中国科学: 数学 2016 年 第 46 卷 第 4 期: 451 ∼ 466
SCIENTIA SINICA Mathematica

《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

修正的临界多孔介质方程 Hölder 连续解的正则性

别群益[①②], 王其如[①*], 姚正安[①]

① 中山大学数学与计算科学学院, 广州 510275;
② 三峡大学理学院, 宜昌 443002
E-mail: qybie@126.com, mcswqr@mail.sysu.edu.cn, mcsyao@mail.sysu.edu.cn

收稿日期: 2014-06-19; 接受日期: 2015-03-22; 网络出版日期: 2016-03-01; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11271379 和 11271381) 和国家重点基础研究发展计划 (批准号: 2010CB808002) 资助项目

摘要 本文研究具耗散的修正临界多孔介质方程弱解的正则性问题. 利用时空 Besov 空间理论结合能量估计方法, 得到了该方程具 Hölder 连续的弱解是光滑解. 多孔介质方程本质上是具非局部零散度速度场的输运扩散方程, 与已有大量研究的准地转方程有许多相似之处. 从数学角度看, 多孔介质方程是准地转方程的一个推广. 本文研究 3 维具耗散的修正临界多孔介质方程弱解的正则性问题. 利用时空 Besov 空间理论结合经典的能量估计方法, 得到了该方程具 Hölder 连续的弱解是光滑解. 利用同样的方法可以证明, 该结论对于 3 维修正的临界准地转方程也是成立的.

关键词 多孔介质方程 正则性 时空 Besov 空间
MSC (2010) 主题分类 76D03, 35Q35

1 引言及主要结论

多孔介质方程在 $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$, $t > 0$ 上的表达式如下:

$$\begin{cases} \partial_t \theta + u \cdot \nabla \theta + \nu \Lambda^\alpha \theta = 0, \\ u = -k(\nabla p + g\gamma\theta), \\ \mathrm{div} u = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 θ 表示液体温度, $\nu > 0$ 是耗散系数. $u = -k(\nabla p + g\gamma\theta)$ 是由 Darcy 定律确定的液体排放速度场. k 表示不同方向的中等基质渗透率与黏性之比, g 是重力加速度, p 是液体压力, 向量 $\gamma \in \mathbb{R}^n$ 是 n 维规范正交系的最后一个向量 e_n, $\Lambda = (-\Delta)^{\frac{1}{2}}$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 2$. 考虑尺度变换

$$\theta(t,x) \to \theta_\lambda(t,x) := \lambda^{\alpha-1}\theta(\lambda^\alpha t, \lambda x), \quad \lambda > 0.$$

该系统可以分为三类: 当 $\alpha = 1$ 时称为临界情形; 当 $1 < \alpha \leqslant 2$ 时称为次临界情形; 当 $0 \leqslant \alpha < 1$ 时称为超临界情形. 为简单起见, 我们令 $k = g = 1$. 关于该系统更多的细节可参见文献 [1,2].

英文引用格式: Bie Q Y, Wang Q R, Yao Z A. Regularity of Hölder continuous solutions of a modified critical porous media equation (in Chinese). Sci Sin Math, 2016, 46: 451–466, doi: 10.1360/N012014-00106

对于系统 (1.1), 当 $\nu = 0$, $n = 2$ 时, 文献 [3] 利用粒子轨道方法得到了在 Hölder 空间 C^s $(0 < s < 1)$ 上局部解的存在唯一性, 并给出了光滑解的爆破准则. 当 $\nu > 0$ 时, 文献 [2] 建立了: (i) 在次临界情形下 Sobolev 空间 H^s $(s > 0)$ 中的全局解; (ii) 在超临界情形下 Sobolev 空间 H^s $(s > \frac{n}{2} + 1)$ 中具小初值解的全局适定性; (iii) 在临界情形下具光滑初始值的光滑解的全局适定性. 另外, 在超临界情形, 文献 [4] 得到了临界 Besov 空间中具小初始值解的全局适定性及任意初始值解的局部适定性.

最近, 文献 [5] 研究了如下修正的临界多孔介质方程:

$$\begin{cases} \partial_t \theta + u \cdot \nabla \theta + \nu \Lambda^\alpha \theta = 0, \\ u = \Lambda^{\alpha-1}\{-(\nabla p + \gamma\theta)\}, \\ \mathrm{div} u = 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 $0 < \alpha < 2$. 因系统 (1.2) 与 (1.1) 在临界情形 $\alpha = 1$ 时具有相似的尺度不变性, 所以称 (1.2) 为修正的临界多孔介质方程.

需要指出的是, 多孔介质方程本质上是具非局部零散度速度场的输运扩散方程 (速度场 u 与温度 θ 的关系见如下 (1.5)). 它们与已有大量研究的准地转方程 [6–13] 有许多相似之处. 从数学角度看, 多孔介质方程是准地转方程的一个推广. 修正的临界准地转方程表示如下:

$$\begin{cases} \partial_t \theta + u \cdot \nabla \theta + \kappa \Lambda^\alpha \theta = 0, & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ u = \Lambda^{\alpha-1} R^\perp \theta, & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \end{cases} \tag{1.3}$$

其中 $n \geqslant 2$, $\kappa > 0$, $\alpha \in (0, 2)$, $R^\perp\theta = \Lambda^{-1}(-\partial_2\theta, \partial_1\theta)$. 在文献 [6] 中, 作者利用文献 [9,14] 的思想结合 Besov 空间技巧, 得出当 $0 < \alpha \leqslant 1$, $\kappa > 0$ 及 $\theta_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ 时, 系统 (1.3) 的 Lery-Hopf 弱解是光滑解, 并指出该结论对任意空间维数 $n \geqslant 2$ 均成立. 最近, 文献 [12] 基于文献 [13] 中的非线性最大值原理给出了 n $(n \geqslant 2)$ 维系统 (1.3) 当 $\alpha \in (0, 1]$ 且 $\theta_0 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 时解的全局适定性. 而当 $0 < \alpha < 2$ 时, 文献 [10] 借助于文献 [8] 的思想, 通过建立适当的连续模得出 2 维情形下, $\theta_0 \in H^m(\mathbb{R}^2)$ $(m > 1)$ 时解的全局适定性.

同样利用模连续性方法, 对于 3 维系统 (1.2), (i) 当 $\alpha = 1$ 时, 即系统 (1.1) 的临界情形, 文献 [15] 得到了其解在 Besov 空间 $\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p,1}(\mathbb{R}^3)$ 中的全局适定性; (ii) 当 $0 < \alpha < 1$ 时, 文献 [5] 得到了其解在 $H^m(\mathbb{R}^3)$ $(m > \frac{5}{2})$ 空间中的全局适定性. 正如文献 [5] 所指出的, 沿着文献 [9] 的途径并结合文献 [6,7,14] 的工作也可以得到 $0 < \alpha < 1$ 时 3 维系统 (1.2) 的全局适定性.

一个自然的问题是, 当 $1 < \alpha < 2$ 时 3 维系统 (1.2) 的解又会有怎样的性质? 本文按照文献 [9] 的框架研究了其中的一个环节, 即 Hölder 连续解的正则性. 不过, 当 $0 < \alpha < 2$ 时, 对于 2 维系统 (1.2), 采用类似于文献 [10] 中的模连续性方法可以得到解的全局适定性. 另外, 文献 [16] 研究了具奇异漂移速度场的非线性抛物型方程 Hölder 连续解的正则性, 并作为应用给出了 2 维系统 (1.3) 弱解的一个正则性准则 (参见文献 [16, 定理 6]). 文献 [17] 研究了 3 维各向异性 Navier-Stokes 方程一类大解的整体正则性. 文献 [18] 考虑不可压 Navier-Stokes 方程的 Koch-Tataru 解, 并证明了在 $\mathbb{R}^d$ $(d \geqslant 3)$ 上该解关于临界 Besov 范数满足衰减估计, 且存在唯一关于空间变量 Hölder 连续的轨道.

受文献 [6,9,11,16] 的启发, 本文研究 $1 < \alpha < 2$ 时 3 维系统 (1.2) 弱解的正则性. 利用时空 Besov 空间理论结合能量估计方法得到具 Hölder 连续的弱解是光滑解. 本文主要结果如下:

定理 1.1 设 $1 < \alpha < 2$, $\theta_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$. 令 $I = [t_0, t_1] \subset (0, \infty)$. 假定系统 (1.2) 的弱解 $\theta \in L^\infty(I; L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(I; \dot{H}^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{R}^3))$ 满足 $\theta \in L^\infty(I; C^\sigma(\mathbb{R}^3))$, 其中

$$\min\left\{\frac{2-\alpha}{2},\frac{\alpha-1}{2}\right\}<\sigma<1.$$

则存在 $\delta>0$ 及几乎处处的 $t_0'\in(t_0,t_1)$, 使得 $\theta\in L^\infty([t_0',t_1];C^{1,\delta}(\mathbb{R}^3))$. 进一步地, 有

$$\theta\in C^\infty((t_0,t_1]\times\mathbb{R}^3).$$

注 1.1　我们分两种情形证明定理 1.1: (1) $\sigma\in(\frac{\alpha-1}{2},1)$; (2) $\sigma\in(\frac{2-\alpha}{2},1)$. 其中, 情形 1 利用文献 [6] 的方法证明; 而对于情形 2, 文献 [6] 的方法不再适用, 我们借助于文献 [19] 中引入的时空 Besov 空间技术结合经典的能量估计方法加以证明 (参见文献 [16]).

注 1.2　采用类似的方法证明可得定理 1.1 的结论对于 3 维系统 (1.3) 也是成立的.

最后说明系统 (1.2) 中 u 与 θ 的关系. 首先由 Darcy 定律得出 (1.1) 中 u 与 θ 的关系 (参见文献 [2,4]). 将旋度算子作用在 Darcy 定律上两次, 由 $-\mathrm{curl}(\mathrm{curl}u)+\nabla\mathrm{div}u=\Delta u$ 及 $\mathrm{div}u=0$, 得 $-\mathrm{curl}(\mathrm{curl}u)=\Delta u$. 所以

$$\Delta u=\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x_1\partial x_3},\ \frac{\partial^2\theta}{\partial x_2\partial x_3},\ -\frac{\partial^2\theta}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2\theta}{\partial x_2^2}\right).$$

由 Newton 势公式及分部积分可得

$$u(t,x)=-\frac{2}{3}(0,0,\theta)+\frac{1}{4\pi}\mathrm{P.V.}\int_{\mathbb{R}^3}K(x-y)\theta(t,y)dy,\quad x\in\mathbb{R}^3,\tag{1.4}$$

这里核函数

$$K(x)=\left(\frac{3x_1x_3}{|x|^5},\frac{3x_2x_3}{|x|^5},\frac{2x_3^2-x_1^2-x_2^2}{|x|^5}\right).$$

所以 $u(t,x)=C\theta+\mathcal{P}(\theta)$, 其中 C 是一个常向量, $\mathcal{P}(\theta)$ 是一个关于 θ 的奇异积分算子, 其对应的核函数是 $K(x)$. 因此, 系统 (1.2) 中 u 关于 θ 的表达式为

$$u(t,x)=\Lambda^{\alpha-1}\{C\theta+\mathcal{P}(\theta)\}.\tag{1.5}$$

2　预备知识

本节给出 Besov 空间的定义及相关工具. 首先给出一些记号. 记 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 是通常的 Schwarz 函数类, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 是缓增分布空间. $\hat{f}$ 表示 f 的 Fourier 变换, 即 $\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}f(x)dx$. 分数阶算子 Λ^α 可以用 Fourier 变换表示为 $\widehat{\Lambda^\alpha f}=|\xi|^\alpha\hat{f}(\xi)$. 令

$$\mathcal{S}_0=\left\{\varphi\in\mathcal{S};\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)x^\eta dx=0,|\eta|=0,1,2,\dots\right\}.$$

$\mathcal{S}_0$ 的对偶 $\mathcal{S}_0'=\frac{\mathcal{S}'}{\mathcal{S}_0^\perp}=\frac{\mathcal{S}'}{P}$, 这里 P 是多项式函数空间. 也就是说, 在 $\mathcal{S}'$ 中的两个分布如果相差一个多项式, 则这两个分布在 $\mathcal{S}_0'$ 中被认为是相同的.

设 $\Phi_j\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 使得 $\mathrm{supp}\hat{\Phi}_j\subset A_j$, $\hat{\Phi}_j(\xi)=\hat{\Phi}_0(2^{-j}\xi)$ 且满足

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{\Phi}_k(\xi)=\begin{cases}1, & \xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\},\\ 0, & \xi=0,\end{cases}$$

这里 $A_j=\{\xi\in\mathbb{R}^n;2^{j-1}<|\xi|<2^{j+1}\}$. 因此, 对任意 $f\in\mathcal{S}_0'$, 有

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\Phi_k*f=f. \tag{2.1}$$

为了方便, 记

$$\Delta_j f=\Phi_j*f,\quad j=0,\pm1,\pm2,\dots \tag{2.2}$$

定义 2.1 设 $s\in\mathbb{R}$ 及 $1\leqslant p,q\leqslant\infty$, 齐次 Besov 空间 $\dot{B}^s_{p,q}$ 定义为

$$\dot{B}^s_{p,q}=\{f\in\mathcal{S}_0';\ \|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}}<\infty\},$$

其中

$$\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}}=\begin{cases}\Big(\displaystyle\sum_j(2^{js}\|\Delta_j f\|_{L^p})^q\Big)^{\frac{1}{q}}, & q<\infty,\\ \displaystyle\sup_j 2^{js}\|\Delta_j f\|_{L^p}, & q=\infty.\end{cases}$$

对于 (2.2) 定义的 Δ_j 及 $S_j\equiv\sum_{k<j}\Delta_k$, 若 $|j-k|\geqslant2$, 有 $\Delta_j\Delta_k=0$; 若 $|j-k|\geqslant3$, 则 $\Delta_j(S_{k-1}f\Delta_k f)=0$.

下面命题给出了齐次 Besov 空间的一些简单性质.

命题 2.1 假定 $s\in\mathbb{R}$ 及 $p,q\in[1,\infty]$.

(1) 若 $1\leqslant q_1\leqslant q_2\leqslant\infty$, 则 $\dot{B}^s_{p,q_1}\subset\dot{B}^s_{p,q_2}$.

(2) 若 $1\leqslant p_1\leqslant p_2\leqslant\infty$, 且 $s_1=s_2+n(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2})$, 则 $\dot{B}^{s_1}_{p_1,q}(\mathbb{R}^n)\subset\dot{B}^{s_2}_{p_2,q}(\mathbb{R}^n)$.

(3) 若 $1<p<\infty$, 则

$$\dot{B}^s_{p,\min\{p,2\}}\subset\dot{W}^{s,p}\subset\dot{B}^s_{p,\max\{p,2\}},$$

这里 $\dot{W}^{s,p}$ 表示通常的齐次 Sobolev 空间.

下面是关于分数阶导数的 Bernstein 型不等式.

命题 2.2 设 $\alpha\geqslant0$, $1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty$.

(1) 对于某个整数 j 及常数 $K>0$, 若 f 满足 $\mathrm{supp}\hat{f}\subset\{\xi\in\mathbb{R}^n;|\xi|\leqslant K2^j\}$, 则

$$\|\Lambda^\alpha f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\leqslant C_1 2^{\alpha j+jn(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

(2) 对于某个整数 j 及常数 $0<K_1\leqslant K_2$, 若 f 满足 $\mathrm{supp}\hat{f}\subset\{\xi\in\mathbb{R}^n;K_1 2^j\leqslant|\xi|\leqslant K_2 2^j\}$, 则

$$C_1 2^{\alpha j}\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\leqslant\|\Lambda^\alpha f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\leqslant C_2 2^{\alpha j+jn(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

其中 C_1 和 C_2 是仅依赖于 α,p 及 q 的常数.

接下来给出在 L^p 估计中关于耗散项积分的一个下界 (参见文献 [20,21]).

命题 2.3 设 $\alpha\geqslant0$ 且 $p=2$, 或 $0\leqslant\alpha\leqslant2$ 且 $2<p<\infty$. j 是一个整数, $f\in\mathcal{S}'$, 则存在一个依赖于 n,α 及 p 的常数 c, 使得

$$\int_{\mathbb{R}^n}\Delta_j f|\Delta_j f|^{p-2}\Lambda^\alpha\Delta_j f dx\geqslant c2^{\alpha j}\|\Delta_j f\|^p_{L^p}. \tag{2.3}$$

最后回顾 Chemin-Lerner 时空 Besov 空间 $\widetilde{L}^r(I;\dot{B}^s_{p,q})$, 其范数定义如下:

$$\|f\|_{\widetilde{L}^r(I;\dot{B}^s_{p,q})} = \left\|2^{js}\left(\int_I \|\Delta_j f(\cdot,t)\|^r_{L^p}dt\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_{l^q(\mathbb{Z})},$$

其中 $s\in\mathbb{R}, 1\leqslant r,p,q\leqslant\infty$, I 是一个时间区间. 注意到对任意 $r\geqslant 1$, 有 $\widetilde{L}^r(I;\dot{B}^s_{p,r}) = L^r(I;\dot{B}^s_{p,r})$.

3 主要结果的证明

情形 1 $\sigma\in(\frac{\alpha-1}{2},1)$.

首先, 由经典的 L^2 能量估计及 $\mathrm{div}u=0$, 可知

$$\|\theta(t)\|^2_{L^2} + 2\nu\int_0^t \|\Lambda^{\frac{\alpha}{2}}\theta(\tau)\|^2_{L^2}d\tau \leqslant \|\theta_0\|^2_{L^2},\quad t\in[0,\infty).$$

令 $\sigma_1 := (1-\frac{2}{p})\sigma$, $p\geqslant 2$, 对任意 $t\in[t_0,t_1]$, 根据插值及定理 1.1 的条件 $\theta\in L^\infty(I;C^\sigma(\mathbb{R}^3))$ 可得

$$\begin{aligned}\|\theta(t)\|_{\dot{B}^{\sigma_1}_{p,\infty}} &= \sup_j 2^{\sigma_1 j}\|\Delta_j\theta(t)\|_{L^p}\\ &\leqslant \sup_j 2^{\sigma_1 j}\|\Delta_j\theta(t)\|^{1-\frac{2}{p}}_{L^\infty}\|\Delta_j\theta(t)\|^{\frac{2}{p}}_{L^2}\\ &\leqslant \|\theta(t)\|^{1-\frac{2}{p}}_{C^\sigma}\|\theta(t)\|^{\frac{2}{p}}_{L^2},\end{aligned}$$

其中 $C^\sigma = L^\infty\cap\dot{B}^\sigma_{\infty,\infty}$. 这表明 $\theta\in L^\infty(I;\dot{B}^{\sigma_1}_{p,\infty})$.

将算子 Δ_j 作用于 (1.2) 的第 1 个方程两边, 并乘以 $\Delta_j\theta|\Delta_j\theta|^{p-2}$, 然后在 $\mathbb{R}^3$ 上关于 x 积分, 利用分部积分得

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|\Delta_j\theta\|^p_{L^p} + \nu\int_{\mathbb{R}^3}\Delta_j\theta|\Delta_j\theta|^{p-2}\Lambda^\alpha\Delta_j\theta dx = -\int_{\mathbb{R}^3}\Delta_j\theta|\Delta_j\theta|^{p-2}\Delta_j(u\cdot\nabla\theta)dx. \tag{3.1}$$

由命题 2.3 以及非线性项 $\Delta_j(u\cdot\nabla\theta)$ 的如下分解:

$$\Delta_j(u\cdot\nabla\theta) = J_1+J_2+J_3+J_4+J_5,$$

其中

$$\begin{aligned} J_1 &= \sum_{|j-k|\leqslant 2}[\Delta_j, S_{k-1}u\cdot\nabla]\Delta_k\theta,\\ J_2 &= \sum_{|j-k|\leqslant 2}(S_{k-1}u - S_ju)\cdot\nabla\Delta_j\Delta_k\theta,\\ J_3 &= S_ju\cdot\nabla\Delta_j\theta,\\ J_4 &= \sum_{|j-k|\leqslant 2}\Delta_j(\Delta_k u\cdot\nabla S_{k-1}\theta),\\ J_5 &= \sum_{k\geqslant j-1}\Delta_j(\Delta_k u\cdot\nabla\widetilde{\Delta}_k\theta),\end{aligned}$$

这里 $\widetilde{\Delta}_k = \Delta_{k-1}+\Delta_k+\Delta_{k+1}$, 结合 Hölder 不等式, 我们有

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|\Delta_j\theta\|^p_{L^p} + c\nu 2^{\alpha j}\|\Delta_j\theta\|^p_{L^p} \leqslant \|\Delta_j\theta\|^{p-1}_{L^p}(\|J_1\|_{L^p}+\|J_2\|_{L^p}+\|J_4\|_{L^p}+\|J_5\|_{L^p}). \tag{3.2}$$

因 $\nabla \cdot S_j u = 0$, 关于 J_3 的积分为 0.

下面一一估计上式右端各项. 为了估计 $\|J_1\|_{L^p}$, 将 $[\Delta_j, S_{k-1}u \cdot \nabla]\Delta_k\theta$ 改写为如下积分形式:

$$[\Delta_j, S_{k-1}u \cdot \nabla]\Delta_k\theta = \int_{\mathbb{R}^3} \Phi_j(x-y)(S_{k-1}u(y) - S_{k-1}u(x)) \cdot \nabla\Delta_k\theta(y)dy,$$

其中, Φ_j 是关于 Δ_j 的核. 由

$$\|S_{k-1}(y) - S_{k-1}(x)\|_{L^\infty} \leqslant \|\nabla S_{k-1}u\|_{L^\infty}|x-y| \tag{3.3}$$

及

$$\|\Phi_j(x)|x|\|_{L^1} \leqslant 2^{-j}\|\Phi_0(x)|x|\|_{L^1} \leqslant C2^{-j},$$

可得

$$\begin{aligned}
\|J_1\|_{L^p} &\leqslant \sum_{|j-k|\leqslant 2} \|\Phi_j(x)|x|\|_{L^1}\|\nabla S_{k-1}u\|_{L^\infty}\|\nabla\Delta_k\theta\|_{L^p} \\
&\leqslant C\sum_{|j-k|\leqslant 2} 2^{-j}\|\nabla S_{k-1}u\|_{L^\infty}\|\nabla\Delta_k\theta\|_{L^p} \\
&\leqslant C\sum_{l\leqslant j+2} 2^{l}\|\Delta_l u\|_{L^\infty}\|\Delta_j\theta\|_{L^p} \\
&\leqslant C\sum_{l\leqslant j+2} 2^{-l(\sigma_1-\alpha)}2^{l(\sigma_1-\alpha+1)}\|\Delta_l u\|_{L^\infty}2^{-j\sigma_1}2^{j\sigma_1}\|\Delta_j\theta\|_{L^p} \\
&\leqslant C2^{j(\alpha-2\sigma_1)}\|u\|_{\dot{B}^{\sigma_1-\alpha+1}_{\infty,\infty}}\sum_{l\leqslant j+2} 2^{(l-j)(\alpha-\sigma_1)}2^{j\sigma_1}\|\Delta_j\theta\|_{L^p} \\
&\leqslant C2^{j(\alpha-2\sigma_1)}\|\theta\|_{C^{\sigma_1}}\|\theta\|_{\dot{B}^{\sigma_1}_{p,\infty}},
\end{aligned} \tag{3.4}$$

其中在最后的不等式用到了

$$\|u\|_{\dot{B}^{\sigma_1-\alpha+1}_{\infty,\infty}} = \|\Lambda^{\alpha-1}\{C\theta + \mathcal{P}(\theta)\}\|_{\dot{B}^{\sigma_1-\alpha+1}_{\infty,\infty}} \leqslant C\|\theta\|_{C^{\sigma_1}}.$$

在倒数第 2 个不等式中, 因 $\sigma_1 < \sigma < 1$, 而 $1 < \alpha < 2$, 故 $\sigma_1 < \alpha$. 所以关于 l 的和式是收敛的.

由 Bernstein 不等式, 有

$$\begin{aligned}
\|J_2\|_{L^p} &\leqslant C\sum_{|j-k|\leqslant 2} \|S_{k-1}u - S_j u\|_{L^p}\|\nabla\Delta_j\theta\|_{L^\infty} \\
&\leqslant C\|\Delta_j u\|_{L^p}2^j\|\Delta_j\theta\|_{L^\infty} \\
&\leqslant C2^j2^{-j(\sigma_1-\alpha+1)}2^{j(\sigma_1-\alpha+1)}\|\Delta_j u\|_{L^p}2^{-j\sigma_1}2^{j\sigma_1}\|\Delta_j\theta\|_{L^\infty} \\
&\leqslant C2^{j(\alpha-2\sigma_1)}\|\theta\|_{C^{\sigma_1}}\|u\|_{\dot{B}^{\sigma_1-\alpha+1}_{p,\infty}} \\
&\leqslant C2^{j(\alpha-2\sigma_1)}\|\theta\|_{C^{\sigma_1}}\|\theta\|_{\dot{B}^{\sigma_1}_{p,\infty}}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

对于 J_4, 由于 $\sigma_1 < 1$, 则

$$\begin{aligned}
\|J_4\|_{L^p} &\leqslant C\sum_{|j-k|\leqslant 2} \|\Delta_k u\|_{L^p}\|\nabla S_{k-1}\theta\|_{L^\infty} \\
&\leqslant C\sum_{|j-k|\leqslant 2}\sum_{m\leqslant k-1} \|\Delta_k u\|_{L^p}2^m\|\Delta_m\theta\|_{L^\infty}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\leqslant C2^{j(\alpha-2\sigma_1)}\|u\|_{\dot{B}^{\sigma_1-\alpha+1}_{p,\infty}}\sum_{m\leqslant j+1}2^{(j-m)(\sigma_1-1)}2^{m\sigma_1}\|\Delta_m\theta\|_{L^\infty}\\&\leqslant C2^{j(\alpha-2\sigma_1)}\|\theta\|_{C^{\sigma_1}}\|\theta\|_{\dot{B}^{\sigma_1}_{p,\infty}}.\end{aligned}\tag{3.6}$$

对于 J_5, 由于 $\sigma_1=(1-\frac{2}{p})\sigma$, 且 $\frac{\alpha-1}{2}<\sigma<1$, 故可取足够大的 p 使得 $2\sigma_1-\alpha+1>0$, 这样有

$$\begin{aligned}\|J_5\|_{L^p}&\leqslant C\bigg\|\Delta_j\nabla\cdot\bigg(\sum_{k\geqslant j-1}\Delta_k u\widetilde{\Delta}_k\theta\bigg)\bigg\|_{L^p}\\&\leqslant C2^j\sum_{k\geqslant j-1}\|\Delta_k u\|_{L^p}\|\Delta_k\theta\|_{L^\infty}\\&\leqslant C2^{j(\alpha-2\sigma_1)}\|u\|_{\dot{B}^{\sigma_1-\alpha+1}_{p,\infty}}\sum_{k\geqslant j-1}2^{(j-k)(2\sigma_1-\alpha+1)}2^{k\sigma_1}\|\Delta_k\theta\|_{L^\infty}\\&\leqslant C2^{j(\alpha-2\sigma_1)}\|\theta\|_{C^{\sigma_1}}\|\theta\|_{\dot{B}^{\sigma_1}_{p,\infty}}.\end{aligned}\tag{3.7}$$

联立 (3.4)–(3.7) 的估计及 (3.2), 有

$$\frac{d}{dt}\|\Delta_j\theta\|_{L^p}+c\nu2^{\alpha j}\|\Delta_j\theta\|_{L^p}\leqslant C2^{j(\alpha-2\sigma_1)}\|\theta\|_{C^{\sigma_1}}\|\theta\|_{\dot{B}^{\sigma_1}_{p,\infty}}.\tag{3.8}$$

关于时间 t 积分得

$$\begin{aligned}\|\Delta_j\theta(t)\|_{L^p}\leqslant{}&\mathrm{e}^{-c\nu2^{\alpha j}(t-t_0)}\|\Delta_j\theta(t_0)\|_{L^p}\\&+C\int_{t_0}^t\mathrm{e}^{-c\nu2^{\alpha j}(t-s)}2^{(\alpha-2\sigma_1)j}\|\theta(s)\|_{\dot{B}^{\sigma_1}_{p,\infty}}\|\theta(s)\|_{C^{\sigma_1}}ds.\end{aligned}\tag{3.9}$$

上式两边乘以 $2^{2\sigma_1 j}$, 再关于 j 取上确界导出

$$\begin{aligned}\|\theta(t)\|_{\dot{B}^{2\sigma_1}_{p,\infty}}\leqslant{}&\sup_j\mathrm{e}^{-c\nu2^{\alpha j}(t-t_0)}2^{2\sigma_1 j}\|\Delta_j\theta(t_0)\|_{L^p}\\&+\frac{C}{\nu}\sup_j(1-\mathrm{e}^{-c\nu2^{\alpha j}(t-t_0)})\sup_{s\in[t_0,t]}\|\theta(s)\|_{\dot{B}^{\sigma_1}_{p,\infty}}\|\theta(s)\|_{C^{\sigma_1}}.\end{aligned}$$

由此对任意 $t_0'>t_0$, 有 $\theta\in L^\infty([t_0',t_1],\dot{B}^{2\sigma_1}_{p,\infty})$. 注意到

$$2\sigma_1-\frac{3}{p}=2\bigg(1-\frac{2}{p}\bigg)\sigma-\frac{3}{p}.$$

当 $p\to\infty$ 时, $2\sigma_1-\frac{3}{p}\to2\sigma$, 因此可选取充分大的 p, 使得 $2\sigma_1-\frac{3}{p}=\frac{3}{2}\sigma$. 由 Besov 嵌入定理可得 $\dot{B}^{2\sigma_1}_{p,\infty}\subset\dot{B}^{\frac{3}{2}\sigma}_{\infty,\infty}$. 最后由 $L^\infty\cap\dot{B}^{\frac{3}{2}\sigma}_{\infty,\infty}=C^{\frac{3}{2}\sigma}$ 可知 $\theta\in L^\infty([t_0',t_1];C^{\frac{3}{2}\sigma}(\mathbb{R}^3))$.

经过有限次迭代上面的过程, 对任意 $t_0'>t_0$, 存在 $\delta>0$, 使得 $\theta\in L^\infty([t_0',t_1],C^{1,\delta})$. 因为空间变量的正则性能够转化为关于时间变量的正则性, 由此表明 θ 是系统 (1.2) 在 $[t_0',t_1]$ 上的一个古典解. 更高阶的正则性则可通过标准的方法得到 (参见文献 [6,7]). 故定理 1.1 在 $\sigma\in(\frac{\alpha-1}{2},1)$ 时结论成立.

情形 2 $\sigma\in(\frac{2-\alpha}{2},1)$.

因本节情形 1 已经证明了对任意 $\alpha\in(1,2)$, $\sigma\in(\frac{\alpha-1}{2},1)$ 时定理 1.1 结论成立, 故这里只须证明当 $\frac{2-\alpha}{2}<\sigma\leqslant\frac{\alpha-1}{2}\Leftrightarrow\alpha\in(\frac{3}{2},2)$ 时结论成立. 首先证明如下引理, 该引理给出了证明定理 1.1 的主要估计.

引理 3.1 设 $\sigma\in(\frac{2-\alpha}{2},\frac{\alpha-1}{2})$, $I=[t_0,t_1]\subset(0,\infty)$. 假定 θ 是 (1.2) 的一个具 Hölder 连续的弱解, 即

$$\theta\in L^\infty(I;L^2(\mathbb{R}^3))\cap L^2(I;\dot{H}^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{R}^3))\cap L^\infty(I;C^\sigma(\mathbb{R}^3)).$$

对于某个固定的 $p \geqslant 2$, 若 $\theta \in L^2(I;\dot{B}^{\frac{\alpha}{2}}_{p,2}(\mathbb{R}^3))$, 则对任意 $1 \leqslant r \leqslant \infty$ 及 $q \in (\frac{\alpha-2\sigma}{2(\alpha-1-\sigma)}p, \frac{\alpha-2\sigma}{\alpha-4\sigma}p)$, 有 $\theta \in \widetilde{L}^2(I;\dot{B}^{\frac{\alpha}{2}}_{q,r}(\mathbb{R}^3))$.

证明 类似于 (3.1) 可得

$$\frac{1}{q}\frac{d}{dt}\|\Delta_j\theta\|^q_{L^q} + \nu\int_{\mathbb{R}^3}\Delta_j\theta|\Delta_j\theta|^{q-2}\Lambda^\alpha\Delta_j\theta dx = -\int_{\mathbb{R}^3}\Delta_j\theta|\Delta_j\theta|^{q-2}\Delta_j(u\cdot\nabla\theta)dx. \tag{3.10}$$

利用 Bony 仿积分解及 $\mathrm{div}u=0$, 将 $\Delta_j(u\cdot\nabla\theta)$ 分解为

$$\begin{aligned}\Delta_j(u\cdot\nabla\theta) &= \sum_{|j-k|\leqslant 2}\Delta_j\nabla\cdot(S_{k-1}u\Delta_k\theta) + \sum_{|j-k|\leqslant 2}\Delta_j(\Delta_k u\cdot\nabla S_{k-1}\theta) + \sum_{k\geqslant j-1}\Delta_j\nabla\cdot(\Delta_k u\widetilde{\Delta}_k\theta)\\ &=: I_1 + I_2 + I_3.\end{aligned} \tag{3.11}$$

由 Hölder 不等式及命题 2.3, 有

$$\frac{1}{q}\frac{d}{dt}\|\Delta_j\theta\|^q_{L^q} + c\nu 2^{\alpha j}\|\Delta_j\theta\|^q_{L^q} \leqslant \|\Delta_j\theta\|^{q-1}_{L^q}(\|I_1\|_{L^q} + \|I_2\|_{L^q} + \|I_3\|_{L^q}). \tag{3.12}$$

首先估计 $\|I_1\|_{L^q}$. 由 (1.5) 及 Calderón-Zygmund 算子的有界性, 对于齐次算子 Δ_k 及 $1 \leqslant q \leqslant \infty$, 有

$$u = \Lambda^{\alpha-1}\{C\theta + \mathcal{P}(\theta)\} \Rightarrow \|\Delta_k u\|_{L^q} \leqslant C2^{(\alpha-1)k}\|\Delta_k\theta\|_{L^q}, \tag{3.13}$$

由此得

$$\begin{aligned}\|I_1\|_{L^q} &\leqslant C2^j\sum_{|j-k|\leqslant 2}\sum_{l<k-1}\|\Delta_l u\|_{L^q}\|\Delta_k\theta\|_{L^\infty}\\ &\leqslant C2^j\sum_{|j-k|\leqslant 2}2^{-k\sigma}(2^{k\sigma}\|\Delta_k\theta\|_{L^\infty})\sum_{l<k-1}2^{(\alpha-1)l}\|\Delta_l\theta\|_{L^q}\\ &\leqslant C\|\theta\|_{C^\sigma}2^j\sum_{|j-k|\leqslant 2}2^{-k\sigma}\sum_{l<k-1}2^{(\alpha-1)l}(2^{\frac{\alpha}{2}l}\|\Delta_l\theta\|_{L^p})^{\frac{p}{q}}(2^{l\sigma}\|\Delta_l\theta\|_{L^\infty})^{1-\frac{p}{q}}2^{-l(\frac{\alpha p}{2q}+\sigma(1-\frac{p}{q}))}\\ &\leqslant C\|\theta\|^{2-\frac{p}{q}}_{C^\sigma}2^{j(\alpha-\sigma-\frac{\alpha p}{2q}-\sigma(1-\frac{p}{q}))}\sum_{l\leqslant j}2^{(j-l)(-\alpha+1+\frac{\alpha p}{2q}+\sigma(1-\frac{p}{q}))}(2^{\frac{\alpha}{2}l}\|\Delta_l\theta\|_{L^p})^{\frac{p}{q}}\\ &\leqslant C\|\theta\|^{2-\frac{p}{q}}_{C^\sigma}2^{j(\alpha-\sigma-\frac{\alpha p}{2q}-\sigma(1-\frac{p}{q}))}\|\theta\|^{\frac{p}{q}}_{\dot{B}^{\frac{\alpha}{2}}_{p,2}},\end{aligned}$$

其中第 3 个不等式用到了插值 $\|\Delta_l\theta\|_{L^q} \leqslant \|\Delta_l\theta\|^{\frac{p}{q}}_{L^p}\|\Delta_l\theta\|^{1-\frac{p}{q}}_{L^\infty}$, 而最后的不等式利用了

$$-\alpha+1+\frac{\alpha p}{2q}+\sigma\left(1-\frac{p}{q}\right) < 0.$$

事实上, 由 $\frac{2-\alpha}{2} < \sigma < \frac{\alpha-1}{2}$ 以及

$$q \in \left(\frac{\alpha-2\sigma}{2(\alpha-1-\sigma)}p, \frac{\alpha-2\sigma}{\alpha-4\sigma}p\right) \Leftrightarrow \frac{p}{q} \in \left(\frac{\alpha-4\sigma}{\alpha-2\sigma}, \frac{2(\alpha-1-\sigma)}{\alpha-2\sigma}\right), \tag{3.14}$$

可得

$$\begin{aligned}-\alpha+1+\frac{\alpha p}{2q}+\sigma\left(1-\frac{p}{q}\right) &= -\alpha+1+\sigma+\frac{p}{q}\left(\frac{\alpha}{2}-\sigma\right)\\ &< -\alpha+1+\sigma+\frac{2(\alpha-1-\sigma)}{\alpha-2\sigma}\cdot\frac{\alpha-2\sigma}{2}\\ &= 0.\end{aligned}$$

类似地估计 $\|I_2\|_{L^q}$ 如下:

$$
\begin{aligned}
\|I_2\|_{L^q} &\leqslant C \sum_{|j-k|\leqslant 2} \sum_{l<k-1} \|\Delta_k u\|_{L^q} \|\nabla \Delta_l \theta\|_{L^\infty} \\
&\leqslant C \sum_{|j-k|\leqslant 2} 2^{(\alpha-1)k} \|\Delta_k \theta\|_{L^q} \sum_{l<k-1} 2^l \|\Delta_l \theta\|_{L^\infty} \\
&\leqslant C \sum_{|j-k|\leqslant 2} 2^{(\alpha-1)k} \|\Delta_k \theta\|_{L^p}^{\frac{p}{q}} \|\Delta_k \theta\|_{L^\infty}^{1-\frac{p}{q}} \sum_{l<k-1} 2^{l(1-\sigma)} (2^{l\sigma} \|\Delta_l \theta\|_{L^\infty}) \\
&\leqslant C \|\theta\|_{C^\sigma} \sum_{|j-k|\leqslant 2} 2^{(\alpha-1)k} (2^{\frac{\alpha}{2}k} \|\Delta_k \theta\|_{L^p})^{\frac{p}{q}} (2^{k\sigma} \|\Delta_k \theta\|_{L^\infty})^{1-\frac{p}{q}} 2^{-k(\frac{\alpha p}{2q}+\sigma(1-\frac{p}{q}))} 2^{k(1-\sigma)} \\
&\leqslant C \|\theta\|_{C^\sigma}^{2-\frac{p}{q}} 2^{j(\alpha-\sigma-\frac{\alpha p}{2q}-\sigma(1-\frac{p}{q}))} (2^{\frac{\alpha}{2}j} \|\Delta_j \theta\|_{L^p})^{\frac{p}{q}} \\
&\leqslant C \|\theta\|_{C^\sigma}^{2-\frac{p}{q}} 2^{j(\alpha-\sigma-\frac{\alpha p}{2q}-\sigma(1-\frac{p}{q}))} \|\theta\|_{\dot{B}^{\frac{\alpha}{2}}_{p,\infty}}^{\frac{p}{q}} \\
&\leqslant C \|\theta\|_{C^\sigma}^{2-\frac{p}{q}} 2^{j(\alpha-\sigma-\frac{\alpha p}{2q}-\sigma(1-\frac{p}{q}))} \|\theta\|_{\dot{B}^{\frac{\alpha}{2}}_{p,2}}^{\frac{p}{q}},
\end{aligned}
$$

其中倒数第 4 个不等式利用了

$$
\sigma < 1 \Rightarrow \sum_{l<k-1} 2^{l(1-\sigma)} \leqslant C 2^{k(1-\sigma)},
$$

最后的不等式用到了 $\dot{B}^{\frac{\alpha}{2}}_{p,2} \subset \dot{B}^{\frac{\alpha}{2}}_{p,\infty}$.

下面类似地估计 $\|I_3\|_{L^q}$,

$$
\begin{aligned}
\|I_3\|_{L^q} &\leqslant C 2^j \sum_{k\geqslant j-1} \|\Delta_k u\|_{L^q} \|\widetilde{\Delta}_k \theta\|_{L^\infty} \\
&\leqslant C 2^j \sum_{k\geqslant j-1} 2^{(\alpha-1)k} \|\Delta_k \theta\|_{L^q} 2^{-k\sigma} (2^{k\sigma} \|\Delta_k \theta\|_{L^\infty}) \\
&\leqslant C 2^j \|\theta\|_{C^\sigma} \sum_{k\geqslant j-1} 2^{k(\alpha-1-\sigma)} (2^{\frac{\alpha}{2}} \|\Delta_k \theta\|_{L^p})^{\frac{p}{q}} (2^{k\sigma} \|\Delta_k \theta\|_{L^\infty})^{1-\frac{p}{q}} 2^{-k(\frac{\alpha p}{2q}+\sigma(1-\frac{p}{q}))} \\
&\leqslant C 2^{j(\alpha-\sigma-\frac{\alpha p}{2q}-\sigma(1-\frac{p}{q}))} \|\theta\|_{C^\sigma}^{2-\frac{p}{q}} \sum_{k\geqslant j-1} 2^{(j-k)(-\alpha+1+\sigma+\frac{\alpha p}{2q}+\sigma(1-\frac{p}{q}))} (2^{\frac{\alpha}{2}k} \|\Delta_k \theta\|_{L^p})^{\frac{p}{q}} \\
&\leqslant C 2^{j(\alpha-\sigma-\frac{\alpha p}{2q}-\sigma(1-\frac{p}{q}))} \|\theta\|_{C^\sigma}^{2-\frac{p}{q}} \|\theta\|_{\dot{B}^{\frac{\alpha}{2}}_{p,2}}^{\frac{p}{q}},
\end{aligned}
$$

其中最后的不等式用到了

$$
-\alpha + 1 + \sigma + \frac{\alpha p}{2q} + \sigma\left(1 - \frac{p}{q}\right) > 0.
$$

事实上, 由 $\frac{2-\alpha}{2} < \sigma < \frac{\alpha-1}{2}$ 及 (3.14) 有

$$
\begin{aligned}
-\alpha + 1 + \sigma + \frac{\alpha p}{2q} + \sigma\left(1 - \frac{p}{q}\right) &= -\alpha + 1 + 2\sigma + \frac{p}{q}\left(\frac{\alpha}{2} - \sigma\right) \\
&> -\alpha + 1 + 2\sigma + \frac{\alpha - 4\sigma}{\alpha - 2\sigma} \cdot \frac{\alpha - 2\sigma}{2} \\
&= 1 - \frac{\alpha}{2} > 0.
\end{aligned}
$$

由上面的估计及 (3.12) 得

$$\frac{d}{dt}\|\Delta_j\theta\|_{L^q}+c\nu 2^{\alpha j}\|\Delta_j\theta\|_{L^q}\leqslant C2^{j(\alpha-\sigma-\frac{\alpha p}{2q}-\sigma(1-\frac{p}{q}))}\|\theta\|_{C^\sigma}^{2-\frac{p}{q}}\|\theta\|_{\dot B^{\frac{\alpha}{2}}_{p,2}}^{\frac{p}{q}}.$$

借助于 Gronwall 不等式, 有

$$\begin{aligned}\|\Delta_j\theta\|_{L^q}\leqslant{}& \mathrm{e}^{-c\nu 2^{\alpha j}(t-t_0)}\|\Delta_j\theta(t_0)\|_{L^q}+C\|\theta\|_{L^\infty(I;C^\sigma)}^{2-\frac{p}{q}}2^{j(\alpha-\sigma-\frac{\alpha p}{2q}-\sigma(1-\frac{p}{q}))}\\&\times\int_{t_0}^t\mathrm{e}^{-c\nu 2^{\alpha j}(t-s)}\|\theta(s)\|_{\dot B^{\frac{\alpha}{2}}_{p,2}}^{\frac{p}{q}}ds.\end{aligned}\tag{3.15}$$

利用关于卷积的 Young 不等式

$$\|f*g\|_{L^2(I)}\leqslant\|f\|_{L^1(I)}\|g\|_{L^2(I)}\leqslant\|f\|_{L^1(I)}\|g\|_{L^{\frac{2q}{p}}(I)}|I|^{\frac{q-p}{2q}}$$

及 $\|\mathrm{e}^{-c\nu 2^{\alpha j}(t-t_0)}\|_{L^r(I)}\leqslant\min\{C2^{-\frac{\alpha}{r}j},|I|^{\frac{1}{r}}\}$, 可得

$$\left\|\int_{t_0}^t\mathrm{e}^{-c\nu 2^{\alpha j}(t-s)}\|\theta(s)\|_{\dot B^{\frac{\alpha}{2}}_{p,2}}^{\frac{p}{q}}ds\right\|_{L^2(I)}\leqslant\min\{C2^{-\alpha j},|I|\}\|\theta\|_{L^2(I;\dot B^{\frac{\alpha}{2}}_{p,2})}^{\frac{p}{q}}|I|^{\frac{q-p}{2q}}.$$

将 (3.15) 关于时间 t 取 $L^2(I)$ 范数, 得

$$\begin{aligned}\|\Delta_j\theta\|_{L^2(I;L^q)}\leqslant{}& C\|\Delta_j\theta(t_0)\|_{L^p}^{\frac{p}{q}}\|\Delta_j\theta(t_0)\|_{L^\infty}^{1-\frac{p}{q}}\min\{C2^{-\frac{\alpha}{2}j},|I|^{\frac12}\}\\&+C\|\theta\|_{L^\infty(I;C^\sigma)}^{2-\frac{p}{q}}\|\theta\|_{L^2(I;\dot B^{\frac{\alpha}{2}}_{p,2})}^{\frac{p}{q}}|I|^{\frac{q-p}{2q}}2^{j(\alpha-\sigma-\frac{\alpha p}{2q}-\sigma(1-\frac{p}{q}))}\min\{C2^{-\alpha j},|I|\}\\\leqslant{}& C\|\theta(t_0)\|_{L^p}^{\frac{p}{q}}\|\theta(t_0)\|_{C^\sigma}^{1-\frac{p}{q}}(2^{-j\sigma(1-\frac{p}{q})}\min\{C2^{-\frac{\alpha}{2}j},|I|^{\frac12}\})\\&+C\|\theta\|_{L^\infty(I;C^\sigma)}^{2-\frac{p}{q}}\|\theta\|_{L^2(I;\dot B^{\frac{\alpha}{2}}_{p,2})}^{\frac{p}{q}}|I|^{\frac{q-p}{2q}}(2^{j(\alpha-\sigma-\frac{\alpha p}{2q}-\sigma(1-\frac{p}{q}))}\min\{C2^{-\alpha j},|I|\}).\end{aligned}\tag{3.16}$$

注意到由条件 $\theta\in L_t^\infty L_x^2\cap L_t^\infty L_x^\infty$ 蕴含 $\theta(t_0)\in L^p$. 将 (3.16) 两端乘以 $2^{\frac{\alpha}{2}j}$, 并关于 j 取 $l^r(\mathbb{Z})$ 范数, 得

$$\begin{aligned}\|\theta\|_{\widetilde L^2(I;\dot B^{\frac{\alpha}{2}}_{q,r})}\leqslant{}& C\|\theta(t_0)\|_{L^p}^{\frac{p}{q}}\|\theta(t_0)\|_{C^\sigma}^{1-\frac{p}{q}}\|2^{j(\frac{\alpha}{2}-\sigma(1-\frac{p}{q}))}\min\{C2^{-\frac{\alpha}{2}j},|I|^{\frac12}\}\|_{l^r(\mathbb{Z})}\\&+C\|\theta\|_{L^\infty(I;C^\sigma)}^{2-\frac{p}{q}}\|\theta\|_{L^2(I;\dot B^{\frac{\alpha}{2}}_{p,2})}^{\frac{p}{q}}|I|^{\frac{q-p}{2q}}\|2^{j(\frac32\alpha-\sigma-\frac{\alpha p}{2q}-\sigma(1-\frac{p}{q}))}\min\{C2^{-\alpha j},|I|\}\|_{l^r(\mathbb{Z})}.\end{aligned}\tag{3.17}$$

由于 $\frac{2-\alpha}{2}<\sigma<\frac{\alpha-1}{2}$ 及 (3.14), 我们有

$$\begin{cases}-\sigma\left(1-\dfrac{p}{q}\right)<0,\\\dfrac{\alpha}{2}-\sigma\left(1-\dfrac{p}{q}\right)>0,\\\dfrac12\alpha-\sigma-\dfrac{\alpha p}{2q}-\sigma\left(1-\dfrac{p}{q}\right)<0,\\\dfrac32\alpha-\sigma-\dfrac{\alpha p}{2q}-\sigma\left(1-\dfrac{p}{q}\right)>0.\end{cases}\tag{3.18}$$

因此 (3.17) 右端两个 $l^r(\mathbb{Z})$ $(1\leqslant r\leqslant\infty)$ 范数有界. 故 $\theta\in\widetilde L^2(I;\dot B^{\frac{\alpha}{2}}_{q,r}(\mathbb{R}^3))$ 对任意 $1\leqslant r\leqslant\infty$ 及任意 $q\in(\frac{\alpha-2\sigma}{2(\alpha-1-\sigma)}p,\frac{\alpha-2\sigma}{\alpha-4\sigma}p)$ 成立. 引理 3.1 得证. □

引理 3.2 设 θ 是系统 (1.2) 的一个具 Hölder 连续弱解, 即对于某个 $\sigma \in (\frac{2-\alpha}{2}, \frac{\alpha-1}{2})$, 若

$$\theta \in L^\infty(I; L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(I; \dot{H}^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{R}^3)) \cap L^\infty(I; C^\sigma(\mathbb{R}^3)),$$

则 $\theta \in L^2(I; \dot{B}^{\frac{\alpha}{2}}_{\infty,1}(\mathbb{R}^3))$.

证明 由于 $\dot{H}^{\frac{\alpha}{2}} = \dot{B}^{\frac{\alpha}{2}}_{2,2}$, 结合引理 3.1, 可得当 $p=2$ 时, 对任意 $q \in (\frac{\alpha-2\sigma}{\alpha-1-\sigma}, 2\cdot\frac{\alpha-2\sigma}{\alpha-4\sigma})$, 有

$$\theta \in \widetilde{L}^2(I; \dot{B}^{\frac{\alpha}{2}}_{q,2}) = L^2(I; \dot{B}^{\frac{\alpha}{2}}_{q,2}).$$

再次由引理 3.1 得, 对任意 $q \in (\frac{\alpha-2\sigma}{\alpha-1-\sigma}, 2\cdot(\frac{\alpha-2\sigma}{\alpha-4\sigma})^2)$, 有 $\theta \in L^2(I; \dot{B}^{\frac{\alpha}{2}}_{q,2})$. 因为当 $k \to \infty$ 时, $(\frac{\alpha-2\sigma}{\alpha-4\sigma})^k \to \infty$, 所以对任意 $p > 2$ 及 $1 \leqslant r \leqslant \infty$, 由引理 3.1 经过有限次迭代, 有 $\theta \in \widetilde{L}^2(I; \dot{B}^{\frac{\alpha}{2}}_{p,r})$. 注意到这里 p 虽然可以取任意大, 但不能取到 ∞. 下面利用 (3.16) 将 Besov 空间 $\dot{B}^{\frac{\alpha}{2}}_{p,r}$ 中的指数 $\frac{\alpha}{2}$ 提升到 $\frac{\alpha}{2}+\epsilon$ $(\epsilon > 0)$, 再由 Besov 嵌入定理得到引理 3.2 的结论. 为此, 将 (3.16) 的两端乘以 $2^{j(\frac{\alpha}{2}+\epsilon)}$, 即

$$\begin{aligned} 2^{j(\frac{\alpha}{2}+\epsilon)}\|\Delta_j\theta\|_{L^2(I;L^q)} \leqslant{} & C\|\theta(t_0)\|_{L^p}^{\frac{p}{q}}\|\theta(t_0)\|_{C^\sigma}^{1-\frac{p}{q}} \min\{C2^{j(\epsilon-\sigma(1-\frac{p}{q}))}, |I|^{\frac{1}{2}}2^{j(\frac{\alpha}{2}+\epsilon-\sigma(1-\frac{p}{q}))}\} \\ & + C\|\theta\|_{L^\infty(I;C^\sigma)}^{2-\frac{p}{q}}\|\theta\|_{L^2(I;\dot{B}^{\frac{\alpha}{2}}_{p,2})}^{\frac{p}{q}}|I|^{\frac{q-p}{2q}} \\ & \times \min\{C2^{j(\frac{\alpha}{2}+\epsilon-\sigma-\frac{\alpha p}{2q}-\sigma(1-\frac{p}{q}))}, |I|2^{j(\frac{3}{2}\alpha+\epsilon-\sigma-\frac{\alpha p}{2q}-\sigma(1-\frac{p}{q}))}\}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

下面选取适当的 $\epsilon > 0$ 使得 (3.19) 右端关于 j 的 $l^1(\mathbb{Z})$ 范数是有限的. 为此, ϵ 须满足

$$\begin{cases} \epsilon - \sigma\left(1-\dfrac{p}{q}\right) < 0, \\ \epsilon + \dfrac{\alpha}{2} - \sigma\left(1-\dfrac{p}{q}\right) > 0, \\ \epsilon + \dfrac{1}{2}\alpha - \sigma - \dfrac{\alpha p}{2q} - \sigma\left(1-\dfrac{p}{q}\right) < 0, \\ \epsilon + \dfrac{3}{2}\alpha - \sigma - \dfrac{\alpha p}{2q} - \sigma\left(1-\dfrac{p}{q}\right) > 0. \end{cases} \tag{3.20}$$

由 (3.18) 可知, 对任意 $\frac{p}{q} \in (\frac{\alpha-4\sigma}{\alpha-2\sigma}, \frac{2(\alpha-1-\sigma)}{\alpha-2\sigma})$, 上面的 ϵ 是存在的. 选取 $\frac{p}{q}$ 的值为区间 $(\frac{\alpha-4\sigma}{\alpha-2\sigma}, \frac{2(\alpha-1-\sigma)}{\alpha-2\sigma})$ 的中点, 即

$$q = \frac{2(\alpha-2\sigma)}{3\alpha-6\sigma-2}p =: mp.$$

定义当 $q = mp$ 时使 (3.20) 成立的充分小的 ϵ 为 ϵ_1. 对于 $q = mp$ 及 $\epsilon = \epsilon_1$, 将 (3.19) 左右两边关于 j 取 $l^1(\mathbb{Z})$ 范数, 得

$$\theta \in \widetilde{L}^2(I; \dot{B}^{\frac{\alpha}{2}+\epsilon_1}_{mp,1}) \subset L^2(I; \dot{B}^{\frac{\alpha}{2}+\epsilon_1}_{mp,1}).$$

由 Besov 嵌入定理, 有 $\dot{B}^{\frac{\alpha}{2}+\epsilon_1}_{mp,1} \subset \dot{B}^{\frac{\alpha}{2}+\epsilon_1-\frac{3}{mp}}_{\infty,1}$. 选取

$$\epsilon_1 - \frac{3}{mp} = 0 \Leftrightarrow p = \frac{3}{\epsilon_1 m},$$

可得 $\theta \in L^2(I; \dot{B}^{\frac{\alpha}{2}}_{\infty,1})$. 故引理 3.2 得证. □

引理 3.3 设 $I = [t_0, t_1]$, θ 是系统 (1.2) 一个具 Hölder 连续的弱解, 满足 $\theta \in L^2(I; \dot{B}^{\frac{\alpha}{2}}_{\infty,1})$, $\frac{3}{2} < \alpha < 2$. 则存在 $\delta > 0$ 及几乎处处的 $t_0' \in (t_0, t_1)$, 使得 $\theta \in L^\infty([t_0', t_1]; C^{1,\delta})$.

证明 利用能量估计方法证明该引理. 为了得到弱解的高阶能量估计, 可以由标准的 Friedrich 方法将方程 (1.2) 正则化, 然后对正则化参数取极限. 由此不妨假设 θ 光滑并分别对 θ 作 $\dot{H}^1,\dot{H}^2$ 及 $\dot{H}^3$ 估计.

第 1 步 $\dot{H}^1$ 估计. 将 ∂_i 作用于系统 (1.2) 的第 1 个方程两边并乘以 $\partial_i\theta$, 再关于 x 在 $\mathbb{R}^3$ 上积分并对 $i=1,2$ 求和, 得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\theta\|_{L^2}^2+\nu\|\Lambda^{\frac{\alpha}{2}}\nabla\theta\|_{L^2}^2&=-\sum_{i=1}^{2}\int_{\mathbb{R}^3}\partial_i(u\cdot\nabla\theta)\partial_i\theta dx\\&\leqslant\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u||\nabla\theta|^2dx\\&\leqslant\|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla\theta\|_{L^4}^2\\&\leqslant C\|\Lambda^\alpha\theta\|_{L^2}\|\nabla\theta\|_{L^4}^2\\&\leqslant C\|\theta\|_{L^\infty}^{\frac{3-\alpha}{\alpha}}\|\Lambda^{\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^\infty}^{\frac{2\alpha-3}{\alpha}}\|\nabla\theta\|_{L^2}^{\frac{2\alpha-3}{\alpha}}\|\Lambda^{\frac{\alpha}{2}}\nabla\theta\|_{L^2}^{\frac{3}{\alpha}}\\&\leqslant\frac{\nu}{2}\|\Lambda^{\frac{\alpha}{2}}\nabla\theta\|_{L^2}^2+C\|\Lambda^{\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^\infty}^2\|\nabla\theta\|_{L^2}^2,\end{aligned}\tag{3.21}$$

这里利用了如下 Gagliardo-Nirenberg 不等式:

$$\|\Lambda^\alpha\theta\|_{L^2}\leqslant C\|\theta\|_{L^\infty}^{\frac{3-\alpha}{\alpha}}\|\Lambda^{\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^\infty}^{\frac{2\alpha-3}{\alpha}},$$

$$\|\nabla\theta\|_{L^4}\leqslant C\|\nabla\theta\|_{L^2}^{\frac{2\alpha-3}{2\alpha}}\|\Lambda^{\frac{\alpha}{2}}\nabla\theta\|_{L^2}^{\frac{3}{2\alpha}}.$$

条件 $\frac{3}{2}<\alpha<2$ 使得 $0<\frac{3-\alpha}{\alpha}<1$ 及 $0<\frac{3}{2\alpha}<1$. 由假设条件 $\theta\in L^2(I;\dot{B}^{\frac{\alpha}{2}}_{\infty,1})$ 及 $\dot{B}^{\frac{\alpha}{2}}_{\infty,1}\subset\dot{W}^{\frac{\alpha}{2},\infty}$, 借助于 Gronwall 不等式, 对几乎处处的 $t_0\leqslant t\in I$, 由 (3.21), 我们有

$$\|\theta(t)\|_{\dot{H}^1}^2\leqslant\|\theta(t_0)\|_{\dot{H}^1}^2e^{\int_{t_0}^t\|\Lambda^{\frac{\alpha}{2}}\theta(s)\|_{L^\infty}^2ds}<\infty.\tag{3.22}$$

这表明 $\theta\in L^\infty(I;\dot{H}^1)\cap L^2(I;\dot{H}^{1+\frac{\alpha}{2}})$.

第 2 步 $\dot{H}^2$ 估计. 用 $I'=[t_2,t_1]$ $(t_2>t_0)$ 取代 $I=[t_0,t_1]$, 将 Δ 算子作用于系统 (1.2) 的第 1 个方程两边并乘以 $\Delta\theta$, 再关于 x 在 $\mathbb{R}^3$ 上积分可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta\theta\|_{L^2}^2+\nu\|\Lambda^{\frac{\alpha}{2}}\Delta\theta\|_{L^2}^2&\leqslant\left|\int_{\mathbb{R}^3}\Delta(u\cdot\nabla\theta)\Delta\theta dx\right|\\&\leqslant C\bigg(\int_{\mathbb{R}^3}|\Delta u||\nabla\theta||\Delta\theta|dx+\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u||\Delta\theta|^2dx\bigg)\\&\leqslant C(\|\Delta u\|_{L^2}\|\nabla\theta\|_{L^\infty}\|\Delta\theta\|_{L^2}+\|\nabla u\|_{L^4}\|\Delta\theta\|_{L^4}\|\Delta\theta\|_{L^2})\\&=:C(A_1+A_2).\end{aligned}\tag{3.23}$$

下面分别估计 A_1 和 A_2. 首先

$$\begin{aligned}A_1&\leqslant C\|\Lambda^{\alpha+1}\theta\|_{L^2}\|\nabla\theta\|_{L^\infty}\|\Delta\theta\|_{L^2}\\&\leqslant C\|\Lambda^{\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^\infty}^{2-\alpha}\|\Lambda^{2+\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^2}^{\alpha-1}\|\Lambda^{\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^\infty}^{\alpha-1}\|\Lambda^{2+\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^2}^{2-\alpha}\|\Delta\theta\|_{L^2}\\&=C\|\Lambda^{\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^\infty}\|\Lambda^{2+\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^2}\|\Delta\theta\|_{L^2}\\&\leqslant\frac{\nu}{4}\|\Lambda^{2+\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^2}^2+C\|\Lambda^{\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^\infty}^2\|\Delta\theta\|_{L^2}^2,\end{aligned}$$

这里利用了如下 Gagliardo-Nirenberg 不等式:

$$\|\Lambda^{\alpha+1}\theta\|_{L^2} \leqslant C\|\Lambda^{\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^\infty}^{2-\alpha}\|\Lambda^{2+\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^2}^{\alpha-1},$$

$$\|\nabla\theta\|_{L^\infty} \leqslant C\|\Lambda^{\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^\infty}^{\alpha-1}\|\Lambda^{2+\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^2}^{2-\alpha}.$$

其次, 对于 A_2 的估计, 有

$$\begin{aligned}A_2 &\leqslant C\|\Lambda^\alpha\theta\|_{L^4}\|\Delta\theta\|_{L^4}\|\Delta\theta\|_{L^2}\\ &\leqslant C\|\Lambda^{\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^\infty}^{\frac{5-2\alpha}{2}}\|\Lambda^{2+\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^2}^{\frac{2\alpha-3}{2}}\|\Lambda^{\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^\infty}^{\frac{2\alpha-3}{2}}\|\Lambda^{2+\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^2}^{\frac{5-2\alpha}{2}}\|\Delta\theta\|_{L^2}\\ &= C\|\Lambda^{\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^\infty}\|\Lambda^{2+\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^2}\|\Delta\theta\|_{L^2}\\ &\leqslant \frac{\nu}{4}\|\Lambda^{2+\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^2}^2 + C\|\Lambda^{\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^\infty}^2\|\Delta\theta\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

上面的估计利用了如下 Gagliardo-Nirenberg 不等式:

$$\|\Lambda^\alpha\theta\|_{L^4} \leqslant C\|\Lambda^{\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^\infty}^{\frac{5-2\alpha}{2}}\|\Lambda^{2+\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^2}^{\frac{2\alpha-3}{2}},$$

$$\|\Delta\theta\|_{L^4} \leqslant C\|\Lambda^{\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^\infty}^{\frac{2\alpha-3}{2}}\|\Lambda^{2+\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^2}^{\frac{5-2\alpha}{2}},$$

其中, 条件 $\frac{3}{2} < \alpha < 2 \Rightarrow 0 < \frac{2\alpha-3}{2} < 1$.

将 A_1 和 A_2 的估计代入 (3.23) 可得

$$\frac{d}{dt}\|\Delta\theta\|_{L^2}^2 + \nu\|\Lambda^{\frac{\alpha}{2}}\Delta\theta\|_{L^2}^2 \leqslant C\|\Lambda^{\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^\infty}^2\|\Delta\theta\|_{L^2}^2.$$

由 Gronwall 不等式知,

$$\theta \in L^\infty(I'; \dot{H}^2) \cap L^2(I'; \dot{H}^{2+\frac{\alpha}{2}}). \tag{3.24}$$

第 3 步　$\dot{H}^3$ 估计. 用 $I'' = [t_3, t_1]$ $(t_3 > t_2)$ 取代 $I' = [t_2, t_1]$, 将微分算子 Λ^3 作用于系统 (1.2) 的第 1 个方程两边并乘以 $\Lambda^3\theta$, 再关于 x 在 $\mathbb{R}^3$ 上积分可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Lambda^3\theta\|_{L^2}^2 + \nu\|\Lambda^{\frac{\alpha}{2}+3}\theta\|_{L^2}^2 &\leqslant \left|\int_{\mathbb{R}^3}\Lambda^3(u\cdot\nabla\theta)\Lambda^3\theta dx\right|\\ &= \left|\int_{\mathbb{R}^3}[\Lambda^3(u\cdot\nabla\theta) - u\cdot\nabla\Lambda^3\theta]\Lambda^3\theta dx\right|\\ &\leqslant C(\|\Lambda^3u\|_{L^2}\|\nabla\theta\|_{L^\infty}\|\Lambda^3\theta\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^4}\|\Lambda^3\theta\|_{L^4}\|\Lambda^3\theta\|_{L^2})\\ &=: C(A_3 + A_4),\end{aligned} \tag{3.25}$$

这里因 $\mathrm{div}u = 0$, 有

$$\int_{\mathbb{R}^3} u\cdot\nabla\Lambda^3\theta\Lambda^3\theta dx = 0.$$

接下来进行 A_3 和 A_4 的估计. 首先,

$$\begin{aligned}A_3 &\leqslant C\|\Lambda^{\alpha+2}\theta\|_{L^2}\|\nabla\theta\|_{L^\infty}\|\Lambda^3\theta\|_{L^2}\\ &\leqslant C\|\Lambda^2\theta\|_{L^2}^{\frac{\alpha-1}{\frac{\alpha}{2}}}\|\Lambda^{2+\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^2}^{(\frac{1}{\alpha}+\frac{2-\alpha}{2})}\|\Lambda^{3+\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^2}^{\frac{\alpha}{2}}\|\Lambda^3\theta\|_{L^2}\\ &\leqslant \frac{\nu}{4}\|\Lambda^{3+\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^2}^2 + C\|\Lambda^{2+\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^2}^{(\frac{1}{\alpha}+\frac{2-\alpha}{2})\cdot\frac{4}{4-\alpha}}\|\Lambda^3\theta\|_{L^2}^{\frac{4}{4-\alpha}}\\ &\leqslant \frac{\nu}{4}\|\Lambda^{3+\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^2}^2 + C\|\Lambda^{2+\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^2}^{(\frac{1}{\alpha}+\frac{2-\alpha}{2})\cdot\frac{4}{4-\alpha}}(C + \|\Lambda^3\theta\|_{L^2}^2).\end{aligned}$$

上面利用了如下 Gagliardo-Nirenberg 不等式,

$$\|\Lambda^{\alpha+2}\theta\|_{L^2} \leqslant C\|\Lambda^{2+\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^2}^{\frac{2-\alpha}{2}}\|\Lambda^{3+\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^2}^{\frac{\alpha}{2}},$$
$$\|\nabla\theta\|_{L^\infty} \leqslant C\|\Lambda^2\theta\|_{L^2}^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\|\Lambda^{2+\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^2}^{\frac{1}{\alpha}},$$

这里利用了条件 $\frac{3}{2}<\alpha<2 \Rightarrow 0<\frac{1}{\alpha}<1$ 及 $0<\frac{\alpha}{2}<1$.

对于 A_4, 有

$$\begin{aligned}
A_4 &\leqslant C\|\Lambda^\alpha\theta\|_{L^4}\|\Lambda^3\theta\|_{L^4}\|\Lambda^3\theta\|_{L^2}\\
&\leqslant C\|\Lambda^2\theta\|_{L^2}^{\frac{5-2\alpha}{2\alpha}}\|\Lambda^{2+\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^2}^{(\frac{4\alpha-5}{2\alpha}+\frac{2\alpha-3}{4})}\|\Lambda^{3+\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^2}^{\frac{7-2\alpha}{4}}\|\Lambda^3\theta\|_{L^2}\\
&\leqslant \frac{\nu}{4}\|\Lambda^{3+\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^2}^2 + C\|\Lambda^{2+\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^2}^{(\frac{4\alpha-5}{2\alpha}+\frac{2\alpha-3}{4})\cdot\frac{8}{1+2\alpha}}\|\Lambda^3\theta\|_{L^2}^{\frac{8}{1+2\alpha}}\\
&\leqslant \frac{\nu}{4}\|\Lambda^{3+\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^2}^2 + C\|\Lambda^{2+\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^2}^{(\frac{4\alpha-5}{2\alpha}+\frac{2\alpha-3}{4})\cdot\frac{8}{1+2\alpha}}(C+\|\Lambda^3\theta\|_{L^2}^2),
\end{aligned}$$

这里利用了如下 Gagliardo-Nirenberg 不等式:

$$\|\Lambda^\alpha\theta\|_{L^4} \leqslant C\|\Lambda^2\theta\|_{L^2}^{\frac{5-2\alpha}{2\alpha}}\|\Lambda^{2+\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^2}^{\frac{4\alpha-5}{2\alpha}},$$
$$\|\Lambda^3\theta\|_{L^4} \leqslant C\|\Lambda^{2+\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^2}^{\frac{2\alpha-3}{4}}\|\Lambda^{3+\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^2}^{\frac{7-2\alpha}{4}},$$

其中由条件 $\frac{3}{2}<\alpha<2$ 可得

$$0<\frac{5-2\alpha}{2\alpha}<1,\quad 0<\frac{2\alpha-3}{4}<1.$$

将 A_3 和 A_4 的估计代入 (3.25) 可得

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|\Lambda^3\theta\|_{L^2}^2+\nu\|\Lambda^{3+\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^2}^2 &\leqslant C(\|\Lambda^{2+\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^2}^{(\frac{1}{\alpha}+\frac{2-\alpha}{2})\cdot\frac{4}{4-\alpha}}+\|\Lambda^{2+\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^2}^{(\frac{4\alpha-5}{2\alpha}+\frac{2\alpha-3}{4})\cdot\frac{8}{1+2\alpha}})\\
&\quad + C(\|\Lambda^{2+\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^2}^{(\frac{1}{\alpha}+\frac{2-\alpha}{2})\cdot\frac{4}{4-\alpha}}+\|\Lambda^{2+\frac{\alpha}{2}}\theta\|_{L^2}^{(\frac{4\alpha-5}{2\alpha}+\frac{2\alpha-3}{4})\cdot\frac{8}{1+2\alpha}})\|\Lambda^3\theta\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

显然当 $\frac{3}{2}<\alpha<2$ 时, 有

$$0<\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{2-\alpha}{2}\right)\cdot\frac{4}{4-\alpha}<2,\quad 0<\left(\frac{4\alpha-5}{2\alpha}+\frac{2\alpha-3}{4}\right)\cdot\frac{8}{1+2\alpha}<2.$$

从而由 Gronwall 不等式及 (3.24) 得

$$\theta\in L^\infty(I'';\dot{H}^3(\mathbb{R}^3))\cap L^2(I'';\dot{H}^{3+\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{R}^3)).$$

根据嵌入定理, 存在 $\delta\in(0,1)$ 使得 $\theta\in\dot{H}^3(\mathbb{R}^3)\subset C^{1,\delta}(\mathbb{R}^3)$. 故引理 3.3 得证. □

最后说明由引理 3.1–3.3 得出当 $\frac{2-\alpha}{2}<\sigma\leqslant\frac{\alpha-1}{2}$ 时定理 1.1 的结论成立. 事实上, 若 $\sigma=\frac{\alpha-1}{2}$, 因 $\theta\in L^\infty\cap C^{\frac{\alpha-1}{2}}\subset C^{\frac{\alpha-1}{2}-\epsilon}$ 对某个 $\epsilon>0$ 成立, 这样将问题转化为 $\frac{2-\alpha}{2}<\sigma<\frac{\alpha-1}{2}$ 的情形. 由引理 3.2 可知, 对任意 $I=[t_0,t_1]\subset(0,\infty)$, 我们有 $\theta\in L^2(I;\dot{B}^{\frac{\alpha}{2}}_{\infty,1})$. 再由引理 3.3, 存在 $\delta>0$ 及几乎处处的 $t_0'\in(t_0,t_1)$, 使得 $\theta\in L^\infty([t_0',t_1];C^{1,\delta})$. 由于空间变量的正则性能够转化为时间变量的正则性, 这表明 θ 是系统 (1.2) 在 $[t_0',t_1]$ 上的一个古典解. 更高阶的正则性则可通过标准的方法得到 (参见文献 [6,7]). 故定理 1.1 得证.

参考文献

1 Oliver M, Bejan A. Convection in Porous Media. New York: Springer-Verlag, 1999
2 Castro A, Cordoba D, Gancedo F, et al. Incompressible flow in porous media with fractional diffusion. Nonlinearity, 2009, 22: 1791–1815
3 Córdoba D, Gancedo F, Orive R. Analytical behavior of two-dimensional incompressible flow in porous media. J Math Phys, 2007, 48: 1–19
4 Xue L. On the well-posedness of incompressible flow in porous media with supercritical diffusion. Appl Anal, 2009, 88: 547–561
5 Yamazaki K. Remarks on the method of modulus of continuity and the modified dissipative porous media equation. J Differential Equations, 2011, 250: 1909–1923
6 Constantin P, Iyer G, Wu J. Global regularity for a modified critical dissipative quasi-geostrophic equation. Indiana Univ Math J, 2008, 57: 2681–2692
7 Constantin P, Wu J. Regularity of Hölder continuous solutions of the supercritical quasi-geostrophic equation. Ann I H Poincaré-AN, 2008, 25: 1103–1110
8 Kiselev A, Nazarov F, Volberg A. Global well-posedness for the critical 2D dissipative quasi-geostrophic equation. Invent Math, 2007, 167: 445–453
9 Caffarelli L, Vasseur A. Drift diffusion equations with fractional diffusion and the quasi-geostrophic equation. Ann Math, 2010, 171: 1903–1930
10 Miao C, Xue L. Global well-posedness for a modified critical dissipative quasi-geostrophic equation. J Differential Equations, 2012, 252: 792–818
11 Miao C, Xue L. On the regularity of a class of generalized quasi-geostrophic equations. J Differential Equations, 2011, 251: 2789–2821
12 Yang W R, Jiu Q S. Global regularity for modified critical disspative quasi-geostrophic equations. Acta Math Sci Ser B, 2014, 34: 1741–1748
13 Constantin P, Vicol V. Nonlinear maximum principle for dissipative linear nonlocal operators and applications. Geom Funct Anal, 2012, 22: 1289–1321
14 Constantin P, Wu J. Hölder continuity of solutions of supercritical dissipative hydrodynamic transport equations. Ann I H Poincaré-AN, 2009, 26: 159–180
15 Yuan B, Yuan J. Global well-posedness of incompressible flow in porous media with critical diffusion in Besov spaces. J Differential Equations, 2009, 246: 4405–4422
16 Friedlander S, Vicol V. Higher regularity of Hölder continuous solutions of parabolic equations with singular drift velocities. J Math Fluid Mech, 2012, 14: 255–266
17 Zhang Z F. Global regularity for some classes of large solutions to the 3-D anisotropic Navier-Stokes equations (in Chinese). Sci Sin Math, 2014, 44: 601–613
18 Zhang P, Zhang T. Regularity of the Koch-Tataru solutions to Navier-Stokes system. Sci China Math, 2012, 55: 453–464
19 Chemin J Y, Lerner N. Flot de champs de vecteurs non lipschitziens et équations de Navier-Stokes. J Differential Equations, 1995, 121: 314–328
20 Wu J. Lower bounds for an integral involving fractional Laplacians and the generalized Navier-Stokes equations in Besov spaces. Comm Math Phys, 2006, 263: 803–831
21 Chen Q, Miao C, Zhang Z. A new Bernstein's inequality and the 2D dissipative quasi-geostrophic equation. Comm Math Phys, 2007, 271: 821–838

Regularity of Hölder continuous solutions of a modified critical porous media equation

BIE QunYi, WANG QiRu & YAO ZhengAn

Abstract In this paper, we study the regularity of weak solutions of a modified critical dissipative porous media equation. By using Besov space techniques combined with energy estimates, we prove that Hölder continuous weak solutions to this system are smooth solutions. The porous media equation is a dissipative transport-diffusion equation with non-local divergence-free velocity field. It shares many similarities with the surface quasi-geostrophic equation. From a mathematical view, the porous media equation is somewhat a generalization of the surface quasi-geostrophic equation. In this paper, we study the regularity of weak solutions of a 3-D modified critical dissipative porous media equation. By using Besov space techniques combined with classical energy estimates, we prove that Hölder continuous weak solutions to this system are smooth solutions. In particular, by applying the same method, we obtain that this result holds true for the 3-D modified critical surface quasi-geostrophic equation.

Keywords porous media equation, regularity, space-time Besov spaces

MSC(2010) 76D03, 35Q35

doi: 10.1360/N012014-00106