2>\rho_3>\rho_4>\rho_0$, 则可用下面的方法算出各临界值 c_1, c_2, c_3, c_4。

只有一种投资时,

$$c_1(1+p_1)=q_1,\quad c_1=q_1/(1+p_1)=0.024\ 750。$$

当有两种投资时, 将 $x_1=c_2/q_1$, $x_2=c_2/q_2$, 代入 $x_1(1+p_1)+x_2(1+p_2)=1$, 得

$$c_2=q_1q_2/[(1+p_1)q_2+(1+p_2)q_1]=0.009\ 225。$$

同理可得

$$c_3=q_1q_2q_3/[(1+p_1)q_2q_3+(1+p_2)q_1q_3+(1+p_3)q_1q_2]=0.007\ 849,$$

$$c_4=q_1q_2q_3q_4/[(1+p_1)q_2q_3q_4+(1+p_2)q_1q_3q_4+(1+p_3)q_1q_2q_4+(1+p_4)q_1q_2q_3]=0.005\ 940。$$

于是得最优解(表 1)。

易见 Q-R 曲线应由 5 段折线构成。一般地, 包括存银行在内, 有 n 种资产可投资时, 可算出 n 个临界点, Q-R 曲线由 $n+1$ 段折线组成。

4　收益—风险最大原则是否合理

按照收益—风险最大原则, 可取模型

$$\max R/Q。$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=0}^{n}(1+p_i)x_i=1,\\ x_i\geq 0。\end{cases}\tag{5}$$

由于 $q_0=0$, 因而取 $x_0=1$, $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 时, $R/Q=+\infty$, 从而可知, 全部钱存银行是最优解。对此问题, 其他投资的收益与风险损失率都不影响该最优解, 故这种模型不够好。

表 **1** $n=4$ 的最优解

Table 1 Best solution for $n=4$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_0
$Q=0.000\,000$	0	0	0	0	1
$0<Q\le 0.005\,940$	$\frac{Q}{q_1}$	$\frac{Q}{q_2}$	$\frac{Q}{q_3}$	$\frac{Q}{q_4}$	$1-\sum_{i=1}^{4}(1+p_i)x_i$
$0.005\,940<Q\le 0.007\,849$	$\frac{Q}{q_1}$	$\frac{Q}{q_2}$	$\frac{Q}{q_3}$	$[1-\sum_{i=1}^{3}(1+p_i)x_i]/(1+p_4)$	0
$0.007\,849<Q\le 0.009\,225$	$\frac{Q}{q_1}$	$\frac{Q}{q_2}$	$[1-\sum_{i=1}^{2}(1+p_i)x_i]/(1+p_3)$	0	0
$0.009\,225<Q\le 0.024\,750$	$\frac{Q}{q_1}$	$[1-(1+p_1)x_1]/(1+p_2)$	0	0	0
$Q>0.024\,750$	$\frac{1}{1+p_1}$	0	0	0	0

5 偏好系数模型的正确答案是什么

由偏好系数法, 我们选取偏好系数 $\mu(0\le\mu\le 1)$, 建立模型

$$\max[(1-\mu)R-\mu y]。$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=0}^{n}x_i(1+p_i)=1,\\ x_iq_i\le y,\quad i=1,2,\cdots,n,\\ x_i\ge 0,\quad i=0,1,\cdots,n。\end{cases}\tag{6}$$

有些参赛队的优秀论文都采用了此模型, 但计算结果完全不同[5]。我们用参数规划法计算的结果见表 2。

表 **2** 计算结果

Table 2 Results of calculation

μ	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
1.000	1	0	0	0	0
(0.825, 1.000)	0	0.237 6	0.396 0	0.108 0	0.228 4
(0.810, 0.825)	0	0.314 0	0.523 3	0.142 7	0
(0.766, 0.810)	0	0.369 0	0.615 0	0	0
(0.000, 0.766)	0	0.991 0	0	0	0

参考文献:

[1] 程文鑫, 苑 青, 骆文润. 风险投资分析[J]. 数学的实践与认识, 1999, 29(1): 19～24
[2] 钱颂迪, 李维铮, 郭耀煌, 等. 运筹学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1990
[3] 伊格尼齐奥 J P. 单目标和多目标系统线性规则[M]. 李毅华译. 上海: 同济大学出版社, 1986
[4] 胡毓达. 实用多目标最优化[M]. 上海: 上海科技出版社, 1990
[5] 袁亚湘, 孙文瑜. 最优化理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 1997

ON THE ISSUES OF TEST PAPER A OF CMCM-98

Jiang Zhifang
(Department of Basic Courses, Nanjing Audit Institute, Nanjing 210029)

Abstract: CMCM-98 Contest Question A has given rise to much controversy. For example, is risk-profit curve a broken line? If so, how many sections should it be divided into? Is it proper to use the maximum profit-risk model? What´s the correct answer to preference coefficient model? This thesis is meant to find out an all-inclusive solution to CMCM-98 Contest Question A and disscuss the above questions in detail.

Key words: mathematical model, best solution, risk, profit