

等深度螺旋槽止推轴承的边界元法计算*

朱 勤 谢友柏 虞 烈 薛永宽

(西安交通大学润滑理论及轴承研究所, 西安 710049)

摘 要 本文以分析等深度螺旋槽止推轴承为例, 介绍了边界元法在润滑力学研究领域中的应用, 以及相应的边界条件的处理方法, 并且讨论了轴承尺寸参数对性能参数的影响。

关键词 螺旋槽, 边界元法, 边界条件, 润滑力学

1. 前 言

自 Whipple 首次采用一维理论即“窄槽理论”对螺旋槽轴承进行性能分析以来, 螺旋槽轴承受到了广泛的重视^[1,2]。近年来, 由于采用“翼栅理论”(Wing lattice theory)建立起比较完整的计算螺旋槽止推轴承性能的二维理论^[3], 以及螺旋槽轴承较之其它轴承在高速运转条件下具有更高的承载能力和较小的摩擦力等优点^[4], 所以螺旋槽轴承在高速旋转机械中得到了广泛的应用^[5-7]。

边界元法是近二十年新发展起来的一种数值计算方法。由于该方法只需将区域的边界分割成边界单元, 使所考虑的问题的维数降低了一维, 因而具有代数方程组数少、输入数据少、计算时间短等优点, 且其计算精度通常也比有限元法的高^[8]。

螺旋槽止推轴承的曲线边界条件复杂, 其径向与周向上的几何尺寸相差较大, 运用边界元法处理上述压力场问题, 既能方便而灵活地处理曲线边界上流量连续条件, 又能在划分网格节点数较少的情况下, 得到求解域内各点的半数值半解析的压力分布。本文在运用边界元直接法计算等深度螺旋槽止推轴承时得到了满意的结果。

2. 基 本 公 式

图 1 (a) 所示为一个等深度螺旋槽止推轴承。螺旋槽曲线为 $\rho = r_1 e^{c \tan \beta \cdot \theta}$, β 为螺旋角。螺旋槽数目为 K 。根据周期性条件取其中的 $1/K$ 即一块瓦来分析如图 1 (b) 所示。止推平面所包含的区域为 Ω_1 , 由边界 I、II、III、IV 和 V 组成; 槽所包含的区域为 Ω_2 , 由边界 I' 和 II' 组

1992-03-06 收到初稿, 1992-06-20 收到修改稿。本文通讯联系人朱勤。

* 国家教委博士点基金资助项目。

将产生奇异性。为此以 D' 点为圆心作半径为 ε 的圆弧。这个圆弧边界以 Γ_ε 表示, 如图 2 (b) 所示。 $\theta=0$ 和 $\theta=\alpha$ 为过点 D' 的边界切线。

设点 C' 位于边界 Γ_q 上, 整个边界 Γ 可以分为 3 个区间, 即 Γ_ε 、 $\Gamma_{(q-\varepsilon)}$ 和 Γ_p 。其中, Γ_p 边界上的压力 P 已知, Γ_q 边界上压力的法向导数 q 已知, 于是得边界积分方程:

$$C(C')P(C') = \int_{\Gamma} [P^*(C', D')q(D') - P(D')q^*(C', D')]d\Gamma(D') \quad (7)$$

式中, $C(C')$ 是与点 C' 处边界几何形状有关的常数:

$$C(C') = \theta(C')/2\pi \quad (8)$$

式中, $\theta(C')$ 为边界上 C' 点处的边界切线之间的夹角。

$$P(C') = \frac{1}{\theta(C')} \int_{\Gamma} \left\{ \ln \frac{1}{r} \frac{\partial P(D')}{\partial n(D')} - P(D') \frac{\partial}{\partial n(D')} \left[\ln \frac{1}{r} \right] \right\} d\Gamma(D') \quad (9)$$

这样按照给定的边界条件, 由式 (9) 可以求出边界上的所有未知的压力值及其法向导数值, 再由式 (6) 进一步求出域内各点的压力值。

3. 边界积分方程的离散化

把边界 Γ 划分为 n 个边界线性单元 Γ_l [如图 1 (b) 所示], 有:

$$P = \sum_{l=1}^n N_l P^l, \quad \frac{\partial P}{\partial n} = \sum_{l=1}^n N_l \left(\frac{\partial P}{\partial n} \right)^l \quad (10)$$

式中, N_l 为对应于局部节点 l 的形状函数, P^l 和 $\left(\frac{\partial P}{\partial n} \right)^l$ 分别为局部节点 l 的压力值和压力的外法向导数值。

$$\begin{cases} N_1 = \frac{\xi_2 - \xi}{L_l} \\ N_2 = \frac{\xi - \xi_1}{L_l} \end{cases} \quad (11)$$

式中, ξ_1 和 ξ_2 分别是局部节点 1、2 的坐标, L_l 是单元 Γ_l 的长度。

如图 3 所示, 设线单元 Γ_l 的外法线为 $\vec{n}$ 。单元的局部编码按照使得从局部码 1 向 2 沿线单元进行时, 区域 Ω 位于左侧, 即 $\vec{n}$ 指向右侧的原则, 于是就对线单元定义了一个矢量 $\vec{12}$ 。取 ξ 轴沿 $\vec{12}$ 方向且与 $\vec{12}$ 重合, ξ 轴逆时针方向转过 $\pi/2$ 的位置为 η 轴。

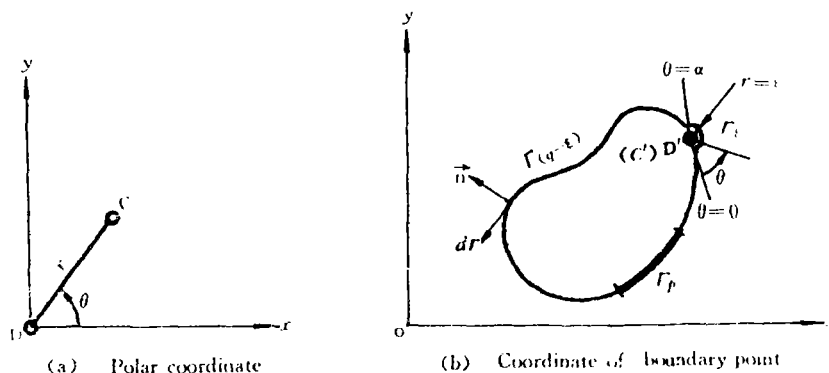


Fig. 2 Coordinate

图 2 坐标系

对于边界 Γ 上的节点 i , 式(7)可离散成:

$$C_i P_i + \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} \sum_{l=1}^2 N_l P^l q^* d\Gamma_j = \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} P^* \sum_{l=1}^2 N_l q^l d\Gamma_j$$

式中, $i=1, 2, \dots, n$ 。

若令

$$\begin{cases} A_j = \int_{\Gamma_j} N_i q^* d\Gamma_j = \int_{\Gamma_j} N_i \frac{\partial p^*}{\partial n} d\Gamma_j \\ B_j = \int_{\Gamma_j} N_i P^* d\Gamma_j \end{cases} \quad (12)$$

则离散后的边界积分方程为:

$$C_i P_i + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^2 A_{ij} P^l = \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^2 B_{ij} \left(\frac{\partial P}{\partial n} \right)^l \quad (13)$$

写成矩阵形式:

$$[A]\{P\} = [B]\{Q\} \quad (14)$$

矩阵 $[A]$ 和 $[B]$ 中的元素分别为:

$$\begin{cases} A_{ij} = C_i \delta_{ij} + \sum_{j=1}^n A'_{ij} \\ B_{ij} = \sum_{j=1}^n B'_j \end{cases} \quad (15)$$

同样, 域内节点的压力值可由式(6)离散成如下形式:

$$P_i = \sum_{j=1}^n (q_j B_{ij} - P_j A_{ij}) \quad (16)$$

式中, $i=1, 2, \dots, n$ 。

关于角点系数 C_i 的求法。假设在所研究的区域内存在一等压无源压力场, 即 $\{Q\} \equiv 0$, 便由式(14)得:

$$A_{ii} = - \sum_{j=1}^n A_{ij}$$

式中, $j=1, 2, \dots, n$, 且 $i \neq j$ 。

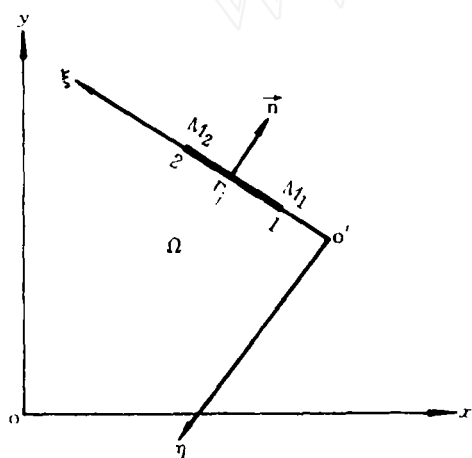


Fig. 3 Partial coordinate

图 3 局部坐标系

4. 等深度螺旋槽止推轴承的边界条件

设区域 Ω_1 各条边界上的压力值分别为 P_I 、 P_{II} 、 P_{III} 、 P_{IV} 和 P_V , 设区域 Ω_2 各条边界上的压力值分别为 $P_{I'}$ 和 $P_{II'}$, 则每条边界应用式(14)可得一个方程, 共 7 个方程 14 个变量, 其定解条件为:

a. 边界 I 和边界 II、I' 分别为出油边和进油边, 其压力值为常数:

$$\begin{cases} P_I = 0 \\ P_{II} = P_{I'} = P_{II'} = \text{常数} \end{cases} \quad (17)$$

b. 边界 III 和 IV 满足周期性条件, 即

$$\begin{cases} P_{\text{I}} = P_{\text{IV}} \\ \frac{\partial P_{\text{I}}}{\partial n} = -\frac{\partial P_{\text{IV}}}{\partial n} \end{cases} \quad (18)$$

c. 边界 V 和 I' 为同一条公共边界, 应满足压力值相等和流量连续的条件:

$$\begin{aligned} P_{\text{V}} &= P_{\text{I}'} \\ \frac{\omega r h_{\text{I}}}{2} \cos(\vec{n}, \vec{V}) - \frac{h_{\text{I}}^3}{12\mu} \frac{\partial P_{\text{V}}}{\partial n} &= - \left[\frac{\omega r h_{\text{I}}}{2} \cos(\vec{n}, \vec{V}) - \frac{h_{\text{I}}^3}{12\mu} \frac{\partial P_{\text{I}'}}{\partial n} \right] \end{aligned} \quad (19)$$

5. 等深度螺旋槽止推轴承性能的计算

令 $B = r_2 - r_1$, $h = h_m H$, $\mu = \mu_0 \bar{\mu}$, $\bar{P} = \mu_0 \omega B^2 P / h_m^2$, $\rho = BR$, 则螺旋槽曲线的无量纲形式为:

$$R = R_1 e^{c \lg \beta \cdot \theta} \quad (20)$$

单块瓦的无量纲承载力、进油量和摩擦力矩为:

$$\begin{aligned} \bar{W} &= \frac{W}{\frac{\mu_0 \omega B^4}{h_m^2}} \\ &= \iint PR d\theta dR \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} Q_{\text{in}} &= \frac{Q_{\text{in}}}{\omega B^2 h_m} \\ &= - \int \frac{H^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial R} R d\theta \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_t &= \frac{M_t}{\frac{\mu_0 \omega B^4}{h_m}} \\ &= \iint \left(\frac{\mu R^2}{H} + \frac{H}{2} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) R d\theta dR \end{aligned} \quad (23)$$

当取等深度螺旋槽止推轴承的无量纲尺寸为 $R_1 = r_1 / B = 1.4$ 、 $R_2 = r_2 / B = 2.4$ 以及 $R_0 = r_0 / B = 2.5$ 时, 轴承中单块瓦的无量纲承载力、进油量及摩擦力矩等性能参数见表 1, 压力分布见图 4 和图 5。

表 1 轴承中单块瓦的无量纲承载力、进油量和摩擦力矩等性能参数

Table 1 Dimensionless load carrying capacity, input oil flow rate and frictional torque of a pad in the bearing

β	$H_1 = 1.0, H_g = 3.5, P_{\text{in}} = 1.0$			$H_1 = 1.0, H_g = 3.5, P_{\text{in}} = 2.0$			$H_1 = 1.0, H_g = 4.0, P_{\text{in}} = 1.0$			$H_1 = 1.0, H_g = 4.0, P_{\text{in}} = 2.0$		
	$\bar{W}$	Q_{in}	M_t	$\bar{W}$	Q_{in}	M_t	$\bar{W}$	Q_{in}	M_t	$\bar{W}$	Q_{in}	M_t
79.332°	1.035	0.386	3.187	2.063	0.654	2.503	1.103	0.491	2.828	2.171	0.824	1.995
72.858°	1.121	0.476	3.298	2.201	0.773	2.601	1.231	0.634	2.985	2.377	1.031	2.142
69.355°	1.124	0.547	3.361	2.227	0.874	2.657	1.242	0.718	3.857	2.421	1.161	2.154

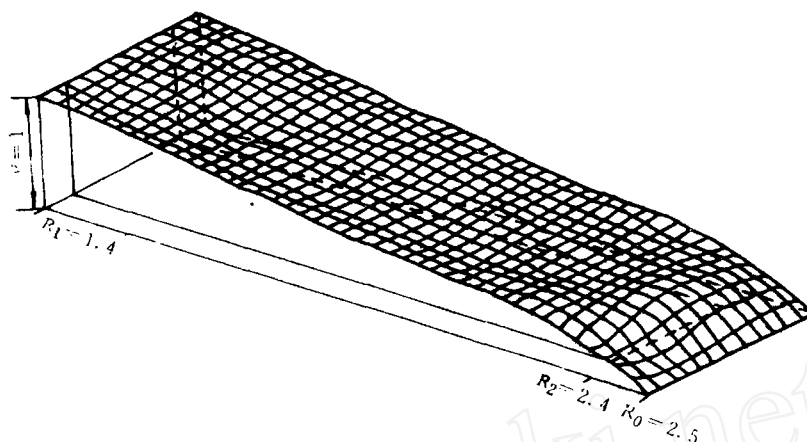


Fig. 4 Dimensionless pressure distribution of a pad in the bearing

图4 轴承中单块瓦的无量纲压力分布

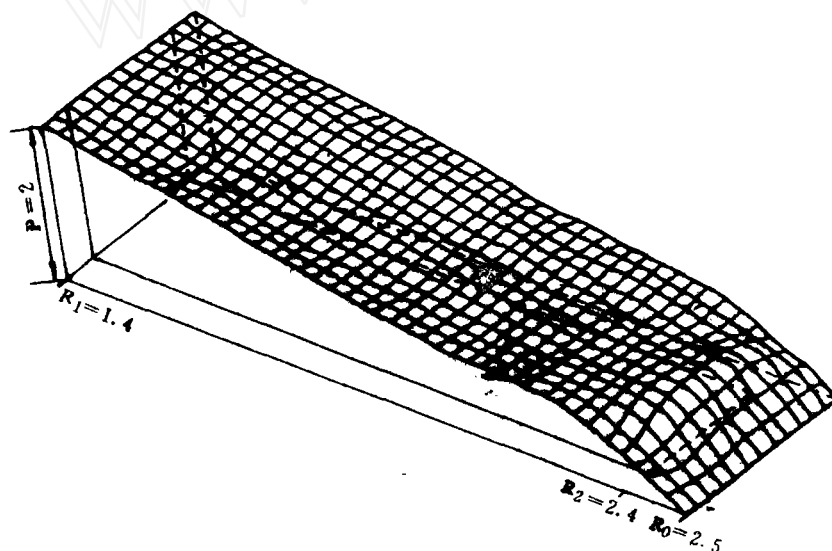


Fig. 5 Dimensionless pressure distribution of a pad in the bearing

图5 轴承中单块瓦的无量纲压力分布

6. 结 论

- 本文为等深度螺旋槽止推轴承性能的计算提供了一种有效的方法——边界元法。
- 随着螺旋角 β 的减小, 承载能力 $\bar{W}$ 、进油量 $\bar{Q}_0$ 和摩擦力矩 $\bar{M}_f$ 均增加。
- Hq 增加时, 承载能力 $\bar{W}$ 和进油量 $\bar{Q}_0$ 也都增加, 但摩擦力矩 $\bar{M}_f$ 减小。
- 供油压力 P_0 升高, 承载能力 $\bar{W}$ 和进油量 $\bar{Q}_0$ 都增大, 仅摩擦力矩 $\bar{M}_f$ 减小。这大致是由于随着供油压力的增加, 静压效应增强的缘故。

参 考 文 献

- [1] Smalley, A. J. , "The Narrow Groove Theory of Spiral Groove Gas Bearing: Development and Application of a Generalized Formulation for Numerical Solution", *Journal of Lubrication Technology*, Trans. ASME, Jan. 1972, p. 86—92.
- [2] Gupta, P. K. et al. , "Ambient Edge Correction for the Locally Incompressible Narrow—Groove Theory", *Journal of Lubrication Technology*, Trans. ASME, Apr. 1974, p. 284—290.
- [3] Murata, S. et al. , "On a Two—Dimensional Theory of Spiral Groove Bearing", *Proc. JSLE—ASLE, Intern. Lubr. Conf.* , 1975, p. 237—245.
- [4] Muijderman, E. A. , "Spiral Groove Bearing", Printed in the Netherlands, 1966, Preface.
- [5] Murata, S. et al. , "Exact Two—Dimensional Analysis of Circular Disk Spiral Groove Bearing", *Journal of Lubrication Technology*, Trans. ASME, Oct. 1979, p. 424—436.
- [6] Elrod, H. G. , "Some Refinements of the Theory of the Viscous Screw Pump", *Journal of Lubrication Technology*, Trans. ASME, Jan. 1973, p. 82.
- [7] Muijderman, E. A. , "Analysis and Design of Spiral Groove Bearing", *Journal of Lubrication*, Trans. ASME, July 1967, p. 291—306.
- [8] 王元淳, 边界元法基础, 上海交通大学出版社, 上海, 1988, . p. 3.

Calculation of a Spiral Groove Thrust Bearing of Constant Depth with Boundary Element Method

Zhu Qin Xie Youbai Yu Lie Xue Yongkuan

(*Theory of Lubrication and Bearing Institute, Xian Jiaotong University, Xian 710049, China*)

Abstract As the pressure control equation (i. e. Reynold's Equation) transformed into Laplace's Equation, the pressure distribution is solved using Boundary Element Method. The step numbers of algebraic equation group are effectively dropped, the calculation time of computer is largely decreased and the precision of calculation result is raised. Because spiral groove bearings are of higher load-carrying capacity and less friction force in comparison with the other bearings under high speed condition, they are widely used in high speed rotating machinery. Therefore, a spiral groove thrust bearing of constant depth is choosed as an example of the application of Boundary Element Method in the paper. The treatment of boundary conditions is introduced and the influence of dimensional parameters on bearings performance, such as load-carrying capacity, flow rate and frictional torque are discussed. Also, satisfactory results are presented.

Key words spiral groove, Boundary Element Method, boundary condition, mechanics of lubrication