后和中心差商，若令 $J_1(\xi, \psi) = \xi_{\hat{x}}\psi_{\hat{y}} - \psi_{\hat{x}}\xi_{\hat{y}}$，$J_2(\xi, \psi) = (\xi\psi_{\hat{y}})_{\hat{x}} - (\xi\psi_{\hat{x}})_{\hat{y}}$，$J_3(\xi, \psi) = (\psi\xi_{\hat{x}})_{\hat{y}} - (\psi\xi_{\hat{y}})_{\hat{x}}$，$\mathscr{J}(\xi, \psi) = \alpha J_1(\xi, \psi) + \beta J_2(\xi, \psi) + rJ_3(\xi, \psi)$ 用上面方程来逼近方程（2）右端项，利用中心差来逼近左端项得

$$\xi_t = \mathscr{J}(\xi, \psi), \tag{3}$$

若取 $\alpha = \beta = r = \frac{1}{3}$，这就是著名的 Arakawa 格式，因为 $(\xi, \mathscr{J}(\xi, \psi)) = 0$ 故这个格式是瞬时平方的，即 $(\xi^{n+1}, \xi^n) = (\xi^n, \xi^{n-1})$. 现在我们用调整时间步长方法，把这个格式改造成平方守恒格式

$$\frac{\xi^{n+1} - \xi^{n-1}}{2\Delta t_n} = \mathscr{J}(\xi^n, \psi^n), \tag{4}$$

$$\Delta t_n = (\xi^n - \xi^{n-1})^T \mathscr{J}(\xi^n, \psi^n) / (\mathscr{J}^T(\xi^n, \psi^n) \cdot \mathscr{J}(\xi^n, \psi^n)), \tag{5}$$

时间步长用下面公式来计算

$$t_{n+1} = t_{n-1} + 2\Delta t_n, \tag{6}$$

这个格式（4）、（5）、（6）是显式的，且有二阶精度，并且是平方守恒的.

$$\begin{aligned}(\xi^{n+1}, \xi^{n+1}) &= (\xi^{n-1} + 2\Delta t_n \mathscr{J}(\xi^n, \psi^n))^T \\ &\quad \times (\xi^{n-1} + 2\Delta t_n \mathscr{J}(\xi^n, \psi^n)) \\ &= (\xi^{n-1}, \xi^{n-1}) + \frac{2(\mathscr{J}, \xi^n - \xi^{n-1})}{(\mathscr{J}, \mathscr{J})}(\xi^{n-1}, \mathscr{J}) \\ &\quad + \frac{2(\mathscr{J}, \xi^n - \xi^{n-1})}{(\mathscr{J}, \mathscr{J})}(\mathscr{J}, \xi^{n-1}) \\ &\quad + 4\left[\frac{(\mathscr{J}, \xi^n - \xi^{n-1})}{(\mathscr{J}, \mathscr{J})}\right]^2 (\mathscr{J}, \mathscr{J}) \\ &= (\xi^{n-1}, \xi^{n-1}),\end{aligned}$$

因此它能稳定长期间计算.

秦孟兆

（中国科学院计算中心，北京）

# 方程 $6y^2 = x(x+1)(2x+1)$ 的解的初等证明

1875 年，E. Lucas 问丢番图方程

$$6y^2 = x(x+1)(2x+1) \tag{1}$$

是否仅有非平凡解 $x = 24, y = 70$. 1918年 Watson 给出了肯定的回答，他利用椭圆函数给了一个复杂的证明（*Messenger of Math.*, **48** (1918/1919), 1—22）. 1952 年 Ljunggren 对四次扩域上的基本单位进行了仔细的研究，利用二次扩域上的 Pell 方程给出了一个新的证明（*Norsk Mat. Tidskr.*, **34** (1952), 65—72）. Mordell 问是否存在一个初等的证明（Richard K. Guy, *Unsolved Problems in Number Theory*, 1981）. 本文用 P. Kanagasabapathy 与 Tharmambikai Ponnudurai 提出的方法（*Quart. J. Math. Oxford.*, **26**(1975), 3: 275—278）给出了一个完全初等的证明，且计算也较为简单.

现给出主要步骤：

丢番图方程（1）的求解问题可以分别化为 Pell 方程组：

$$\begin{cases}2y_1^2 - 3y_3^2 = -1, \\ 4y_2^2 - 3y_3^2 = 1,\end{cases} \tag{2}$$

求公解的问题，这里 $x = y_1^2$，$x + 1 = 2y_2^2$，$2x + 1 = 3y_3^2$，$y = y_1y_2y_3$ 和

$$\begin{cases}y_2^2 - 24y_1^2 = 1, \\ y_3^2 - 48y_1^2 = 1,\end{cases} \tag{3}$$

求公解的问题，其中 $x = 24y_1^2$，$x + 1 = y_2^2$，$2x + 1 = y_3^2$，$y = 2y_1y_2y_3$. 我们在证明中分别从（2）式和（3）式得到关系式

$$4y_1^2 = U_n - 3 \tag{4}$$

和

$$4y_2^2 = U_n + 3, \tag{5}$$

其中 $U_n = \frac{\varepsilon^n + \bar{\varepsilon}^n}{2}$，$\varepsilon = 2 + \sqrt{3}$ 是 Pell 方程 $x^2 - 3y^2 = 1$ 的基本解，$\bar{\varepsilon} = 2 - \sqrt{3}$. 利用 $U_n$ 的性质，对 $n$ 模 20 分类进行讨论，证明了（4）式仅有解 $n = \pm 2$，（5）式仅有解 $n = \pm 4$，即（4）式仅有解 $y_1^2 = 1$，（5）式仅有解 $y_2^2 = 25$. 这就证明了（1）式仅有非平凡解 $x = 24$，$y = 70$.

马德刚

（四川大学数学系，成都）