

摆线针轮行星传动共轲啮合理论

陈兵奎*, 房婷婷, 李朝阳, 王淑妍

重庆大学机械传动国家重点实验室, 重庆 400044

* E-mail: bkchen@cqu.edu.cn

收稿日期: 2006-11-29; 接受日期: 2007-04-03

国家科技支撑计划资助项目(批准号: 2006BAF01B08)

摘要 根据微分几何和齿轮啮合原理, 由针齿及给定的运动, 建立了少齿差行星传动的啮合方程及齿廓的通用方程; 推导了摆线针轮行星传动的正确啮合条件、啮合线、重合度和啮合端点的计算公式; 详细研究了针轮与行星轮为正、负一齿差、二齿差、三齿差等典型少齿差行星传动的共轲啮合理论. 提出了形成内摆线和外摆线的通用方法——包络法. 同时, 给出了摆线针轮行星传动的正确啮合条件, 并讨论了啮合线和重合度. 研究结果对于摆线针轮行星传动的设计, 加工具有重要意义, 并对其他少齿差行星传动的啮合理论研究具有参考价值.

关键词

针轮
摆线
共轲齿廓
啮合方程
包络法
重合度
啮合线

摆线针轮行星传动具有传动比大、结构紧凑、承载能力大和传动效率高等突出的优点, 广泛应用于机械、矿山、冶金、化工、纺织、国防工业等工业领域. 该传动啮合齿数多, 误差平均效应显著, 传动精度高, 且没有柔性构件, 扭转刚度, 近年来在精密传动领域受到了广泛关注. 此外, 基于摆线针轮行星传动原理的摆线齿轮泵由于啮合过程平稳、脉动小、噪声低, 也得到了各国的重视.

摆线针轮行星啮合传动的理论通常描述为: 外摆法和内摆法形成短幅摆线; 短幅摆线和针齿满足齿廓啮合定律; 连续传动条件^[1,2]. 与渐开线等齿轮共轲啮合传动的理论相比, 该理论存在以下问题: (i) 缺乏严密的数学推导, 啮合方程、啮合线等与传动特性密切联系的问题没有相应的阐述; (ii) 理论不成体系, 如一齿差、多齿差行星传动通常是分别论述^[3], 没有反应内齿轮齿廓确定为针齿后其共轲齿廓的实质; (iii) 有自相矛盾的结论, 如连续传动条件为针轮比摆线轮多一齿, 而实际上二齿差、三齿差完全能够正确啮合传动; (iv) 概念不清晰, 对于正确啮合条件、重合度等未给出明确的定义及计算方法.

近年来不少学者在摆线齿轮啮合传动理论方面做了有益的工作. 李力行等^[4]推导了综合考虑移距修形、等距修形及转角修形的摆线轮齿形通用方程式. Litvin等^[5~10]根据齿轮啮合原

理运动学法推导了摆线齿轮泵、Root's Blower 等的共轭啮合方程、多段共轭齿形包络生成方法等. Joong-Ho Shin 等^[11,12]利用普通平面机构的速度瞬心的三心定理, 通过针齿上啮合点的位置和坐标变换得到摆线轮的齿廓曲线方程. Lai^[13,14]根据曲面单参数的包络方法建立了摆线针轮传动的啮合方程. 然而, 上述研究局限于建立一齿差摆线针轮传动啮合方程及计算机实现方法, 未见摆线针轮少齿差行星传动统一理论及关于啮合特性的深入分析. 本文将根据齿轮啮合原理, 由圆柱针齿及给定的运动, 建立行星轮共轭啮合齿廓的通用方程, 并系统分析摆线针轮啮合传动的特性.

1 针齿的共轭齿形

1.1 坐标系的建立

图 1 中, 件 1 为针轮, 件 2 为行星轮. 在针轮与行星轮的中心分别建立与之固连的动坐标系 $O_b x_1 y_1$ 及 $O_g x_2 y_2$, 在针轮中心建立整体固定坐标系 OXY . 在初始位置, X 和 x_1 轴重合, x_2 轴与 X 轴平行. 针齿中心分布圆半径为 R_z , 针齿的半径为 r_z . 针轮与行星轮的齿数分别为 Z_b 和 Z_g , 两轮中心距(输入转臂轴承的偏心距)为 e . 为简化问题的讨论, 采用转臂(曲柄) $O_b O_g$ 固定法. 将行星轮绕 z_2 轴逆时针旋转 θ_a 角, 根据相对运动关系, 针轮将随行星轮绕 z_1 轴逆时针旋转 θ_b 角.

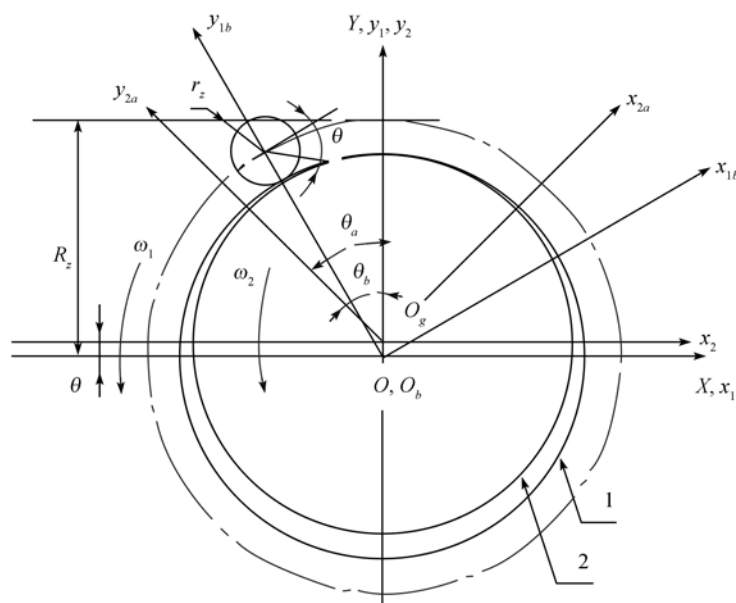


图 1 坐标系的建立

1.2 啮合方程

针齿齿廓在 $O_b x_1 y_1$ 中的方程为

$$\Sigma^{(1)} = x_1 \mathbf{i}_1 + y_1 \mathbf{j}_1 = r_z \cos \theta \mathbf{i}_1 + (r_z \sin \theta + R_z) \mathbf{j}_1, \quad (1)$$

式中: θ 为角参量.

根据齿轮啮合原理的运动学方法, 啮合方程为

$$\phi(\theta, \theta_b) = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{v}_1^{(12)} = 0, \quad (2)$$

其中, $\mathbf{n}_1$ 为针齿啮合点处的法线矢量, 在坐标轴 x_1 和 y_1 上的投影为

$$n_{x1} = dy_1/d\theta = r_z \cos \theta, \quad n_{y1} = -dx_1/d\theta = r_z \sin \theta,$$

$\mathbf{v}_1^{(12)}$ 为啮合点处针轮与行星轮的相对运动速度矢量,

$$\mathbf{v}_1^{(12)} = \mathbf{v}_1^{(1)} - \mathbf{v}_1^{(2)} = (\boldsymbol{\omega}^{(1)} - \boldsymbol{\omega}_1^{(2)}) \times \boldsymbol{\Sigma}^{(1)} + \boldsymbol{\omega}^{(2)} \times \mathbf{e},$$

式中

$$\mathbf{v}_1^{(1)} = \boldsymbol{\omega}^{(1)} \times \boldsymbol{\Sigma}^{(1)}, \quad \mathbf{v}_1^{(2)} = \boldsymbol{\omega}_1^{(2)} \times \boldsymbol{\Sigma}^{(1)} + \mathbf{e} \times \boldsymbol{\omega}^{(2)}, \quad \boldsymbol{\omega}^{(1)} = \omega_1 \mathbf{k}_1, \quad \boldsymbol{\omega}_1^{(2)} = \boldsymbol{\omega}^{(2)} = \omega_2 \mathbf{k}_2.$$

以上各式中 $\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1$ 分别为坐标轴 x_1, y_1, z_1 的单位矢量.

将相关表达式代入(2)式, 计算化简后得啮合函数

$$\phi(\theta, \theta_b) = \lambda \cos(\theta + \theta_b) - \cos \theta = 0, \quad (3)$$

其中 λ 为系数, 且

$$\lambda = ei_{gb}^H / \left[R_Z (i_{gb}^H - 1) \right]. \quad (4)$$

1.3 行星轮的齿廓方程 $\boldsymbol{\Sigma}^{(2)}$

在坐标系 $O_g x_{2a} y_{2a}$ 中, 与针齿齿廓 $\boldsymbol{\Sigma}^{(1)}$ 相共轭的行星轮齿廓 $\boldsymbol{\Sigma}^{(2)}$ 由下式确定:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Sigma}^{(2)} = \mathbf{M}_{21} \boldsymbol{\Sigma}^{(1)}, \\ \phi(\theta, \theta_b) = 0, \end{cases} \quad (5)$$

式中 $\mathbf{M}_{21} = \mathbf{M}_{20} \mathbf{M}_{01}$, 为从 $O_b x_{1b} y_{1b}$ 到 $O_g x_{2a} y_{2a}$ 的变换矩阵.

由 $O_b x_{1b} y_{1b}$ 到 OXY 的变换矩阵为

$$\mathbf{M}_{01} = \begin{bmatrix} \cos \theta_b & -\sin \theta_b & 0 \\ \sin \theta_b & \cos \theta_b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

由 OXY 到 $O_g x_{2a} y_{2a}$ 的变换矩阵为

$$\mathbf{M}_{20} = \begin{bmatrix} \cos \theta_a & \sin \theta_a & -e \sin \theta_a \\ -\sin \theta_a & \cos \theta_a & -e \cos \theta_a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

令 $\theta_a - \theta_b = \phi'_b$, 由 $i_{gb}^H = \theta_a / \theta_b = Z_b / Z_g$, 可得

$$\theta_a = Z_b \phi'_b / (Z_b - Z_g), \quad \theta_b = Z_g \phi'_b / (Z_b - Z_g),$$

于是

$$\mathbf{M}_{21} = \begin{bmatrix} \cos \varphi'_b & \sin \varphi'_b & -e \sin [Z_b \varphi'_b / (Z_b - Z_g)] \\ -\sin \varphi'_b & \cos \varphi'_b & -e \cos [Z_b \varphi'_b / (Z_b - Z_g)] \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

根据三角函数公式解啮合函数(3), 有

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \pm (\lambda \cos \theta_b - 1) / \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \theta_b}, \\ \cos \theta &= \pm \lambda \sin \theta_b / \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \theta_b}. \end{aligned} \quad (9)$$

将(1), (8), (9)式带入(5)式得到行星轮的齿廓方程 $\Sigma^{(2)}$ 的一般表达式

$$\begin{cases} x_2 = R_Z \sin \varphi'_b - e \sin [Z_b \varphi'_b / (Z_b - Z_g)] + r_Z \cos \beta, \\ y_2 = R_Z \cos \varphi'_b - e \cos [Z_b \varphi'_b / (Z_b - Z_g)] - r_Z \sin \beta. \end{cases} \quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \pm \left\{ \lambda \sin [Z_b \varphi'_b / (Z_b - Z_g)] - \sin \varphi'_b \right\} / \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos [Z_g \varphi'_b / (Z_b - Z_g)]}, \\ \sin \beta &= \pm \left\{ -\lambda \cos [Z_b \varphi'_b / (Z_b - Z_g)] + \cos \varphi'_b \right\} / \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos [Z_g \varphi'_b / (Z_b - Z_g)]}. \end{aligned} \quad (11)$$

1.4 短幅摆线形成的包络法

由方程(10)可看出, 前述方法推导出的齿廓曲线方程与短幅外摆线等距曲线的方程形式上接近, 现引入当量齿轮的概念, 令当量摆线轮的齿数 $Z_d = Z_g / (Z_b - Z_g)$, 与其啮合的当量针轮齿数为 $Z_e = i_{gb}^H Z_d = i_{gb}^H Z_g / (Z_b - Z_g) = Z_b / (Z_b - Z_g)$. 定义当量摆线轮的变幅系数 $K_1 = \lambda$, 由(4)式得

$$\lambda = e i_{gb}^H / R_z (i_{gb}^H - 1) = e Z_b / R_z (Z_b - Z_g) = e Z_e / R_z = r'_b / R_z = e' Z_e / R_z = K_1, \quad (12)$$

式中 e' 为当量摆线轮的短幅摆线的偏心距, r'_b 为针轮的节圆半径, 因此有

$$\begin{cases} x_2 = R_Z \sin \varphi'_b - e \sin (Z_e \varphi'_b) + r_Z \cos \beta, \\ y_2 = R_Z \cos \varphi'_b - e \cos (Z_e \varphi'_b) - r_Z \sin \beta. \end{cases} \quad (13)$$

式中

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \pm [K_1 \sin (Z_e \varphi'_b) - \sin \varphi'_b] / \sqrt{1 + K_1^2 - 2K_1 \cos (Z_d \varphi'_b)}, \\ \sin \beta &= \pm [-K_1 \cos (Z_e \varphi'_b) + \cos \varphi'_b] / \sqrt{1 + K_1^2 - 2K_1 \cos (Z_d \varphi'_b)}. \end{aligned} \quad (14)$$

(13)式与普通短幅摆线等距曲线的方程相同, 由此可知前述方法推导出的行星轮齿廓是短幅摆线的等距线. 当 $r_Z = 0$ 时, 将得到理论短幅摆线; 当针轮齿数大于摆线轮齿数时, (14)式等号右边取“正”, 短幅摆线向内等距, 获得短幅外摆线的等距线, 形成普通的针齿摆线行星传动; 当针轮齿数小于摆线轮齿数时, (14)式等号右边取“负”, 短幅摆线向外等距, 获得短幅内摆

线的等距线, 可形成内摆线针轮行星传动.

上述通过推导与针齿共轭啮合的曲线获得短幅摆线方程的方法, 我们称之为短幅摆线形成的包络法. 无论短幅外摆线或短幅内摆线, 只要给针齿施加相应运动, 都能通过包络法得到, 因此包络法是一种形成短幅摆线的通用方法.

2 摆线针轮行星传动中若干性质分析

2.1 正确啮合条件

由上节针齿的共轭齿形的推导过程及(12)式可以得到如下结论: 对于给定的针轮及中心距, 一个摆线轮与之正确啮合的必要条件为: $e = e'$, 即针轮与摆线轮的中心距必须等于短幅摆线的偏心距. 事实上, 该条件也是摆线针轮正确啮合的充分条件.

针轮节圆的齿距为 $p_{tb} = 2\pi r'_b / Z_e$, 且由于 $K_1 = r'_b / R_z$, 所以

$$p_{tb} = 2\pi r'_b / Z_e = 2\pi K_1 R_z / Z_e.$$

摆线轮节圆的齿距为 $p_{tg} = 2\pi e' = 2\pi e = 2\pi K_1 R_z / Z_e$, 因此 $p_{tg} = p_{tb}$, 即摆线轮与针轮在节圆上的齿距相等, 摆线轮与针轮可实现正确连续啮合.

当 $Z_b - Z_g = 1$ 时, $Z_b = 2\pi r'_b / p_{tb} = 2\pi(r_g + e) / 2\pi e = r_g / e + 1$, 显然, r_g / e 为整数, 摆线轮齿廓为连续完整的曲线. 由(12)式, 容易得到

$$e = K_1 R_z / Z_e = K_1 R_z (Z_b - Z_g) / Z_b. \quad (15)$$

根据以上论述, 我们将少齿差摆线针轮传动中基本几何参数之间的关系式列表如下:

表 1 基本几何参数关系式

名称	符号	计算公式
短幅系数 K_1	K_1	$K_1 = \frac{r'_b}{R_z} = \frac{e Z_b}{R_z (Z_b - Z_g)}$
针轮节圆半径	r'_b	$r'_b = K_1 R_z = \frac{e Z_b}{Z_b - Z_g}$
摆线轮节圆半径	r'_g	$r'_g = \frac{Z_g}{Z_b} r'_b = \frac{e Z_g}{Z_b - Z_g} = K_1 R_z \cdot \frac{Z_g}{Z_b}$
偏心距	e	$e = r_b - r_g = \frac{K_1 R_z (Z_b - Z_g)}{Z_b}$
外啮合形成法的滚圆半径	r	$r = \frac{e}{K_1} = \frac{R_z (Z_b - Z_g)}{Z_b}$

2.2 摆线轮齿廓方程中参数 φ'_b 的取值范围

为了保证正反转传动特性的一致, 摆线行星轮的左右齿廓应具有对称性. 摆线轮一个轮齿的对称中轴与摆线齿廓起始线的夹角大小 $\varphi_0 = \pi / Z_g$, 令对称中轴的直线方程为 $y = kx$, 其斜率 $k = \tan(\pi / 2 - \varphi_0) = \cotan \varphi_0$, 所以 $y = x \cotan(\pi / Z_g)$.

将(10)式代入对称中轴的直线方程, 得

$$R_Z \cos \varphi'_b - e \cos \left[Z_b \varphi'_b / (Z_b - Z_g) \right] - \left\{ \pm r_z \frac{-K_1 \cos \left[Z_b \varphi'_b / (Z_b - Z_g) \right] + \cos \varphi'_b}{\sqrt{1 + K_1^2 - 2K_1 \cos \left[Z_g \varphi'_b / (Z_b - Z_g) \right]}} \right\} \\ = \left\{ \begin{array}{l} R_Z \sin \varphi'_b - e \sin \left[Z_b \varphi'_b / (Z_b - Z_g) \right] \pm \\ r_z \frac{K_1 \sin \left[Z_b \varphi'_b / (Z_b - Z_g) \right] - \sin \varphi'_b}{\sqrt{1 + K_1^2 - 2K_1 \cos \left[Z_g \varphi'_b / (Z_b - Z_g) \right]}} \end{array} \right\} \cdot \operatorname{ctan}(\pi / Z_g). \quad (16)$$

用数值计算方法可解得上式中与对称中轴及摆线轮齿廓的交点(即摆线轮齿顶)相对应的 φ'_b , 令其为 $\varphi_{\max}$, 只需在摆线轮齿廓曲线方程式中取 $\varphi'_b \in [0, \varphi_{\max}]$, 即可作出摆线轮一个轮齿一侧的齿廓曲线, 再根据齿廓曲线的对称性, 得到摆线轮左右齿廓曲线. 需要指出的是, 当针轮和摆线轮为一齿差时, 摆线轮齿廓为连续完整的变幅摆线; 当针轮和摆线轮为二齿差及其他齿差数时, 摆线轮的齿廓仅为变幅摆线的一段, 考虑到齿顶不能为尖点, 实际的 $\varphi_{\max}$ 应根据齿顶圆确定.

2.3 摆线针轮行星传动的两次接触

将啮合函数 $\phi(\theta, \theta_b) = K_1 \cos(\theta + \theta_b) - \cos \theta = 0$ 进行变换得针齿转角函数

$$\theta = \arctan \left[(K_1 \cos \theta_b - 1) / K_1 \sin \theta_b \right], \quad \theta_b \neq n\pi (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (17)$$

针齿转角函数的一阶导数为

$$d\theta/d\theta_b = (-K_1^2 + K_1 \cos \theta_b) / (K_1^2 - 2K_1 \cos \theta_b + 1), \quad (18)$$

二阶导数为

$$d^2\theta/d\theta_b^2 = K_1 \sin \theta_b (K_1^2 - 1) / (K_1^2 - 2K_1 \cos \theta_b + 1)^2. \quad (19)$$

取短幅系数 $K_1 = 0.75$, 作出(17)~(19)式的函数图像如图 2~4 所示.

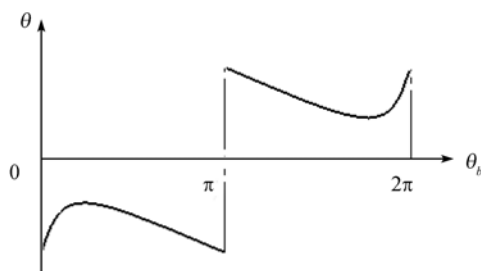


图 2 针齿转角函数图形

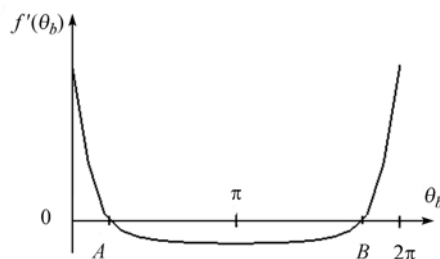


图 3 针齿转角函数的一阶导数图形

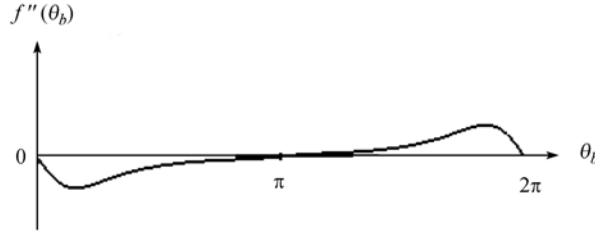


图4 针齿转角函数的二阶导数图形

结合图 2~4 可知, 针齿转角函数以 2π 为周期, 且函数关于 π 点对称. 当 $\theta_b \in (0, \pi)$ 时, $f''(\theta_b) < 0$, 原函数图像上凸, 当 $\theta_b \in (\pi, 2\pi)$ 时, $f''(\theta_b) > 0$, 原函数图像下凹, 原函数分别在 $f'(\theta_b) = 0$ 时(即 A 和 B 点)取得极值 $|\theta_{\max}|$. $\theta_{\max}$ 为针齿的啮合端点, 即针齿转过的最大角度, 说明针齿上只有一部分齿廓参与啮合传动. 因为 θ 的极值点对应于其一阶导数 $f'(\theta_b) = 0$ 的点, 所以摆线针轮行星传动的针齿啮合端点由以下方程组确定:

$$\begin{cases} \theta_{\max} = \arctan[(K_1 \cos \theta_b - 1)/K_1 \sin \theta_b], \\ (-K_1^2 + K_1 \cos \theta_b) / (1 + K_1^2 - 2K_1 \cos \theta_b) = 0. \end{cases}$$

解该方程组得

$$\theta_{\max} = -\arctan \sqrt{(1 - K_1^2)/K_1^2}. \quad (20)$$

由图2可得, 当 $\theta_b \in (0, \pi)$ 或 $\theta_b \in (\pi, 2\pi)$ 时, 只要 $\theta \neq \theta_{\max}$, 取任一 θ 值, 均有两个不同的 θ_b 值与其对应, 即针齿齿廓上一点在传动过程中将分别与摆线轮齿廓上的两点(凹、凸齿)产生接触. 由于针齿只有一部分齿廓参与啮合, 所以针齿始终重复着由啮合端点 0° 转至 $\theta_{\max}$, 再反向转回 0° 的运动, 在两零点处, 针齿上的这点分别与摆线轮的凸、凹齿接触, 此过程表明摆线针轮传动过程中针齿存在两次接触现象^[15].

2.4 啮合线方程

2.4.1 坐标系 OXY 中的啮合线方程

摆线针轮共轭啮合副在坐标系 OXY 中的啮合线方程由下式确定:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{M}_{01} \boldsymbol{\Sigma}^{(1)}, \\ \phi(\theta, \theta_b) = 0. \end{cases} \quad (21)$$

将(1), (6)和(9)式代入上式可得

$$\begin{cases} x = -R_Z \sin[Z_g \phi'_b / (Z_b - Z_g)] + r_Z \cos \delta, \\ y = R_Z \cos[Z_g \phi'_b / (Z_b - Z_g)] + r_Z \sin \delta, \end{cases} \quad (22)$$

其中,

$$\begin{aligned}\cos \delta &= \frac{\pm \sin \left[Z_g \varphi'_b / (Z_b - Z_g) \right]}{\sqrt{1 + K_1^2 - 2K_1 \cos \left[Z_g \varphi'_b / (Z_b - Z_g) \right]}}, \\ \sin \delta &= \frac{\pm \left\{ K_1 - \cos \left[Z_g \varphi'_b / (Z_b - Z_g) \right] \right\}}{\sqrt{1 + K_1^2 - 2K_1 \cos \left[Z_g \varphi'_b / (Z_b - Z_g) \right]}}.\end{aligned}\quad (23)$$

当 $r_z = 0$ 时, 啮合线方程简化为圆的方程.

2.4.2 坐标系 $O_b x_1 y_1$ 中的啮合线方程

摆线针轮共轭啮合副在坐标系 $O_b x_1 y_1$ 中的啮合线, 就是针齿上满足啮合函数的点的集合, 因此联立针齿齿廓方程及啮合函数即可得到所求啮合线的方程

$$\begin{cases} x_1 = r_z \cos \theta, \\ y_1 = r_z \sin \theta + R_z, \end{cases}\quad (24)$$

其中

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{\pm \left\{ K_1 \cos \left[Z_g \varphi'_b / (Z_b - Z_g) \right] - 1 \right\}}{\sqrt{1 + K_1^2 - 2K_1 \cos \left[Z_g \varphi'_b / (Z_b - Z_g) \right]}}, \\ \cos \theta &= \frac{\pm K_1 \sin \left[Z_g \varphi'_b / (Z_b - Z_g) \right]}{\sqrt{1 + K_1^2 - 2K_1 \cos \left[Z_g \varphi'_b / (Z_b - Z_g) \right]}}.\end{aligned}\quad (25)$$

(23)和(25)式等号右边正、负号的选用方法与(14)式相同. 显然, 该啮合线就是针齿齿廓的一部分.

2.5 重合度

根据齿轮啮合原理中重合度的概念, 摆线针轮行星传动的重合度可定义为: 摆线轮齿单侧齿面从齿根到齿顶 ($\varphi'_b \in [0, \varphi_{\max}]$) 的啮合过程中, 同时参与啮合的齿数. 由于摆线针轮行星传动的啮合线为曲线, 计算较困难, 我们将依据啮合线所对应的转角计算其重合度为.

$$\varepsilon = \theta_b / A, \quad (26)$$

式中 $\theta_b = Z_g \varphi_{\max} / (Z_b - Z_g)$, 为啮合线所对应的针轮的转角, $\varphi_{\max}$ 由(16)式确定; $A = 2\pi / Z_b$, 为针轮相邻针齿之间的夹角, 因此重合度计算式为

$$\varepsilon = \theta_b / A = Z_b Z_g \varphi_{\max} / 2\pi (Z_b - Z_g). \quad (27)$$

当针轮与摆线轮为一齿差时, 由于 $\varphi_{\max} = \pi / Z_g$, 因此重合度为 $\varepsilon = \theta_b / A = Z_b / 2$.

当针轮与摆线轮为二齿差时, 由(16)式解得 $\varphi_{\max}$, 将其代入 $\varepsilon = Z_b Z_g \varphi_{\max} / 4\pi$ 计算即可. 三齿差的重合度计算方法与二齿差相同, 其计算式为 $\varepsilon = Z_b Z_g \varphi_{\max} / 6\pi$.

3 典型摆线针轮少齿差行星传动共轭啮合理论

3.1 一齿差摆线针轮行星传动

3.1.1 摆线轮的齿廓曲线方程

令(10)和(11)式中的 $Z_b - Z_g = 1$ 即可得到一齿差摆线轮的齿廓曲线方程

$$\begin{cases} x_2 = R_Z \sin \varphi'_b - e \sin Z_b \varphi'_b + r_Z \cos \beta, \\ y_2 = R_Z \cos \varphi'_b - e \cos Z_b \varphi'_b - r_Z \sin \beta, \end{cases} \quad \varphi'_b \in [0, \varphi_{\max}], \quad (28)$$

其中

$$\cos \beta = \frac{K_1 \sin Z_b \varphi'_b - \sin \varphi'_b}{\sqrt{1 + K_1^2 - 2K_1 \cos Z_g \varphi'_b}}, \quad \sin \beta = \frac{-K_1 \cos Z_b \varphi'_b + \cos \varphi'_b}{\sqrt{1 + K_1^2 - 2K_1 \cos Z_g \varphi'_b}}. \quad (29)$$

取 $Z_g = 11$, $R_Z = 90$, $r_Z = 7$, $e = 4$ 代入(16)式解出 $\varphi_{\max} = 16.36^\circ$, 将 $\varphi'_b \in [0, 16.36^\circ]$ 代入(28)和(29)式, 并由摆线齿廓曲线的周期性可作出如图 5 所示的一齿差摆线轮齿廓曲线图及图 6 所示的一齿差摆线针轮行星传动啮合简图.

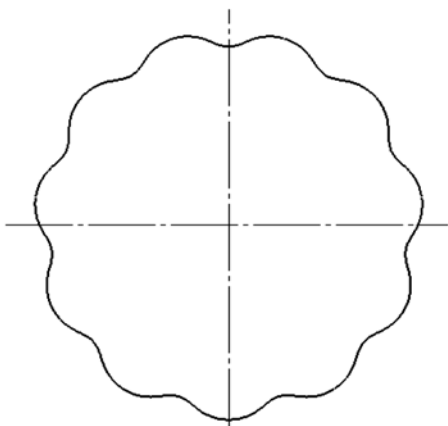


图 5 一齿差摆线轮齿廓曲线

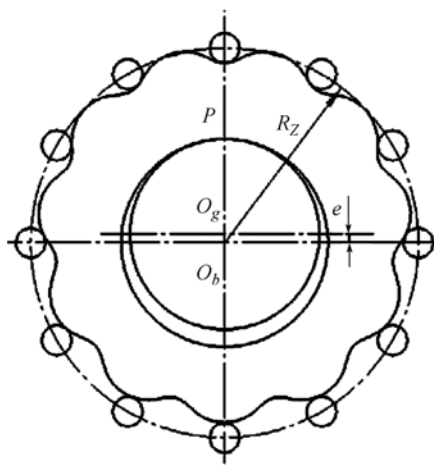


图 6 一齿差摆线针轮行星传动啮合图

3.1.2 啮合线方程

令(22)和(23)式中的 $Z_b - Z_g = 1$, 得到坐标系 OXY 中的啮合线方程

$$\begin{cases} x = -R_Z \sin Z_g \varphi'_b + r_Z \cos \delta, \\ y = R_Z \cos Z_g \varphi'_b + r_Z \sin \delta, \end{cases} \quad \varphi'_b \in [0, \varphi_{\max}], \quad (30)$$

其中

$$\cos \delta = \frac{\sin Z_g \varphi'_b}{\sqrt{1 + K_1^2 - 2K_1 \cos Z_g \varphi'_b}}, \quad \sin \delta = \frac{K_1 - \cos Z_g \varphi'_b}{\sqrt{1 + K_1^2 - 2K_1 \cos Z_g \varphi'_b}}. \quad (31)$$

令(24)和(25)式中的 $Z_b - Z_g = 1$, 得到坐标系 $O_b x_1 y_1$ 中的啮合线方程

$$\begin{cases} x_1 = r_z \cos \theta, \\ y_1 = r_z \sin \theta + R_z, \end{cases} \quad (32)$$

其中

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{K_1 \cos Z_g \varphi'_b - 1}{\sqrt{1 + K_1^2 - 2K_1 \cos Z_g \varphi'_b}}, \\ \cos \theta &= \frac{K_1 \sin Z_g \varphi'_b}{\sqrt{1 + K_1^2 - 2K_1 \cos Z_g \varphi'_b}}, \quad \varphi'_b \in [0, \varphi_{\max}]. \end{aligned} \quad (33)$$

取与 3.1.1 节相同的参数作图, 得到如图 7 和 8 所示的坐标系 OXY 及 $O_b x_1 y_1$ 中的啮合线图形. 图 8 中的粗实线表示作出的啮合线, 由该图可知, 针齿上仅有一部分齿廓参与啮合, 其滚动的最大角度 $\theta_{\max}$ 可以通过解(20)式求得.

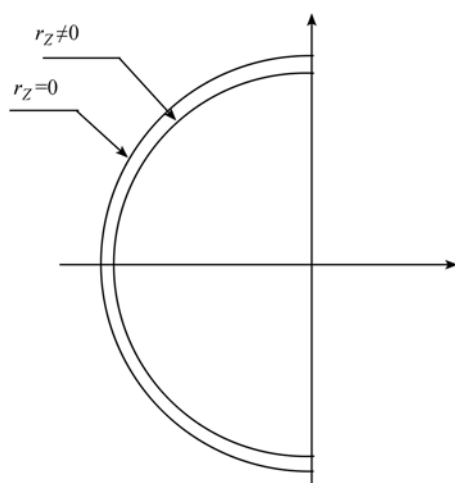


图 7 坐标系 OXY 中的啮合线图形

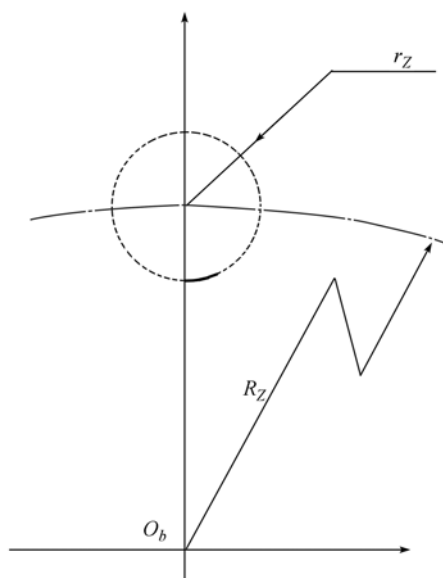


图 8 坐标系 $O_b x_1 y_1$ 中的啮合线图形

3.2 二齿差摆线针轮行星传动

与求一齿差摆线轮齿廓曲线及啮合线方程的方法相同, 对于二齿差摆线针轮行星传动, 只需将统一表达式中的齿差数项取 2 即可. 需要注意的是, 任何齿差数的摆线轮齿廓曲线及啮合线方程都需根据(16)式确定的 $\varphi_{\max}$ 对其进行限制, 与一齿差表示相同, 在此不再赘述, 只取一例作啮合简图及啮合线图形.

取 $R_z = 90$, $r_z = 7$, $e = 4$, $Z_g = 22$ 代入(16)式解出 $\varphi_{\max} = 8.77^\circ$, 可作出如图 9 所示的二齿差

摆线针轮行星传动啮合简图及图 10 所示的在坐标系 OXY 中的啮合线图形, 且由(27)式可计算出其重合度为 6.43. 由(20)式可知少齿差摆线针轮行星传动的针齿都具有仅一部分齿廓参与啮合的性质, 其啮合线方程在坐标系 $O_bx_1y_1$ 中的图形与图 8 类似.

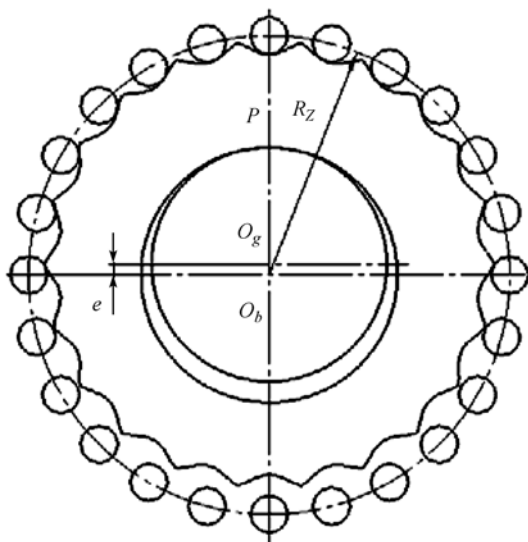


图 9 二齿差摆线针轮行星传动啮合图

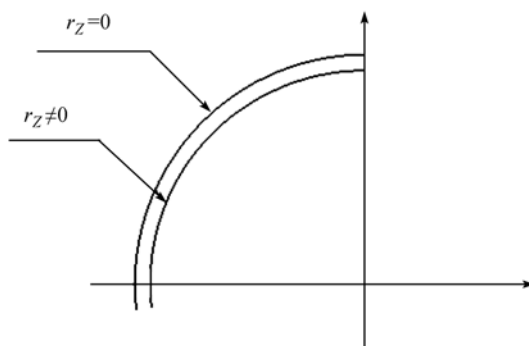


图 10 坐标系 OXY 中的啮合线图形

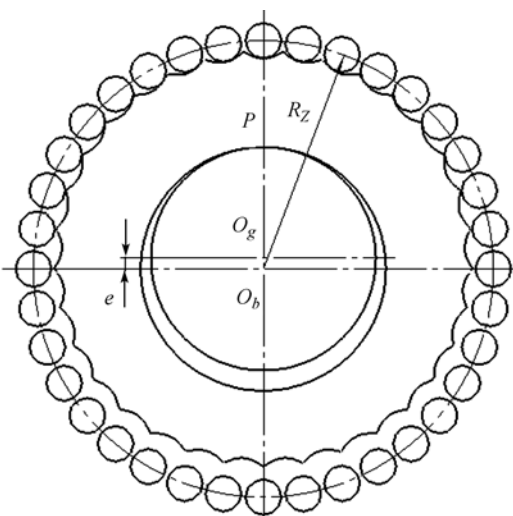


图 11 三齿差摆线针轮行星传动啮合图

差摆线轮的齿廓曲线方程.

取 $R_Z = 120$, $r_Z = 10$, $e = 5$, $Z_g = 16$ 代入(16)式解出 $\varphi_{\max} = 11.25^\circ$, 可作出如图 13 所示的负一齿差摆线轮齿廓曲线, 图 14 所示的啮合简图及图 15 和 16 所示的不同坐标系中的啮合线图形.

3.3 三齿差摆线针轮行星传动

求摆线轮齿廓曲线方程及啮合线方程的方法与一、二齿差相同. 取一例作其啮合简图及坐标系 OXY 中的啮合线图形.

取 $R_Z = 90$, $r_Z = 7$, $e = 4$, $Z_g = 33$ 代入(16)式解出 $\varphi_{\max} = 5.22^\circ$, 可作出如图 11 所示的三齿差摆线针轮行星传动啮合简图及图 12 所示的在坐标系 OXY 中的啮合线图形, 并由(27)式可得其重合度为 5.74.

3.4 负一齿差摆线针轮行星传动

令(10)和(11)式中的 $Z_b - Z_g = -1$, 且由于负齿差摆线轮齿廓曲线是其理论曲线的外等距线, 因此(11)式等号右取“负”即可得到负一齿

图 16 中, 粗实线部分表示作出的啮合线. 由上两啮合线图形可看出, 负齿差摆线轮与正齿差摆线轮不同, 它的实际齿廓是其理论齿廓曲线的外等距线, 同样的, 针齿上也只有一部分参与啮合.

上述啮合理论研究揭示了摆线针轮传动共轭啮合的实质, 其结果对于该类传动特别是二齿或多齿差摆线针轮传动的几何参数设计计算、多齿差啮合特性分析、受力计算以及摆线轮的加工等具有重要的意义.

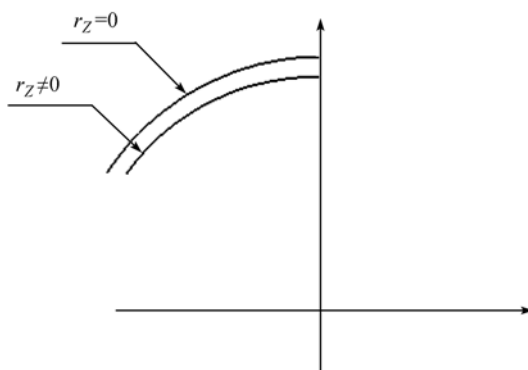


图 12 坐标系 OXY 中的啮合线图形

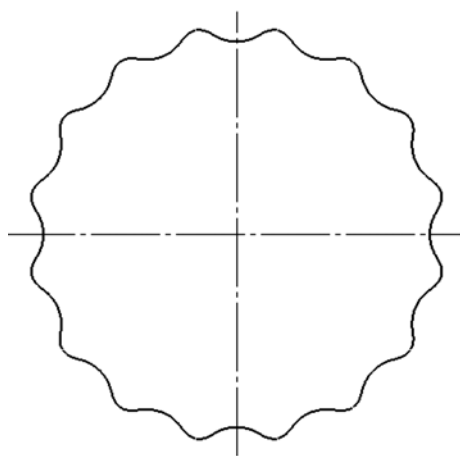


图 13 负一齿差摆线轮齿廓曲线

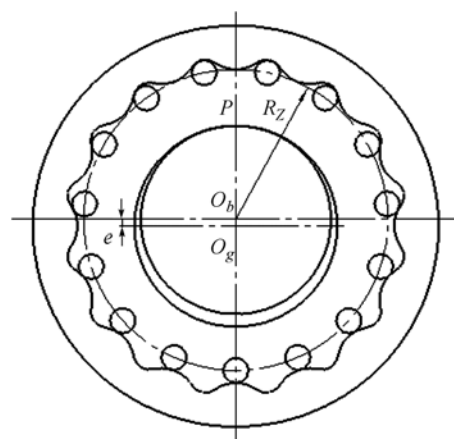


图 14 负一齿差摆线针轮行星传动啮合图

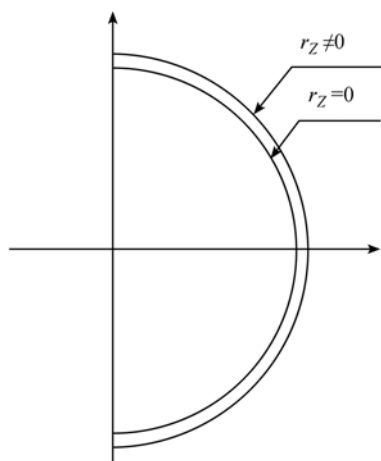


图 15 坐标系 OXY 中的啮合线图形

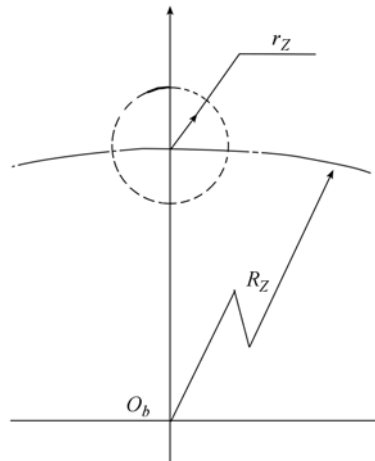


图 16 坐标系 $O_bx_1y_1$ 中的啮合线图形

4 结论

(i) 根据齿轮啮合原理的运动学方法, 由针齿齿廓及给定运动建立了适用于一齿差及多齿差的摆线针轮行星传动的啮合函数, 并得到了摆线轮齿廓的统一方程, 给出了齿廓方程参数的确定方法.

(ii) 由摆线轮齿廓的统一方程, 取不同参数可分别得到理论摆线、短幅外摆线、短幅内摆线, 从而提出了形成摆线的通用方法——包络法.

(iii) 摆线针轮行星传动的针齿齿廓存在两次接触现象, 其啮合的端点仅与变幅系数有关, 且随变幅系数的增大针齿的接触弧长增加; 摆线针轮行星传动正确啮合的充要条件为针轮与摆线轮的中心距等于短幅摆线的偏心距; 摆线针轮行星传动的重合度可通过啮合线所对应的针轮转角与相邻针齿夹角的比值进行计算, 一齿差摆线针轮行星传动的重合度为针齿的一半, 多齿差的重合度与变幅系数、针齿半径等参数相关.

(iv) 本文所建立的理论对于少齿差摆线针轮行星传动的设计、加工以及其他少齿差行星传动的共轭啮合理论的研究具有参考价值.

参考文献

- 1 李特文. 齿轮啮合原理. 第2版. 上海: 上海科学技术出版社, 1984. 12
- 2 饶振纲. 行星传动机构设计. 第2版. 北京: 国防工业出版社, 1994. 6
- 3 高兴岐. 多齿差摆线针轮行星传动的齿形及啮合特性的理论分析. 机械传动, 2000, 4(4): 11—12
- 4 李力行, 洪淳赫. 摆线针轮行星传动中摆线轮齿形通用方程式的研究. 大连铁道学院学报, 1992, 13(1): 7—12
- 5 Litvin F L, Demenego A, Vecchiato D. Formation by branches of envelope to parametric families of surfaces and curves. Comput Meth Appl Mech Eng, 2001, 190: 4587—4608 [\[DOI\]](#)
- 6 Litvin F L, Egelja A M, Donno M D. Computerized determination of singularities and envelopes to families of contact lines on gear tooth surfaces. Comput Meth Appl Mech Eng, 1998, 158: 23—24 [\[DOI\]](#)
- 7 Litvin F L, Feng P H. Computerized design, generation, and simulation of meshing rotors of screw compressor. Mech Mach Theory, 1997, 32: 137—160 [\[DOI\]](#)
- 8 Vecchiato D, Demenego A, Litvin F L, et al. Geometry of a cycloidal pump. Comput Meth Appl Mech Eng, 2001, 190: 2309—2330 [\[DOI\]](#)
- 9 Demenego A, Vecchiato D, Litvin F L, et al. Design and simulation of meshing of a cycloidal pump. Mech Mach Theory, 2002, 37: 311—332 [\[DOI\]](#)
- 10 Litvin F L, Feng P H. Computerized design and generation of cycloidal gearings. Mech Mach Theory, 1996, 31: 891—911 [\[DOI\]](#)
- 11 Shin J H, Kwon S M. On the lobe profile design in a cycloid reducer using instant velocity center. Mech Mach Theory, 2006, 41: 596—616 [\[DOI\]](#)
- 12 Shin J H, Chang S, Kwon S M, et al. New shape design method of an epicycloidal gear for an epicycloid drive. Proceeding of SPIE, 2005, 6040: 60401G1—G6
- 13 Lai T S. Design and machining of the epicycloid planet gear of cycloid drives. Int J Adv Manuf Tech, 2006, 28: 665—670 [\[DOI\]](#)
- 14 Lai T S. Geometric design of roller drives with cylindrical meshing elements. Mech Mach Theory, 2005, 40: 55—67 [\[DOI\]](#)
- 15 朱恒生. 平面齿廓第二共轭曲线及其在摆线啮合中的应用. 机械工程学报, 1981, 17(1): 74—80