中国科学: 数学 2021 年 第 51 卷 第 2 期: 333 ～ 342
SCIENTIA SINICA Mathematica
论 文

离散分数次积分的加权有界性

付星

湖北大学数学与统计学学院, 武汉 430062
E-mail: xingfu@hubu.edu.cn

收稿日期: 2019-02-15; 接受日期: 2019-07-14; 网络出版日期: 2020-04-08
国家自然科学基金 (批准号: 11701160 和 11871100) 资助项目

摘要 本文通过引入 $\mathbb{Z}$ 上的逆 Hölder 类 $RH_r(\mathbb{Z})$ $(r\in(1,\infty))$ 并建立它与 $\mathbb{Z}$ 上的 Muckenhoupt 权空间 $A_q(\mathbb{Z})$ $(q\in[1,\infty))$ 之间的关系, 再借助伪差分算子 (包含离散 Fourier 乘子) 的有界性与它的积分核的估计之间的关系, 获得离散分数次积分在加权离散 (弱型) Lebesgue 空间 $\ell^p_w(\mathbb{Z})$ 和 $\ell^{p,\infty}_w(\mathbb{Z})$ $(p\in[1,\infty))$ 上的有界性.

关键词 离散分数次积分 加权离散 (弱型) Lebesgue 空间 $\mathbb{Z}$ 上的 Muckenhoupt 权空间 $\mathbb{Z}$ 上的逆 Hölder 类

MSC (2010) 主题分类 26A33, 47B37, 39A12, 31C20

1 引言

离散集合 (如 $\mathbb{Z}^n$, 其中 $\mathbb{Z}$ 为整数集) 上的分析问题是受差分方程和一些数论问题的推动而发展起来的 (参见文献 [1, 2] 及其参考文献). 现代分析学中的一些经典线性算子都有其对应的离散形式, 如离散 Fourier 变换 [3, 4]、离散奇异积分算子 [5–7]、离散 Radon 变换 [8–11] 和离散分数次积分算子 [12, 13]. Cardona [14] 借助伪差分算子 (又称离散伪微分算子) 有界性, 获得了离散分数次积分 ($\mathbb{Z}$ 上的分数次积分) 在离散 (弱型) Lebesgue 空间 $\ell^p(\mathbb{Z})$ 和 $\ell^{p,\infty}(\mathbb{Z})$ $(p\in[1,\infty))$ 上的有界性. 类似 $\mathbb{R}^n$ 上的 Fourier 乘子的有界性估计与偏微分方程理论的关系, $\mathbb{Z}^n$ 上的 Fourier 乘子能够应用于差分方程 (参见文献 [2] 及其参考文献). 受文献 [14] 启发, 本文重点讨论离散分数次积分的加权有界性.

首先引入 $\mathbb{Z}^n$ 上的 Schwartz 空间 $\mathscr{S}(\mathbb{Z}^n)$ 的定义 (参见文献 [2, 第 1 节]). 称函数 $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ 属于 Schwartz 空间 $\mathscr{S}(\mathbb{Z}^n)$, 如果对任意 $M\in(0,\infty)$, 存在正常数 $C_{(\varphi,M)}$ (仅依赖 φ 和 M) 使得, 对任意 $k\in\mathbb{Z}^n$, 有 $|\varphi(k)|\leqslant C_{(\varphi,M)}(1+|k|)^{-M}$. $\mathscr{S}(\mathbb{Z}^n)$ 上的拓扑由半范 p_j 给出, 其中, 对任意 $j\in\mathbb{N}:=\{1,2,\ldots\}$, 有

$$p_j(\varphi):=\sup_{k\in\mathbb{Z}^n}(1+|k|)^j|\varphi(k)|.$$

记 $\mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n)$ 为 $\mathscr{S}(\mathbb{Z}^n)$ 的对偶空间, 即 $\mathscr{S}(\mathbb{Z}^n)$ 上的所有连续线性泛函构成的空间 (被赋予弱 $*$ 拓扑).

英文引用格式: Fu X. Weighted boundedness of discrete fractional integrals (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 333–342, doi: 10.1360/N012019-00052

$\mathbb{Z}^n$ 上的 Fourier 变换 $\mathcal{F}:\mathscr{S}(\mathbb{Z}^n)\to C^\infty(\mathbb{T}^n)$ 定义为 $\mathcal{F}f(\xi):=\sum_{s\in\mathbb{Z}^n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi s\cdot\xi}f(s)$, $\forall\xi\in\mathbb{T}^n$, 其中 $\mathbb{T}:=[0,1]$.

$\mathbb{Z}^n$ 上的伪微分算子 (即伪差分算子或离散伪微分算子) 定义如下. 对任意 $f\in\mathscr{S}(\mathbb{Z}^n)$ 和 $s\in\mathbb{Z}^n$, 有 $t_mf(s):=\int_{\mathbb{T}^n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi s\cdot\xi}m(s,\xi)(\mathcal{F}f)(\xi)d\xi$, 其中二元可测函数 $m:\mathbb{Z}^n\times\mathbb{T}^n\to\mathbb{C}$ 称为 t_m 的符号.

设 $k\in\mathbb{N}$, $\lambda\in(0,1)$ 且 $\gamma\in\mathbb{R}$. 离散分数次积分 ($\mathbb{Z}$ 上的分数次积分) 定义为, 对任意 $f\in\mathscr{S}(\mathbb{Z})$ 和 $s\in\mathbb{Z}$, 有

$$I_{k,\lambda+\mathrm{i}\gamma}f(s):=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{f(s-m^k)}{m^{\lambda+\mathrm{i}\gamma}}.$$

下面回顾离散 (弱型) Lebesgue 空间 $\ell^p(\mathbb{Z})$ 和 $\ell^{p,\infty}(\mathbb{Z})$ ($p\in[1,\infty)$) 的定义. 称数列 $A:=\{a(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}\subset\mathbb{C}$ 属于 $\ell^p(\mathbb{Z})$, 如果

$$\|A\|_{\ell^p(\mathbb{Z})}:=\left[\sum_{j\in\mathbb{Z}}|a(j)|^p\right]^{1/p}<\infty;$$

称数列 $A:=\{a(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}\subset\mathbb{C}$ 属于 $\ell^{p,\infty}(\mathbb{Z})$, 如果

$$\|A\|_{\ell^{p,\infty}(\mathbb{Z})}:=\sup_{t\in(0,\infty)}t[\mu(\{j\in\mathbb{Z}:|a(j)|>t\})]^{1/p}<\infty,$$

其中 μ 表示 $\mathbb{Z}$ 上的计数测度.

$I_{k,\lambda+\mathrm{i}\gamma}$ 的 $\ell^p(\mathbb{Z})$ 估计因其与数论中的一些重要问题 (如 Waring 问题) 的密切联系而受到广泛关注. 关于它与 Waring 问题中的 K^*- 假设的联系, 参见文献 [12,15,16]. K^*- 假设当 $k\in\mathbb{N}\cap[3,\infty)$ 时仍然是公开的.

下面介绍一个关于离散分数次积分的著名猜想 (参见文献 [12,14]).

猜想 1.1 对 $\lambda\in(0,1)$, $k\in\mathbb{N}$, $1\leqslant q<p<\infty$, $I_{k,\lambda}:=I_{k,\lambda+\mathrm{i}0}$ 能被延拓成从 $\ell^q(\mathbb{Z})$ 到 $\ell^p(\mathbb{Z})$ 的有界线性算子当且仅当 p 和 q 满足 (i) $\frac{1}{p}\leqslant\frac{1}{q}-\frac{1-\lambda}{k}$; (ii) $\frac{1}{p}<\lambda$, $\frac{1}{q}>1-\lambda$.

Cardona 在文献 [14, 定理 1] 中证明了上述猜想在 $q=1$ 时的情形. 关于此猜想的其他部分结果, 参见文献 [12,14].

然后回顾 $\mathbb{R}$ 上的 Muckenhoupt 权空间 (简称 Muckenhoupt 权空间) 的定义.

定义 1.1 设 $q\in[1,\infty)$. 称 $\mathbb{R}$ 上的几乎处处正的可测函数 w 属于 Muckenhoupt 权空间, 记为 $A_q(\mathbb{R})$, 如果当 $q\in(1,\infty)$ 时, 有

$$[w]_{A_q(\mathbb{R})}:=\sup_I\left\{\frac{1}{|I|}\int_I w(x)dx\right\}\left\{\frac{1}{|I|}\int_I[w(x)]^{-\frac{1}{q-1}}dx\right\}^{q-1}<\infty;$$

当 $q=1$ 时, 有

$$[w]_{A_1(\mathbb{R})}:=\sup_I\left\{\frac{1}{|I|}\int_I w(x)dx\right\}\left\{\operatorname*{ess\,sup}_{y\in\mathbb{R}}[w(y)]^{-1}\right\}<\infty,$$

其中上确界取遍所有 $\mathbb{R}$ 上的有限开区间 $I:=(a,b)$, $a,b\in\mathbb{R}$ 且 $a<b$. 令 $A_\infty(\mathbb{R}):=\bigcup_{q\in[1,\infty)}A_q(\mathbb{R})$.

下面引入 $\mathbb{Z}$ 上的 Muckenhoupt 权空间的定义 (参见文献 [17]).

定义 1.2 设 $q\in[1,\infty)$. 称数列 $w:=\{w(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}\subset(0,\infty)$ 属于 $\mathbb{Z}$ 上的 Muckenhoupt 权空间, 记为 $A_q(\mathbb{Z})$, 如果当 $q\in(1,\infty)$ 时, 有

$$[w]_{A_q(\mathbb{Z})}:=\sup_{\{m,n\in\mathbb{Z}:\,m\leqslant n\}}\frac{1}{(n-m+1)^q}\left\{\sum_{s=m}^{n}w(s)\right\}\left\{\sum_{s=m}^{n}[w(s)]^{-1/(q-1)}\right\}^{q-1}<\infty;$$

当 $q=1$ 时, 有

$$[w]_{A_1(\mathbb{Z})}:=\sup_{\{m,n\in\mathbb{Z}:\, m\leqslant n\}}\frac{1}{n-m+1}\left\{\sum_{s=m}^{n}w(s)\right\}\left\{\operatorname*{ess\,sup}_{\{s\in\mathbb{Z}:\, m\leqslant s\leqslant n\}}[w(s)]^{-1}\right\}<\infty,$$

其中上确界取遍所有满足 $m\leqslant n$ 的整数 m 和 n. 令 $A_\infty(\mathbb{Z}):=\bigcup_{q\in[1,\infty)}A_q(\mathbb{Z})$.

Hunt 等在文献 [17, 定理 10] 中借助离散 Hilbert 变换和极大离散 Hilbert 变换给出了 $A_q(\mathbb{Z})$ 的一些等价刻画.

回顾 $\mathbb{R}$ 上的逆 Hölder 类 (简称逆 Hölder 类) 的定义.

定义 1.3 设 $r\in(1,\infty]$. 称 $\mathbb{R}$ 上的几乎处处正的可测函数 w 属于逆 Hölder 类, 记为 $RH_r(\mathbb{R})$, 如果当 $r\in(1,\infty)$ 时, 有

$$[w]_{RH_r(\mathbb{R})}:=\sup_I\left\{\frac{1}{|I|}\int_I[w(x)]^r dx\right\}^{1/r}\left\{\frac{1}{|I|}\int_I w(x)dx\right\}^{-1}<\infty;$$

当 $r=\infty$ 时, 有

$$[w]_{RH_\infty(\mathbb{R})}:=\sup_I\left\{\operatorname*{ess\,sup}_{y\in I}w(y)\right\}\left\{\frac{1}{|I|}\int_I w(x)dx\right\}^{-1}<\infty,$$

其中上确界取遍所有有限开区间 $I:=(a,b)$, $a,b\in\mathbb{R}$ 且 $a<b$.

我们还需引入 $\mathbb{Z}$ 上的逆 Hölder 类的定义.

定义 1.4 设 $r\in(1,\infty]$. 称数列 $w:=\{w(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}\subset(0,\infty)$ 属于 $\mathbb{Z}$ 上的逆 Hölder 类, 记为 $RH_r(\mathbb{Z})$, 如果当 $r\in(1,\infty)$ 时, 有

$$[w]_{RH_r(\mathbb{Z})}:=\sup_{\{m,n\in\mathbb{Z}:\, m\leqslant n\}}(n-m+1)^{1-\frac{1}{r}}\left\{\sum_{s=m}^{n}[w(s)]^r\right\}^{1/r}\left\{\sum_{s=m}^{n}w(s)\right\}^{-1}<\infty;$$

当 $r=\infty$ 时, 有

$$[w]_{RH_\infty(\mathbb{Z})}:=\sup_{\{m,n\in\mathbb{Z}:\, m\leqslant n\}}(n-m+1)\left\{\operatorname*{ess\,sup}_{\{s\in\mathbb{Z}:\, m\leqslant s\leqslant n\}}w(s)\right\}\left\{\sum_{s=m}^{n}w(s)\right\}^{-1}<\infty,$$

其中上确界取遍所有满足 $m\leqslant n$ 的整数 m 和 n.

下文进一步假设: 对任意 $k\in\mathbb{N}$, 存在正常数 $c:=c(k,w)$ (仅依赖 k 和 w) 使得

$$\frac{1}{c}[w(m)]^k\leqslant w(m^k)\leqslant c[w(m)]^k. \tag{1.1}$$

设 $p\in[1,\infty)$. 现在引入加权离散 (弱型) Lebesgue 空间 $\ell^p_w(\mathbb{Z})$ 和 $\ell^{p,\infty}_w(\mathbb{Z})$ 的定义. 称数列 $A:=\{a(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}\subset\mathbb{C}$ 属于 $\ell^p_w(\mathbb{Z})$, 如果

$$\|A\|_{\ell^p_w(\mathbb{Z})}:=\left[\sum_{j\in\mathbb{Z}}|a(j)|^p w(j)\right]^{1/p}<\infty;$$

称数列 $A:=\{a(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}\subset\mathbb{C}$ 属于 $\ell^{p,\infty}_w(\mathbb{Z})$, 如果

$$\|A\|_{\ell^{p,\infty}_w(\mathbb{Z})}:=\sup_{t\in(0,\infty)}t[w(\{j\in\mathbb{Z}:|a(j)|>t\})]^{1/p}<\infty,$$

其中 $w(E):=\sum_{j\in E}w(j)$, $\forall\, E\subset\mathbb{Z}$.

下面引入本文的主要结果, 它是文献 [14, 定理 1] 的推广.

定理 1.1　设权 w 满足 (1.1) 且存在 $q\in[1,\infty)$, $r\in(1,\infty]$, 使得

$$w^k:=\{[w(m)]^k\}_{m\in\mathbb{Z}}\in A_q(\mathbb{Z})\cap RH_r(\mathbb{Z}).$$

令 $p\in(1,\infty)$, $k\in\mathbb{N}$, $\lambda\in(0,1)$, $\gamma\in\mathbb{R}$, 则

(i) 若 $\lambda p\geqslant q$, 则 $I_{k,\lambda+\mathrm{i}\gamma}$ 从 $\ell^1_w(\mathbb{Z})$ 到 $\ell^{p,\infty}_w(\mathbb{Z})$ 有界. 若 $I_{k,\lambda+\mathrm{i}\gamma}$ 从 $\ell^1_w(\mathbb{Z})$ 到 $\ell^{p,\infty}_w(\mathbb{Z})$ 有界, 则当 $r<\infty$ 时有 $\lambda p\geqslant 1-\frac{1}{r}$; 当 $r=\infty$ 时有 $\lambda p\geqslant 1$.

(ii) 若 $\lambda p>q$, 则 $I_{k,\lambda+\mathrm{i}\gamma}$ 从 $\ell^1_w(\mathbb{Z})$ 到 $\ell^p_w(\mathbb{Z})$ 有界. 进一步假设 w 满足

$$w(m)\geqslant 1,\quad \forall\, m\in\mathbb{Z}. \tag{1.2}$$

若 $I_{k,\lambda+\mathrm{i}\gamma}$ 从 $\ell^1_w(\mathbb{Z})$ 到 $\ell^p_w(\mathbb{Z})$ 有界, 则当 $r<\infty$ 时有 $\lambda p>1-\frac{1}{r}$; 当 $r=\infty$ 时有 $\lambda p>1$.

注 1.1　(i) 取 $w(m)=1$ $(\forall\, m\in\mathbb{Z})$, $q=1$ 且 $r=\infty$, 则定理 1.1 回到文献 [14, 定理 1], 从而当 $q=1$ 时推广了猜想 1.1;

(ii) 若 $w\in A_\infty(\mathbb{Z})$, 则存在 $q\in[1,\infty)$ 且 $r\in(1,\infty)$, 使得 $w\in A_q(\mathbb{Z})\cap RH_r(\mathbb{Z})$;

(iii) 设 $a\in(-1,\infty)$, 满足 (1.1) 且 $w\in A_\infty(\mathbb{Z})$ 的一类典型例子是 $w(m):=(1+|m|)^a$, $\forall\, m\in\mathbb{Z}$. 具体细节略, 可参考连续情形 (参见文献 [18, 第 219 页, 注记 6.5]). 当 $a\in[0,\infty)$ 时, w 满足 (1.2), 再由 (ii) 知, 上述 w 满足定理 1.1 的所有条件.

本文的主要内容安排如下. 在第 2 节中, 首先利用 $A_q(\mathbb{R})$ 与 $RH_r(\mathbb{R})$ 之间的关系并构造辅助函数 (参见下文的 (2.2)), 实现离散权与连续权性质之间的转化 (此想法来自于文献 [17]), 从而建立 $RH_r(\mathbb{Z})$ 与 $A_q(\mathbb{Z})$ 之间的关系 (参见下文的引理 2.1(iii)), 再借助伪差分算子 (包含离散 Fourier 乘子) 的有界性与它的积分核的估计之间的关系 (参见下文定理 2.1), 完成定理 1.1 的证明.

记号规定　在全文中, 令 $\mathbb{N}$ 表示正整数集, $\mathbb{Z}_+:=\{0\}\cup\mathbb{N}$; C 表示一个与主要参数无关的正常数, 但在每一行可能会改变; 用 $C_{(\rho,\beta,\dots)}$ 表示依赖参数 $\rho,\beta,\dots$ 的正常数, 以及 $C_0,C_1,\dots$ 表示固定的正常数. 若对任意实函数 f 和 g, $f\leqslant Cg$, 则记为 $f\lesssim g$. 若 $f\lesssim g\lesssim f$, 则记为 $f\sim g$; 若 $f\leqslant Cg$ 且 $g=h$ 或 $g\leqslant h$, 则分别记为 $f\lesssim g\sim h$ 或 $f\lesssim g\lesssim h$, 而不是 $f\lesssim g=h$ 或 $f\lesssim g\leqslant h$.

2　定理 1.1 的证明

引理 2.1　如下论断成立.

(i) 当 $1\leqslant r\leqslant q<\infty$ 时, $A_1(\mathbb{Z})\subset A_r(\mathbb{Z})\subset A_q(\mathbb{Z})$;

(ii) 当 $1<r\leqslant q\leqslant\infty$ 时, $RH_\infty(\mathbb{Z})\subset RH_q(\mathbb{Z})\subset RH_r(\mathbb{Z})$;

(iii) 如果 $w\in A_\infty(\mathbb{Z})$, 那么存在 $r\in(1,\infty)$, 使得 $w\in RH_r(\mathbb{Z})$.

证明　论断 (i) 和 (ii) 的证明与连续情形完全类似, 故只证 (iii). 只需证: 任取 $w\in A_q(\mathbb{Z})$, 其中 $q\in[1,\infty)$, 存在 $\epsilon\in(0,\infty)$, 使得 $w\in RH_{1+\epsilon}(\mathbb{Z})$. 不失一般性, 只证 (iii) 对 $q\in(1,\infty)$ 成立, 因为由 (i) 知 (iii) 如果对 $q\in(1,\infty)$ 成立, 那么对 $q=1$ 自动成立.

为此, 可进一步将此证明归结为只需证: 对任意 $m,n\in\mathbb{Z}$ $(m\leqslant n)$, 有

$$\left\{\frac{1}{n-m+1}\sum_{s=m}^{n}[w(s)]^{1+\epsilon}\right\}^{\frac{1}{1+\epsilon}}\lesssim\frac{1}{n-m+1}\sum_{s=m}^{n}w(s), \tag{2.1}$$

其中隐含的正常数不依赖于 m 和 n. 事实上, 对任意 $x\in\mathbb{R}$, 令

$$W(x):=\begin{cases} w(s), & s-\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant s+\frac{1}{4},\\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \tag{2.2}$$

首先断言: 若 $w:=\{w(s)\}_{s\in\mathbb{Z}}\in A_q(\mathbb{Z})$, 则 $W\in A_q(\mathbb{R})$. 为此, 设 $w:=\{w(s)\}_{s\in\mathbb{Z}}\in A_q(\mathbb{Z})$. 从而, 对任意 $m,n\in\mathbb{Z}$ $(m\leqslant n)$, 有

$$\left\{\sum_{s=m}^{n}w(s)\right\}\left\{\sum_{s=m}^{n}[w(s)]^{-\frac{1}{q-1}}\right\}^{q-1}\leqslant [w]_{A_q(\mathbb{Z})}(n-m+1)^q. \tag{2.3}$$

任取有限开区间 $I:=(a,b)$, 其中 $a,b\in\mathbb{R}$ 且 $a<b$, 有

$$\begin{aligned}\int_I W(x)dx &= \sum_{s=-\infty}^{\infty}\int_{I\cap[s-\frac{1}{2},s+\frac{1}{2})}W(x)dx=\sum_{s=-\infty}^{\infty}\int_{I\cap[s-\frac{1}{4},s+\frac{1}{4})}w(s)dx\\ &=\sum_{s=\lceil a-\frac{1}{4}\rceil}^{\lfloor b+\frac{1}{4}\rfloor}w(s)\left|(a,b)\cap\left[s-\frac{1}{4},s+\frac{1}{4}\right)\right|\leqslant\sum_{s=\lceil a-\frac{1}{4}\rceil}^{\lfloor b+\frac{1}{4}\rfloor}w(s)\min\left\{b-a,\frac{1}{2}\right\}.\end{aligned}$$

同上可得 $\int_I[W(x)]^{-\frac{1}{q-1}}dx\leqslant\sum_{s=\lceil a-\frac{1}{4}\rceil}^{\lfloor b+\frac{1}{4}\rfloor}[w(s)]^{-\frac{1}{q-1}}\min\{b-a,\frac{1}{2}\}$. 因此, 由 (2.3) 知,

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{1}{|I|}\int_I W(x)dx\right\}\left\{\frac{1}{|I|}\int_I[W(x)]^{-\frac{1}{q-1}}dx\right\}^{q-1}\\ &\quad=\frac{1}{|I|^q}\left\{\int_I W(x)dx\right\}\left\{\int_I[W(x)]^{-\frac{1}{q-1}}dx\right\}^{q-1}\\ &\quad\leqslant\frac{1}{(b-a)^q}\left\{\sum_{s=\lceil a-\frac{1}{4}\rceil}^{\lfloor b+\frac{1}{4}\rfloor}w(s)\right\}\left\{\sum_{s=\lceil a-\frac{1}{4}\rceil}^{\lfloor b+\frac{1}{4}\rfloor}[w(s)]^{-\frac{1}{q-1}}\right\}^{q-1}\left[\min\left\{b-a,\frac{1}{2}\right\}\right]^q\\ &\quad\leqslant[w]_{A_q(\mathbb{Z})}\left\{\frac{\lfloor b+\frac{1}{4}\rfloor-\lceil a-\frac{1}{4}\rceil+1}{b-a}\right\}^q\left[\min\left\{b-a,\frac{1}{2}\right\}\right]^q.\end{aligned}$$

进一步, 分两种情形.

情形 1 当 $b-a\geqslant\frac{1}{2}$ 时, 有

$$\left\{\frac{1}{|I|}\int_I W(x)dx\right\}\left\{\frac{1}{|I|}\int_I[W(x)]^{-\frac{1}{q-1}}dx\right\}^{q-1}\leqslant[w]_{A_q(\mathbb{Z})}\frac{1}{2^q}\left\{\frac{b-a+\frac{3}{2}}{b-a}\right\}^q\leqslant 2^q[w]_{A_q(\mathbb{Z})}.$$

情形 2 当 $b-a<\frac{1}{2}$ 时, 有

$$\left\{\frac{1}{|I|}\int_I W(x)dx\right\}\left\{\frac{1}{|I|}\int_I[W(x)]^{-\frac{1}{q-1}}dx\right\}^{q-1}\leqslant[w]_{A_q(\mathbb{Z})}(b-a)^q\left\{\frac{b-a+\frac{3}{2}}{b-a}\right\}^q\leqslant 2^q[w]_{A_q(\mathbb{Z})}.$$

综上知断言成立.

再由上述断言和文献 [19, 第 IV 章, 引理 2.5] 知, 存在 $\epsilon\in(0,\infty)$, 使得 $W\in RH_{1+\epsilon}(\mathbb{R})$. 从而, 对任意区间 $I:=(a,b)$, 其中 $a,b\in\mathbb{R}$ 且 $a<b$, 有

$$\left\{\frac{1}{|I|}\int_I[W(x)]^{1+\epsilon}dx\right\}^{\frac{1}{1+\epsilon}}\leqslant[W]_{RH_{1+\epsilon}(\mathbb{R})}\frac{1}{|I|}\int_I W(x)dx. \tag{2.4}$$

在 (2.4) 中取 $a := m - \frac{1}{2}$ 和 $b := n + \frac{1}{2}$, 得

$$\left\{\frac{1}{n-m+1}\sum_{s=m}^{n}\int_{s-\frac{1}{2}}^{s+\frac{1}{2}}[W(x)]^{1+\epsilon}dx\right\}^{\frac{1}{1+\epsilon}} \leqslant [W]_{RH_{1+\epsilon}(\mathbb{R})}\frac{1}{n-m+1}\sum_{s=m}^{n}\int_{s-\frac{1}{2}}^{s+\frac{1}{2}}W(x)dx.$$

从而,

$$\left\{\frac{1}{n-m+1}\sum_{s=m}^{n}\int_{s-\frac{1}{4}}^{s+\frac{1}{4}}[w(s)]^{1+\epsilon}dx\right\}^{\frac{1}{1+\epsilon}} \leqslant [W]_{RH_{1+\epsilon}(\mathbb{R})}\frac{1}{n-m+1}\sum_{s=m}^{n}\int_{s-\frac{1}{4}}^{s+\frac{1}{4}}w(s)dx.$$

故 (2.1) 成立, 从而 (iii) 成立. 引理 2.1 证毕. □

下面的引理是文献 [14, 引理 1] 的简单变形.

引理 2.2 考虑 $\mathbb{Z}$ 上具有符号 m 的伪差分算子 t_m. 若 $t_m : \ell^1_w(\mathbb{Z}) \to \ell^{p,\infty}_w(\mathbb{Z})$ 有界, 则 m 的卷积核 $k := \mathcal{F}^{-1}m \in \ell^{p,\infty}_w(\mathbb{Z})$ 且

$$\|k\|_{\ell^{p,\infty}_w(\mathbb{Z})} \leqslant \|t_m\|_{\mathcal{B}(\ell^1_w(\mathbb{Z}),\ell^{p,\infty}_w(\mathbb{Z}))}w(0) < \infty,$$

其中, 对任意赋范线性空间 X 和 Y, 记 $\mathcal{B}(X,Y)$ 为所有从 X 到 Y 的有界线性算子构成的赋范线性空间, 并且任意 $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ 的范数定义为

$$\|T\|_{\mathcal{B}(X,Y)} := \sup_{\|f\|_X=1}\{\|T(f)\|_Y\}.$$

证明 设 $t_m : \ell^1_w(\mathbb{Z}) \to \ell^{p,\infty}_w(\mathbb{Z})$ 有界, 即

$$w(\{s \in \mathbb{Z} : |t_m f(s)| > t\}) \leqslant \left[C_0\frac{\|f\|_{\ell^1_w(\mathbb{Z})}}{t}\right]^p,$$

其中 $C_0 := \|t_m\|_{\mathcal{B}(\ell^1_w(\mathbb{Z}),\ell^{p,\infty}_w(\mathbb{Z}))}$. 特别地, 取 $f := \mathbf{1}_{\{0\}}$, 则 $t_m f = k * f = k$. 因此有

$$w(\{s \in \mathbb{Z} : |t_m f(s)| > t\}) = w(\{s \in \mathbb{Z} : |k(s)| > t\}) \leqslant \left[\frac{C_0}{t}w(0)\right]^p < \infty.$$

引理 2.2 证毕. □

注 2.1 取 $w(m) = 1, \forall m \in \mathbb{Z}$, 则引理 2.2 回到文献 [14, 引理 1].

为证定理 1.1, 还需如下定理, 它是文献 [14, 定理 3] 的加权版本.

定理 2.1 令 $p \in (1,\infty)$, t_m 为以 m 为符号的伪差分算子. 记 t_m 的卷积核为 $k := \mathcal{F}^{-1}m$, 其中 $\mathcal{F}^{-1}m$ 为符号 m 的 Fourier 逆变换, 定义为: 对任意 $s \in \mathbb{Z}$, 有 $\mathcal{F}^{-1}m(s) := \int_{\mathbb{T}} e^{i2\pi s\xi}m(s,\xi)d\xi$, 则有

(i) $t_m : \ell^1_w(\mathbb{Z}) \to \ell^{p,\infty}_w(\mathbb{Z})$ 能被延拓成有界算子当且仅当 $k := \mathcal{F}^{-1}m \in \ell^{p,\infty}_w(\mathbb{Z})$. 进一步,

$$\|k\|_{\ell^{p,\infty}_w(\mathbb{Z})} \sim \|t_m\|_{\mathcal{B}(\ell^1_w(\mathbb{Z}),\ell^{p,\infty}_w(\mathbb{Z}))},$$

其中隐含的正常数不依赖于 k、m 和 t_m.

(ii) $t_m : \ell^1_w(\mathbb{Z}) \to \ell^p_w(\mathbb{Z})$ 能被延拓成有界算子当且仅当 $k := \mathcal{F}^{-1}m \in \ell^p_w(\mathbb{Z})$. 进一步,

$$\|k\|_{\ell^{p,\infty}_w(\mathbb{Z})} \sim \|t_m\|_{\mathcal{B}(\ell^1_w(\mathbb{Z}),\ell^p_w(\mathbb{Z}))},$$

其中隐含的正常数不依赖于 k、m 和 t_m.

证明 先证 (i). 令 $p\in(1,\infty)$. 由引理 2.2 可知, 若 $t_m:\ell^1_w(\mathbb{Z})\to\ell^{p,\infty}_w(\mathbb{Z})$ 有界, 则

$$\|k\|_{\ell^{p,\infty}_w(\mathbb{Z})}:=\|\mathcal{F}^{-1}(m)\|_{\ell^{p,\infty}_w(\mathbb{Z})}\leqslant\|t_m\|_{\mathcal{B}(\ell^1_w(\mathbb{Z}),\ell^{p,\infty}_w(\mathbb{Z}))}w(0).$$

故只需证 $k:=\mathcal{F}^{-1}m\in\ell^{p,\infty}_w(\mathbb{Z})$ 能推出 $t_m:\ell^1_w(\mathbb{Z})\to\ell^{p,\infty}_w(\mathbb{Z})$ 有界. 事实上, 设

$$k:=\mathcal{F}^{-1}m\in\ell^{p,\infty}_w(\mathbb{Z}).$$

由弱 Young 不等式 (参见文献 [20, 定理 1.5], 其中将 μ 替换为 $w(E):=\sum_{s\in E}w(s),\forall\,E\subset\mathbb{Z}$) 知,

$$\|t_mf\|_{\ell^{p,\infty}_w(\mathbb{Z})}=\|k*f\|_{\ell^{p,\infty}_w(\mathbb{Z})}\leqslant\|k*f\|_{\ell^{p}_w(\mathbb{Z})}\lesssim\|k\|_{\ell^{p,\infty}_w(\mathbb{Z})}\|f\|_{\ell^{1}_w(\mathbb{Z})},$$

从而有 $\|t_m\|_{\mathcal{B}(\ell^1_w(\mathbb{Z}),\ell^{p,\infty}_w(\mathbb{Z}))}\lesssim\|k\|_{\ell^{p,\infty}_w(\mathbb{Z})}$, 其中隐含的正常数均不依赖于 k、m 和 t_m. (i) 证毕.

再证 (ii). 若 $t_m:\ell^1_w(\mathbb{Z})\to\ell^p_w(\mathbb{Z})$ 有界, 则

$$\|t_mf\|_{\ell^{p}_w(\mathbb{Z})}\leqslant\|t_m\|_{\mathcal{B}(\ell^1_w(\mathbb{Z}),\ell^{p,\infty}_w(\mathbb{Z}))}\|f\|_{\ell^{1}_w(\mathbb{Z})}.$$

特别地, 若取 $f=\mathbf{1}_{\{0\}}$, $t_mf=k*f=k$, 则有

$$\|k\|_{\ell^{p,\infty}_w(\mathbb{Z})}\leqslant\|t_m\|_{\mathcal{B}(\ell^1_w(\mathbb{Z}),\ell^{p}_w(\mathbb{Z}))}w(0).$$

反之, 由 Young 不等式知,

$$\|t_mf\|_{\ell^{p,\infty}_w(\mathbb{Z})}=\|k*f\|_{\ell^{p,\infty}_w(\mathbb{Z})}\leqslant\|k*f\|_{\ell^{p}_w(\mathbb{Z})}\lesssim\|k\|_{\ell^{p}_w(\mathbb{Z})}\|f\|_{\ell^{1}_w(\mathbb{Z})},$$

从而有 $\|t_m\|_{\mathcal{B}(\ell^1_w(\mathbb{Z}),\ell^{p}_w(\mathbb{Z}))}\lesssim\|k\|_{\ell^{p}_w(\mathbb{Z})}$, 其中隐含的正常数均不依赖于 k、m 和 t_m. (ii) 证毕. 综上, 定理 2.1 证毕. □

定理 1.1 的证明 不妨设 $q\in(1,\infty)$, 因为定理 1.1 对 $q=1$ 的情形类似可证.

首先证 (i). 不妨设 $r\in(1,\infty)$, 因为定理 1.1(i) 对 $r=\infty$ 的情形类似可证. $I_{k,\lambda+\mathrm{i}\gamma}$ 的卷积核定义为, 对任意 $s\in\mathbb{Z}$, 有

$$k_{k,\lambda+\mathrm{i}\gamma}(s):=\begin{cases}\dfrac{1}{m^{\lambda+\mathrm{i}\gamma}}, & s=m^k,\quad m\in\mathbb{N},\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

先证第一部分. 设 $\lambda p\geqslant q$. 由定理 2.1(i) 知, 只需证 $k_{k,\lambda+\mathrm{i}\gamma}\in\ell^{p,\infty}_w(\mathbb{Z})$. 事实上, 注意到 $t>1$ 时, $w(\{m^k\in\mathbb{Z}:m\in\mathbb{N},\ m<\frac{1}{t^{1/\lambda}}\})=0$. 从而,

$$\begin{aligned}\|k_{k,\lambda+\mathrm{i}\gamma}\|_{\ell^{p,\infty}_w(\mathbb{Z})}&:=\sup_{t\in(0,\infty)}t[w(\{s\in\mathbb{Z}:|k_{k,\lambda+\mathrm{i}\gamma}(s)|>t\})]^{\frac{1}{p}}\\&=\sup_{t\in(0,\infty)}t\left[w\left(\left\{m^k\in\mathbb{Z}:m\in\mathbb{N},\ \frac{1}{m^\lambda}>t\right\}\right)\right]^{\frac{1}{p}}\\&=\sup_{t\in(0,1]}t\left[w\left(\left\{m^k\in\mathbb{Z}:m\in\mathbb{N},\ m<\frac{1}{t^{1/\lambda}}\right\}\right)\right]^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

进一步, 由 (1.1)、$w^k\in A_q(\mathbb{Z})$ 和定义 1.2 知,

$$w(\{s\in\mathbb{Z}:|k_{k,\lambda+\mathrm{i}\gamma}(s)|>t\})=w\left(\left\{m^k\in\mathbb{Z}:m\in\mathbb{N},\ \frac{1}{m^\lambda}>t\right\}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= w\left(\left\{m^k \in \mathbb{Z} : m \in \mathbb{N},\ m < \frac{1}{t^{1/\lambda}}\right\}\right) \\
&= \sum_{\{m\in\mathbb{N}:\, m<\frac{1}{t^{1/\lambda}}\}} w(m^k) = \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{1}{t^{1/\lambda}} \rfloor} w(m^k) \\
&\sim \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{1}{t^{1/\lambda}} \rfloor} [w(m)]^k \lesssim [w^k]_{A_q(\mathbb{Z})} \left(\left\lfloor \frac{1}{t^{1/\lambda}} \right\rfloor\right)^q \left\{ \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{1}{t^{1/\lambda}} \rfloor} [w(m)]^{-\frac{k}{q-1}} \right\}^{1-q} \\
&\lesssim [w(1)]^k [w^k]_{A_q(\mathbb{Z})} \left(\frac{1}{t^{1/\lambda}}\right)^q \sim [w(1)]^k [w^k]_{A_q(\mathbb{Z})} t^{-\frac{q}{\lambda}},
\end{aligned}
$$

其中隐含的正常数均不依赖于 w、k、λ、γ 和 t. 因此, 由 $\lambda p \geqslant q$ 知,

$$
\begin{aligned}
\|k_{k,\lambda+\mathrm{i}\gamma}\|_{\ell_w^{p,\infty}(\mathbb{Z})} &\lesssim [w(1)]^k [w^k]_{A_q(\mathbb{Z})} \sup_{t\in(0,1]} t[t^{-\frac{q}{\lambda p}}] \sim [w(1)]^k [w^k]_{A_q(\mathbb{Z})} \sup_{t\in(0,1]} t^{1-\frac{q}{\lambda p}} \\
&\lesssim [w(1)]^k [w^k]_{A_q(\mathbb{Z})} < \infty,
\end{aligned}
$$

其中隐含的正常数均不依赖于 w、k、λ、γ 和 t. 第一部分得证.

再证第二部分. 假设 $\lambda p < 1 - \frac{1}{r}$, 由定理 2.1(i) 知, 只需证 $k_{k,\lambda+\mathrm{i}\gamma} \notin \ell_w^{p,\infty}(\mathbb{Z})$. 事实上, 当 t 充分小时 ($t < \delta_0$, 其中 $\delta_0 \in (0,1)$), 由 (1.1)、$w^k \in RH_r(\mathbb{Z})$ 和定义 1.4 知,

$$
\begin{aligned}
&w(\{s \in \mathbb{Z} : |k_{k,\lambda+\mathrm{i}\gamma}(s)| > t\}) \\
&\quad = w\left(\left\{m^k \in \mathbb{Z} : m \in \mathbb{N},\ \frac{1}{m^\lambda} > t\right\}\right) = w\left(\left\{m^k \in \mathbb{Z} : m \in \mathbb{N},\ m < \frac{1}{t^{1/\lambda}}\right\}\right) \\
&\quad = \sum_{\{m\in\mathbb{N}:\, m<\frac{1}{t^{1/\lambda}}\}} w(m^k) = \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{1}{t^{1/\lambda}} \rfloor} w(m^k) \\
&\quad \sim \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{1}{t^{1/\lambda}} \rfloor} [w(m)]^k \gtrsim [w^k]_{RH_r(\mathbb{Z})} \left(\left\lfloor \frac{1}{t^{1/\lambda}} \right\rfloor\right)^{1-\frac{1}{r}} \left\{ \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{1}{t^{1/\lambda}} \rfloor} [w(m)]^{kr} \right\}^{\frac{1}{r}} \\
&\quad \gtrsim [w(1)]^k [w^k]_{RH_r(\mathbb{Z})} \left(\frac{1}{t^{1/\lambda}}\right)^{1-\frac{1}{r}} \sim [w(1)]^k [w^k]_{RH_r(\mathbb{Z})} t^{-\frac{1}{\lambda}(1-\frac{1}{r})},
\end{aligned}
$$

其中隐含的正常数均不依赖于 w、k、λ、γ 和 t. 因此, 再由 $\lambda p < 1 - \frac{1}{r}$ 知,

$$
\begin{aligned}
\|k_{k,\lambda+\mathrm{i}\gamma}\|_{\ell_w^{p,\infty}(\mathbb{Z})} &\geqslant \sup_{t\in(0,\delta_0)} t[w(\{s \in \mathbb{Z} : |k_{k,\lambda+\mathrm{i}\gamma}(s)| > t\})]^{\frac{1}{p}} \\
&\gtrsim [w(1)]^k [w^k]_{RH_r(\mathbb{Z})} \sup_{t\in(0,\delta_0)} t[t^{-\frac{1}{\lambda p}(1-\frac{1}{r})}] \\
&\sim [w(1)]^k [w^k]_{RH_r(\mathbb{Z})} \sup_{t\in(0,\delta_0)} t^{1-\frac{1}{\lambda p}(1-\frac{1}{r})} = \infty,
\end{aligned}
$$

其中隐含的正常数均不依赖于 w、k、λ、γ 和 t. 从而结论成立. 第二部分得证. (i) 证毕.

再证 (ii). 同样先证第一部分. 设 $\lambda p > q$. 由定理 2.1(i) 知, 只需证 $k_{k,\lambda+\mathrm{i}\gamma} \in \ell_w^p(\mathbb{Z})$. 事实上, 由 (1.1)、$w^k \in A_q(\mathbb{Z})$、定义 1.2 和 $\lambda p > q$ 知,

$$
\sum_{s\in\mathbb{Z}} |k_{k,\lambda+\mathrm{i}\gamma}(s)|^p w(s) = \sum_{\{s=m^k:\, m\in\mathbb{N}\}} \frac{1}{s^{\lambda p/k}} w(s) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{m^{\lambda p}} [w(m^k)] \sim \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=2^\ell}^{2^{\ell+1}-1} \frac{1}{m^{\lambda p}} [w(m)]^k
$$

$$
\begin{aligned}
&\lesssim \sum_{\ell=0}^{\infty} 2^{-\ell\lambda p} \sum_{m=2^\ell}^{2^{\ell+1}-1} [w(m)]^k \\
&\lesssim [w^k]_{A_q(\mathbb{Z})} \sum_{\ell=0}^{\infty} 2^{-\ell\lambda p} (2^{\ell+1}-1)^q \left\{ \sum_{m=1}^{2^{\ell+1}-1} [w(m)]^{-\frac{k}{q-1}} \right\}^{1-q} \\
&\lesssim [w(1)]^k [w^k]_{A_q(\mathbb{Z})} \sum_{\ell=0}^{\infty} 2^{-\ell(\lambda p-q)} \sim [w(1)]^k [w^k]_{A_q(\mathbb{Z})} < \infty,
\end{aligned}
$$

其中隐含的正常数均不依赖于 w、k 和 γ. 第一部分得证.

再证第二部分. 考虑如下两种情形:

情形 1 $r \in (1,\infty)$. 假设 $\lambda p \leqslant 1 - \frac{1}{r}$, 由定理 2.1(i) 知, 只需证 $k_{k,\lambda+\mathrm{i}\gamma} \notin \ell^p_w(\mathbb{Z})$. 事实上, 若 $\lambda p \leqslant 1 - \frac{1}{r}$, 则由 (1.1)、$w^k \in RH_r(\mathbb{Z})$、定义 1.4 和 (1.2) 知,

$$
\begin{aligned}
\sum_{s\in\mathbb{Z}} |k_{k,\lambda+\mathrm{i}\gamma}(s)|^p w(s) &= \sum_{\{s=m^k:\, m\in\mathbb{N}\}} \frac{1}{s^{\lambda p/k}} w(s) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{m^{\lambda p}} [w(m^k)] \sim \sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{m^{\lambda p}} [w(m)]^k \\
&\gtrsim \overline{\lim_{\ell\to\infty}}\, 2^{-\ell\lambda p} \sum_{\{m\in\mathbb{N}:\, 0<m\leqslant 2^\ell\}} [w(m)]^k \\
&\sim \overline{\lim_{\ell\to\infty}}\, 2^{-\ell\lambda p} \sum_{m=1}^{2^\ell} [w(m)]^k \gtrsim [w^k]_{RH_r(\mathbb{Z})} \overline{\lim_{\ell\to\infty}}\, 2^{-\ell\lambda p} \left\{ \sum_{m=1}^{2^\ell} [w(m)]^{kr} \right\}^{1/r} 2^{\ell(1-\frac{1}{r})} \\
&\gtrsim [w(1)]^k [w^k]_{RH_r(\mathbb{Z})} \lim_{\ell\to\infty} \left\{ \sum_{m=1}^{2^\ell} 1 \right\}^{1/r} = \infty,
\end{aligned}
$$

其中隐含的正常数均不依赖于 w、k、λ、γ 和 p. 因此, 第一部分对情形 1 得证.

情形 2 $r=\infty$. 假设 $\lambda p \leqslant 1$, 由定理 2.1(i) 知, 只需证 $k_{k,\lambda+\mathrm{i}\gamma} \notin \ell^p_w(\mathbb{Z})$. 事实上, 若 $\lambda p \leqslant 1$, 则由 (1.1)、定义 1.4 和 (1.2) 知,

$$
\begin{aligned}
\sum_{s\in\mathbb{Z}} |k_{k,\lambda+\mathrm{i}\gamma}(s)|^p w(s) &= \sum_{\{s=m^k:\, m\in\mathbb{N}\}} \frac{1}{s^{\lambda p/k}} w(s) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{m^{\lambda p}} [w(m^k)] \\
&\sim \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=2^{\ell-1}}^{2^\ell-1} \frac{1}{m^{\lambda p}} [w(m)]^k \gtrsim \sum_{\ell=1}^{\infty} 2^{-\ell\lambda p} \sum_{m=2^{\ell-1}}^{2^\ell-1} [w(m)]^k \\
&\gtrsim [w^k]_{RH_r(\mathbb{Z})} \sum_{\ell=1}^{\infty} 2^{-\ell(\lambda p-1)} = \infty,
\end{aligned}
$$

其中隐含的正常数均不依赖于 w、k、λ、γ 和 p. 因此, 第二部分对情形 2 得证. 综上知第二部分成立. (ii) 证毕. 综上, 定理 1.1 证毕. □

致谢 作者在此对两位审稿人细致认真的评审以及富有启发性的修改意见致以深深的谢意, 这些意见或建议使得本文更完善且更具有可读性.

参考文献

1 Pierce L B. Discrete analogues in harmonic analysis. PhD Thesis. Princeton: Princeton University, 2009

2 Botchway L N A, Gaël Kibiti P, Ruzhansky M. Difference equations and pseudo-differential operators on $\mathbb{Z}^n$. J Funct Anal, 2020, 278: 108473

3 Gopalan P, Kane D M, Meka R. Pseudorandomness via the discrete Fourier transform. SIAM J Comput, 2018, 47: 2451–2487
4 de Oliveira Neto J R, Lima J B. Discrete fractional Fourier transforms based on closed-form Hermite-Gaussian-like DFT eigenvectors. IEEE Trans Signal Process, 2017, 65: 6171–6184
5 Culiuc A, Kesler R, Lacey M T. Sparse bounds for the discrete cubic Hilbert transform. Anal PDE, 2019, 12: 1259–1272
6 Naor A. Discrete Riesz transforms and sharp metric X_p inequalities. Ann of Math (2), 2016, 184: 991–1016
7 Domelevo K, Petermichl S. Sharp L^p estimates for discrete second order Riesz transforms. Adv Math, 2014, 262: 932–952
8 Mirek M. Square function estimates for discrete Radon transforms. Anal PDE, 2018, 11: 583–608
9 Pierce L B. Discrete fractional Radon transforms and quadratic forms. Duke Math J, 2012, 161: 69–106
10 Ionescu A D, Stein E M, Magyar A, et al. Discrete Radon transforms and applications to ergodic theory. Acta Math, 2007, 198: 231–298
11 Ionescu A D, Wainger S. L^p boundedness of discrete singular Radon transforms. J Amer Math Soc, 2006, 19: 357–383
12 Pierce L B. On discrete fractional integral operators and mean values of Weyl sums. Bull Lond Math Soc, 2011, 43: 597–612
13 Stein E M, Wainger S. Two discrete fractional integral operators revisited. J Anal Math, 2002, 87: 451–479
14 Cardona D. Pseudo-differential operators on $\mathbb{Z}^n$ with applications to discrete fractional integral operators. Bull Iranian Math Soc, 2019, 45: 1227–1241
15 Hooley C. On Hypothesis K^* in Waring's problem. In: Sieve Methods, Exponential Sums, and Their Applications in Number Theory. London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 237. Cambridge: Cambridge University Press, 1997, 175–185
16 Stein E M, Wainger S. Discrete analogues in harmonic analysis II: Fractional integration. J Anal Math, 2000, 80: 335–355
17 Hunt R, Muckenhoupt B, Wheeden R. Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform. Trans Amer Math Soc, 1973, 176: 227–251
18 Stein E M. Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals. Princeton: Princeton University Press, 1993
19 García-Cuerva J, Rubio de Francia J L. Weighted Norm Inequalities and Related Topics. North-Holland Mathematics Studies, vol. 116. Amsterdam: North-Holland, 1985
20 Bahouri H, Chemin J Y, Danchin R. Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 343. Heidelberg: Springer, 2011

Weighted boundedness of discrete fractional integrals

Xing Fu

Abstract In this paper, via introducing the reverse Hölder class on $\mathbb{Z}$, $RH_r(\mathbb{Z})$ ($r \in (1,\infty)$), and establishing its relation with the space of Muckenhoupt weights on $\mathbb{Z}$, $A_q(\mathbb{Z})$ ($q \in [1,\infty)$), and with the help of the relation between the boundedness of pseudo-difference operators (including the discrete Fourier multiplier) and the estimates of their kernels, we obtain the boundedness of the discrete fractional integral (fractional integral on $\mathbb{Z}$) on discrete (weak-type) Lebesgue spaces $\ell^p_w(\mathbb{Z})$ and $\ell^{p,\infty}_w(\mathbb{Z})$ ($p \in [1,\infty)$).

Keywords discrete fractional integral, weighted discrete (weak-type) Lebesgue space, the space of Muckenhoupt weights on $\mathbb{Z}$, the reverse Hölder class on $\mathbb{Z}$

MSC(2010) 26A33, 47B37, 39A12, 31C20

doi: 10.1360/N012019-00052