研究通讯

张量代数的外齐次化与 PBW 定理

设 $S=\bigoplus_{n\in Z}S_n$ 一是-$\mathbf{Z}$ 分次环，X 是 S 的中心中一个次为 1 的正则齐次元. 那么下列结论成立：(a) Sr 的商环 $A=S/(1-X)S$ 是一个滤过环，A 上的滤（升）链定义为 $F_nA=S_n+(1-X)S/(1-X)S$，$n\in\mathbf{Z}$；(b) 与 A 相关联的分次环 $G(A)=\bigoplus^{n\in Z}F_nA/F_{n-1}A$ 与 S/XS 之间有一个显然的分次环同构；(c) A 的 Rees 环 $\widetilde{A}=\bigoplus_{n\in Z}F_nA$ 与 S 之间有一个显然的分次环同构.

设 $R=\bigoplus_{n\in Z}R_n$ 是一个 $\mathbf{Z}$-分次环，那么 R 的外齐次化是 R 上的多项式环 $S=R[t]$ 但此对 S 具有"混合分次"：$S_n=\{\sum_{i+j=n}\alpha_it^j,\ \alpha_i\in R_i\}$，$n\in\mathbf{Z}$. 显然 t 是 S 中的一个次为 1 的中心正则齐次元，但此时 S 的商环 $A=S/(1-t)S$ 作为滤过环同构于 R，这里 R 具有（升）滤链 $F_nR=\bigoplus_{i\leqslant n}R_i$，$n\in\mathbf{Z}$，$G(A)\cong R$（作为分次环，其中 R 的分次为原来给定的分次）而 $\widetilde{A}\cong S=R[t]$（作为分次环）.

设 g 为交换域 k 上任一李代数，$(x_i,\ i\in J)$ 为 g 的一个基底. 考虑 g 上张量代数 $T(g)$ 及其标准分次. 如果 $S=T(g)[t]$ 是具有混合分次的 $T(g)$ 的外齐次化（如在上面所描述的那样）而 $J=\langle x\oplus y-y\oplus x-[x,y]t\rangle$ 是 S 的由所有 $x\oplus y-y\oplus x-[x,y]t$ 生成的理想，那么 J 是 S 的一个分次理想，因而 $\overline{S}=S/J$ 是一个分次 k-代数. 显然 $\bar{t}=t+J$ 是 $\overline{S}$ 中一个次为 1 的中心正则齐次元，所以由上面所述知 $\overline{S}/(1-\bar{t})\overline{S}$ 是一个滤过代数. 因为 $\overline{S}/(1-t)\overline{S}\cong S/((1-t)S+J)$，我们可以用 $A=S/((1-t)S+J)$ 来代替 $\overline{S}/(1-t)\overline{S}$，即 A 有（升）滤链 $F_nA=S_n+((1-t)S+J)/((1-t)S+J)$，$n\geqslant 0$. 类似地我们用 $S/(tS+J)$ 代替 $\overline{S}/\bar{t}S$，这里 $S/(tS+J)$ 具有分次：$S_n+(tS+J)/(tS+J)$，$n\geqslant 0$.

命题 保持以上记号不变并设 $U(g)$ 是 g 的具有标准（升）滤链的包络代数.

(1) 存在滤过代数同构 $A=S/((1-t)S+J)\xrightarrow{\varphi}U(g)$ 使得 $\varphi(F_nA)=U_n(g)$，$n\geqslant 0$，这里 $U_n(g)$ 是 $U(g)$ 的标准滤链中第 n 个部分.

(2) 存在分次代数同构 $G(A)\cong S/(tS+J)\cong T(g)/I$ 这里 I 是 $T(g)$ 的由所有 $x\oplus y-y\oplus x$ 生成的理想，即 $T(g)/I$ 是 g 上的对称代数.

定理 保持以前记号不变.

(1) *Poincarè-Birkhoff-Witt* 定理与 $U(g)$ 相关联的分次代数 $G(U(g))$ 同构于 g 上的对称代数.

(2) $U(g)$ 的 Rees 代数 $U(\widetilde{g})$ 同构于 S/J.

李会师
（陕西师范大学数学系，西安 710062）

空间转动变换算符在核磁共振波谱学中的应用*

近年来，成形脉冲（Shaped pulse）已经在 NMR（核磁共振）和 MRI（磁共振成象）中得到了广泛的应用[1]. 一方面，成形脉冲是单个常脉冲、组合脉冲、甚至脉冲序列的延