

微分几何中的几类曲率流的分析与应用

贺 飞, 宋 翀, 夏 超*

(厦门大学数学科学学院, 福建 厦门 361005)

摘要: 几何流是微分几何与几何分析研究的重要研究对象, 同时几何流的研究在微分拓扑、泛函分析、偏微分方程、广义相对论等领域有诸多应用. 本文对厦门大学几何分析研究团队近十年在几何流方面的研究进行综述, 主要包括完备非紧 Ricci 流的存在性问题、斜平均曲率流的存在性问题、超曲面的曲率流与几何不等式等 3 个方面的研究成果及进一步的公开问题.

关键词: 几何流; 完备非紧 Ricci 流; 斜平均曲率流; 超曲面曲率流; 几何不等式

中图分类号: O 186

文献标志码: A

文章编号: 0438-0479(2023)06-0912-12

几何流也称几何发展方程, 描述物质随着时间变化的演化方程. 通常演化的速度是由几何量给出. 按照几何量的属性, 几何流可以分为内蕴几何流与外蕴几何流. 按照方程的属性, 几何流可以分为抛物型几何流、双曲型几何流和 Schrödinger 型几何流. 内蕴几何流以 Ricci 流为代表, 外蕴几何流以平均曲率流为代表, 它们均是抛物型几何流. 双曲型几何流以广义相对论中的 Einstein 场方程为代表, Schrödinger 型几何流以斜平均曲率流为代表.

几何流从 20 世纪 60 年代开始得到了很好的发展并成为微分几何与几何分析领域的重要研究对象, 同时几何流的研究对其他领域, 如微分拓扑、泛函分析、偏微分方程、广义相对论等具有推动作用. 一个重要的例子是拓扑学中的 Poincaré 猜想, 是由 Perelman 通过 Hamilton 提出的 Ricci 流解决的.

本文主要对厦门大学几何分析研究团队近十年在几何流方面的研究进行综述. 限于篇幅, 在此仅包括部分具有代表性的工作, 主要包括完备非紧 Ricci 流的存在性问题、斜平均曲率流的存在性问题、超曲面的曲率流与几何不等式等 3 个方面的研究成果以及一些未来研究的展望.

1 完备非紧 Ricci 流的存在性问题

Hamilton 在上世纪 80 年代初提出了 Ricci 流^[1], 即以下初值问题:

$$\partial_t g(t) = -2\text{Ric}(g(t)), g(0) = g_0, \quad (1)$$

这里 $g(t)$ 是流形上的以 $t \in [0, T]$ 为参数的一族黎曼度量, $\text{Ric}(g)$ 是 g 的 Ricci 曲率张量. 式(1)是关于黎曼度量的一个抛物型偏微分方程(组), 但由于 Ric 在微分同胚作用下的形式不变性, 该方程是退化的. 因此, 即便在紧致无边界流形上, 式(1)的短时间存在性也是一个不平凡的问题. Hamilton 首先证明了紧致无边界流形上 Ricci 流初值问题解的(短时间)存在性^[1]. DeTurck^[2] 随后发现了 Ricci 流在一个特定的微分同胚单参数群的拉回作用下等价于一个严格抛物型的方程, 即所谓的 Ricci-DeTurck 流, 从而给出了一个存在性的简单证明. 时至今日, Ricci 流已经成为了几何分析中最重要的工具之一, 在 Thurston 几何化猜想(参见文献[3-8])、微分球面定理(参见文献[9-10])等重要问题的解决中起到了关键的作用.

对于完备非紧的黎曼流形, 能否由一定的曲率条件推导出整体的几何或拓扑结论是这个研究领域的核心课题之一. 应用 Ricci 流来研究非紧流形的第一步是证明 Ricci 流的短时间存在性, 但这对于 Ricci 流

收稿日期: 2023-05-07 录用日期: 2023-09-21

基金项目: 国家自然科学基金(12141101, 11971400, 12271449, 12126102); 福建省自然科学基金(2021J06005)

* 通信作者: chaoxia@xmu.edu.cn

引文格式: 贺飞, 宋翀, 夏超. 微分几何中的几类曲率流的分析与应用[J]. 厦门大学学报(自然科学版), 2023, 62(6): 912-923.

Citation: HE F, SONG C, XIA C. Analysis and application of curvature flow in differential geometry[J]. J Xiamen Univ Nat Sci, 2023, 62(6): 912-923. (in Chinese)



这个退化的非线性抛物型方程来说是个困难的问题. Shi^[11]于1989年在曲率一致有界的条件下首先证明了Ricci流的存在性.

定理1^[11] 设 (M, g_0) 是一个完备非紧的黎曼流形,且存在常数 $K>0$,使 (M, g_0) 的曲率满足 $|Rm| \leq K$.那么存在Ricci流的解 $g(t), t \in [0, \frac{c(n)}{K}]$, $g(0) = g_0$, $g(t)$ 是完备的黎曼度量,且满足 $|Rm|(g(t)) \leq 2K$.其中 $c(n)$ 是一个只依赖于维数 n 的常数.

Shi^[11]的证明方法是,选取一系列半径趋于无穷的同心测地球,在每一个测地球上求解Ricci-DeTurck流的Dirichlet初始边值问题,并得到这些Ricci-DeTurck流的一致的局部正则性估计,从而可以对这一列Ricci-DeTurck流求极限来得到一个整体的Ricci-DeTurck流,然后用DeTurck的方法将它拉回到Ricci流的解.值得一提的是,Shi^[11]证明的Ricci流的局部正则性估计已经成为了Ricci流的研究中的一个基本工具,在后续的研究中发挥了重要的作用.曲率一致有界是Shi^[11]的证明中的一个关键假设,但它是一个比较强的几何条件,限制了Shi^[11]的存在性结果的应用.因此,能否在曲率可能无界的情形下得到完备Ricci流的存在性,是非紧Ricci流的研究中的一个基本问题.

近年来,越来越多的学者关注了曲率可能无界的非紧流形上Ricci流的存在性问题,并取得了一些重要的进展(参见文献[12-17]).其中,Giesen等^[14]完全解决了2维的情形.对于3维和更高的维数,完备非紧Ricci流的存在性问题还没有完整的解答,下文中将介绍在各种不同的几何条件下、目前能够得到的一些存在性结果.

1.1 2维的情形

2维的Ricci流可以约化为共形因子满足的标量函数方程,基于这一特殊性,Giesen等^[14]定义了以任意2维流形(无需完备性或曲率有界)为初值的Ricci流的“极大伸展解”,证明了它的存在性、唯一性、并得到了存在时间基于初始面积和共形类的精确刻画,其中的一部分结果可简述为:

定理2^[14] 设 (M, g_0) 是2维黎曼流形,则式(1)有极大伸展解 $g(t), t \in [0, T]$,满足 $g(0) = g_0$,且对任意 $t > 0$, $g(t)$ 是完备的黎曼度量.其中 T 是可以由 (M, g_0) 的面积和共形类精确刻画的常数.

1.2 积分意义下的曲率有界条件

Xu^[17]改进了定理1,将其中的曲率一致有界条件减弱为积分意义下的有界条件.

定理3^[17] 设 (M, g_0) 是完备的 n 维黎曼流形,若存在常数 $K>0$ 和 $p>n$,使 (M, g_0) 的曲率张量在任意单位测地球上的 L^p 平均值小于 K ,那么存在式(1)的解 $g(t), t \in [0, \frac{c(n)}{K}]$,且 $|Rm|(g(t)) \leq \frac{C(n, K)}{t}$.

在该定理的证明中,Deane Yang定义的局部Ricci流被用来构造局部解,曲率的 L^∞ 估计可以用Nash-Moser迭代方法得到.

1.3 Ricci曲率足够小的情形

证明非紧Ricci流存在的关键之一是用初始的几何条件控制黎曼曲率张量随时间的增长,从而得到局部解的存在时间的一致下界估计. He^[18]证明了以下定理:

定理4^[18] 设 (M, g_0) 是 n 维完备黎曼流形,且存在常数 $\alpha, \beta, \gamma>0$,使得对任意 $x, y \in M$,

(i) $|\nabla^m \text{Ric}|(x) \leq (n-1)\rho_x^{-2-m} e^{\beta-\alpha x^2}, m=0, 1, 2$;

(ii) 当 $d(x, y) \leq \rho_x + \rho_y$ 时 $|\rho_x^{-2} - \rho_y^{-2}| \leq \gamma$.
其中, ρ_x 是使得 $\sup_{B(x, \rho_x)} |Rm| \leq \rho_x^2$ 和 $\sup_{B(x, \rho_x)} |\nabla^m \text{Ric}| \leq (n-1)\rho_x^{-2-m}, m=1, 2$ 同时成立的最大半径.

那么存在式(1)的完备解 $g(t), t \in [0, T]$, T 仅依赖于 n, α, β, γ .并且对任意 $t, g(t)$ 的曲率在空间方向至多二次增长.

简言之,定理4表明,若初始黎曼度量的Ricci曲率张量及其一、二阶协变导数相对于黎曼曲率张量足够小,且 $|Rm|(g_0)$ 至多二次增长,那么可以用Ricci曲率控制黎曼曲率的增长,从而证明Ricci流的解存在.

1.4 曲率下界与非塌缩条件

Cabezas-Rivas等^[13]证明了复截面曲率非负的完备黎曼流形上Ricci流的存在性.

定理5^[13] 设 (M, g_0) 是 n 维完备黎曼流形,其复截面曲率非负,那么式(1)有解 $g(t), t \in [0, T]$, T 依赖于维数 n 和初始度量 g_0 ,且 $g(t)$ 有非负复截面曲率.

非负复截面曲率可以被紧致的Ricci流保持,对于非紧的Ricci流,在一定曲率假设下也可以证明这一性质.由文献[13]中的分裂定理,只需考虑正复截面曲率的假设下Ricci流的存在性,此时流形可以被一系列凸区域逼近,文献[13]中证明了每一个凸区域都有一个具有正复截面曲率的紧致倍化,其上的Ricci流的存在时间的下界可以借助Petrunin的一个曲率估计来得到(或使用文献[19]的方法).

定理 5 中得到的 Ricci 流可以在任意时刻都是曲率有界的,它证明了曲率有界并不是非紧 Ricci 流的必要条件,并启发了后续的许多工作. 由于非负复截面曲率是一个非常强的曲率条件,一个自然的问题是能否在较弱的曲率下界条件下得到存在性的证明. 受定理 5 的启发,我们自然地会想到优先考虑可以被 Ricci 流保持的曲率下界条件. 非负 Ricci 曲率是几何学界非常关注的一个曲率条件,但它只有在 3 维的情形下可以被 Ricci 流保持. Topping 猜想,具有非负 Ricci 曲率的 3 维完备流形上, Ricci 流存在. 这一猜想至今没有被完全解决,但在体积非塌缩的附加条件下可以由 Hochard 的定理得到^[15].

定理 6^[15] 设 (M, g_0) 是 3 维完备黎曼流形, 满足 $\text{Ric} \geq -1$, $\text{Vol}(B(x, 1)) \geq v_0 > 0$, $\forall x \in M$. 那么存在式(1)的完备解 $g(t), t \in [0, T], T > 0$ 依赖于 n, v_0 , 且满足 $|Rm|(g(t)) \leq \frac{C(n, v_0)}{t}$.

Hochard 的证明中使用了一个称为“部分”Ricci 流的巧妙构造,并给出了若干 3 维 Ricci 流的重要局部估计. 这些想法在文献[20-21]等工作中得到了进一步的发展和改进,并被用来研究 Ricci 极限空间的结构. 由文献[20]可知,定理 6 中的解有 Ricci 下界. 简言之,3 维情形下 Ricci 曲率的最小特征值满足一个较好的演化方程,使得 Ricci 曲率的下界在一定程度上得以局部保持,继而可以由 Cheeger-Colding 的体积连续性得到一定时间内的局部非塌缩,而由 Perelman 对 3 维古代解的分类可知,奇异点的生成必然会导致体积塌缩,这样就可以在一定时间内排除奇异点的产生.

对于更高的维数, Ricci 曲率不再满足好的方程,但可以考虑更强的曲率下界条件和非塌缩假设下 Ricci 流的存在性. Lee 等^[16]证明了双截面曲率非负且非塌缩的完备 Kahler 流形上 Kahler Ricci 流的存在性,并用来研究丘成桐提出的单值化猜想. Bamler 等^[12]证明了黎曼曲率算子或复截面曲率有下界、并且体积非塌缩的条件下 Ricci 流的存在性. Lai^[22]进一步改进了文献[12]中的方法,巧妙地使用了一个“部分”热核与“部分”Ricci 流相配合,证明了以下定理:

定理 7^[22] 设 C 是所有满足弱 PIC1 条件的曲率算子的集合. 设 (M, g_0) 是 n 维完备黎曼流形, 其曲率算子 Rm 满足 $Rm + I \in C$, 且 (M, g_0) 中任意单位测地球的体积有正下界 v_0 . 那么存在式(1)的完备解 $g(t), t \in [0, T], T > 0$ 依赖于 n, v_0 , 且满足 $|Rm|(g(t)) \leq \frac{C(n, v_0)}{t}$, $Rm(g(t)) + C(n, v_0)I \in C$.

这里的 PIC1 是一个可以被 Ricci 流保持的曲率下界条件. 在 3 维流形上,弱 PIC1 等价于非负 Ricci 曲率,在更高维流形上,弱 PIC1 强于非负 Ricci 曲率,但弱于非负黎曼曲率算子. 在体积极大增长的条件, He 等^[23]给出了弱 PIC1 流形的一个拓扑刻画:

定理 8^[23] 设 (M, g) 是满足弱 PIC1 条件的 n 维完备黎曼流形, 且测地球的体积满足 $V(B_r) \geq v_0 r^n$, $\forall r > 0$, 那么 M 微分同胚于 $\mathbf{R}^n$.

1.5 曲率下界与近欧条件

对于一般维数,在更弱的曲率下界假设下,可以通过将非塌缩条件替换为更强的近欧条件来得到 Ricci 流的存在性. 在该情形下,初始流形是局部接近于欧氏空间的. He^[24]证明了这样一个定理:

定理 9^[24] 对任意的 $n, A > 0, k, L \geq 0$, 存在仅依赖于 n 和 A 的常数 $\delta_1, \epsilon_1 > 0$, 使得下列事实成立: 若 n 维完备黎曼流形 (M, g_0) 满足

(i) $\liminf_{d(p, x) \rightarrow \infty} \frac{\text{Ric}(x)}{d(p, x)^2} \geq -L$, 其中 $d(p, x)$ 是点 x 到

固定点 p 的距离;

(ii) 数量曲率 $S \geq -k$;

(iii) 等周不等式 $\text{Area}(\partial\Omega)^n \geq (1 - \delta_1) I_n \text{Vol}(\Omega)^{n-1}$

对任意半径为 r 的测地球中的光滑区域 $\Omega \subset B_r$ 成立, 其中 I_n 是欧氏空间的等周常数;

那么式(1)有完备解 $g(t), t \in [0, \epsilon_1 \bar{r}^2], \bar{r} = \min\{r, \sqrt{1/(L+1)k}\}$, 且满足 $|Rm|(g(t)) \leq \frac{A}{t} + \frac{1}{\epsilon_1 \bar{r}}$.

由文献[25],定理 9 中的假设可以由以下条件推导出:

(i) $\text{Ric} \geq -k/(n-1)$, (2)

(ii) $\text{Vol} B_r \geq (1 - \epsilon) \omega_n r^n, \forall r \in [0, 1]$, (3)

其中 ϵ 是一个足够小的常数, ω_n 是欧氏空间中单位球的体积,即 Ricci 曲率下界与局部近欧体积可以保证 Ricci 流的存在性.

定理 9 的证明得益于 Perelman 的 Pseudolocality 定理. 我们可以选取一个好的类距离函数来替代黎曼距离,并用它构造共形因子来进行文献[15]中的共形变换,可以证明,在共形变换后 Pseudolocality 定理需要的条件得以保持,从而可以用这个定理给出我们所需要的 Ricci 流的曲率估计.

Wang^[26]定义了 Ricci 流的局部熵并推广了 Perelman 的 Pseudolocality 定理,可以用局部熵来刻画局部近欧性质,从而可以替换式(3),在 Ricci 下界和局部熵条件下得到 Ricci 流的存在性.

1.6 非负曲率与拼挤条件

最近, Lee 等^[27]研究了具有非负曲率与曲率拼挤条件的流形上 Ricci 流的存在性, 并且得到了有趣的几何应用, 证明了以下定理:

定理 10^[27] 设 (M, g_0) 是完备非紧的 3 维黎曼流形, 满足 $\text{Ric} \geq \epsilon S \geq 0$. 那么式(1) 有解 $g(t), t \in [0, \infty]$, 且满足

$$(i) \text{Ric}(g(t)) \geq \epsilon S(g(t)) \geq 0,$$

$$(ii) |Rm|(g(t)) \leq \frac{a}{t}, \text{ 其中 } a \text{ 是仅依赖于 } \epsilon \text{ 的常数.}$$

定理 10 被用来研究 Hamilton 猜想^[27]. 在文献[28]中, 定理 10 被推广到具有 PIC1 拼挤条件的高维流形, 并证明了该条件下一个有趣的紧性定理.

本节受限于篇幅和作者的知识储备, 只列举了关于完备非紧 Ricci 流存在性问题的一部分结果, 并没有介绍所有相关的重要工作, 感兴趣的读者可参考文献[29-31]等文献.

2 斜平均曲率流

2.1 斜平均曲率流的定义与物理背景

斜平均曲率流(skew mean curvature flow, SMCF)是定义在一个余二维子流形上, 使之沿着从法方向(即与平均曲率向量场垂直的法向)演化的曲率流. 具体来说, 假设 (M, g) 是一个 $(n+2)$ 维定向的黎曼流形, $F: [0, T) \times \Sigma \rightarrow M$ 是一族与时间相关的 n 维定向浸入子流形. 对于每个时刻 t , 我们用 $\Sigma_t = F(t, \Sigma)$ 表示浸入子流形, 并记其平均曲率为 $H(F)$. 显然 Σ_t 的法丛是一个秩为 2 的向量丛, 并且有一个诱导的复结构 $J(F)$, 它的作用是把一个法向量在它所属的法平面内沿正向旋转 90 度. 特别地, 我们称 $J(F)H(F)$ 为子流形的斜平均曲率(或从法曲率)向量. 如果 F 满足方程

$$\partial_t F = J(F)H(F),$$

则称其为一个 SMCF.

SMCF 最简单的情形是三维欧氏空间中的一维曲线的从法流. 假设 γ 是三维欧氏空间中一条与时间相关的曲线, 我们记 γ 的 Frenet 标架为 $\{t, n, b\}$, 曲率为 κ , 则 SMCF 方程可以写成

$$\partial_t \gamma = \kappa b.$$

以上方程等价于著名的涡丝方程

$$\partial_t \gamma = \partial_s \gamma \times \partial_s^2 \gamma,$$

其中 s 是其弧长参数, $\times$ 表示外积. 涡丝方程最早在 1906 年由意大利数学家 Da Rios^[32] 提出, 用于描述三

维流体当中一根很细的管状漩涡的近似运动. 在之后的上百年间, 涡丝方程在不同的物理领域被重复发现^[33], 其重要性不言而喻, 受到了物理学家和数学家的广泛研究.

SMCF 是涡丝运动方程在高维情形的自然推广. 若三维流体中的漩涡集中在在一维曲线上, 物理学家称之为涡丝, 而如果高维流体中的漩涡集中在一个余二维子流形上, 则称为涡膜(vortex membrane). 2012 年, Shashikanth^[34] 发现四维不可压缩流体中的涡膜的运动满足二维的 SMCF. 紧接着, Khesin^[35] 推广这一结论到一般维数, 并证明任意维数流体中余二维涡膜的局部诱导运动恰好满足 SMCF.

此外, SMCF 在超流体的研究中也自然出现. 相关领域的数学模型往往由一个定义在复线丛上的偏微分方程表示, 而方程的解的零点集对应超流体中的漩涡. 其中一个重要的例子是描述 Bose-Einstein 凝聚态的 Gross-Pitaevskii 方程. 物理研究迹象表明, 该方程的解的零点集的渐近行为应当恰好满足 SMCF. Jerrard^[36] 在零点集是一个余二维球面的情形下证明了这一猜想.

2.2 斜平均曲率流的数学结构

SMCF 不仅在物理理论中十分重要, 从数学上看, 同样具有丰富的结构, 与流形的几何、偏微分方程、复分析、动力系统及可积系统都有密切的联系.

一维 SMCF, 也就是涡丝方程, 引人入胜的一个重要原因在于它美妙的可积结构. 实际上, 利用著名的 Hasimoto 变换^[37], 涡丝方程可以等价变化为一个三次薛定谔方程:

$$-i\partial_t \Phi = \Delta \Phi + \frac{1}{2} |\Phi|^2 \Phi.$$

该方程是一个典型的完全可积系统, 从而拥有无穷多个守恒量, 并且有一大族孤立子解. 而高维的 SMCF 是否有类似的结构, 目前仍然是一个公开问题.

从几何分析的角度看, SMCF 是余二维子流形上除平均曲率流外可以定义的一种典则的曲率流. 事实上, 如果我们考虑一个给定外部流形中的所有余二维子流形构成的无穷维空间, 则平均曲率流是定义在该空间上的体积泛函的梯度流, 而 SMCF 恰是体积泛函在 Marsden-Weinstein 辛结构^[38] 下对应的哈密顿流^[39], 因此是一个无穷维的哈密顿系统.

从偏微分方程角度看, SMCF 是一个十分有代表性的拟线性薛定谔型偏微分方程, 同时也是目前所知道的唯一一个薛定谔型曲率流. 它与另一个重要的薛

定滯型发展方程,即著名的薛定滯映射流,息息相关. 1998 年,Ding 等^[40](参见 Terng-Uhlenbeck 的独立工作^[41])从物理中的铁磁链方程出发,引入了从一个黎曼流形映到辛流形上的薛定滯映射流(Schrödinger map flow,SMF)

$$\partial_t u = J(u)\tau(u),$$

其中 J 是辛流形上的近复结构, $\tau(u)$ 是 u 的张力场. 注意 SMCF 是子流形的演化方程,而 SMF 是流形间映射的发展方程,它们二者之间的关系类似平均曲率流与调和映射热流之间的关系. 实际上,SMCF 的高斯映射恰好满足一个变度量的 SMF^[42]——正如平均曲率流的高斯映射满足一个调和映射热流方程^[43].

定理 11^[42] 欧氏空间中的 n 维 SMCF 的高斯映射 $\rho: [0, T] \times \Sigma^n \rightarrow G(n, 2)$ 满足 SMF 方程

$$\partial_t \rho = J_G(\rho) \Delta_g \rho.$$

其中 $G(n, 2)$ 是 Grassmannian 流形, J_G 是其上的典则复结构, g 是子流形 Σ^n 上由 SMCF 诱导的度量.

SMCF 在流形上的几何发展方程中的地位可以用表 1 来表示. 其中满足“子流形”一栏的方程的解的高斯映照恰好满足对应“映射”一栏的方程.

表 1 各种类型的几何偏微分方程

Tab. 1 Different types of geometric PDEs

类型	函数	映射	子流形
椭圆型	调和函数	调和映射	极小曲面
抛物型	热方程	调和映射热流	平均曲率流
双曲型	波方程	波映射	双曲平均曲率流
薛定滯型	薛定滯方程	薛定滯映射流	斜平均曲率流

2.3 斜平均曲率流的研究现状

基于上述物理背景和数学上的重要性,SMCF 从 2000 年左右开始受到来自复分析、动力系统、可积系统和几何分析等各个领域的数学家的密切关注^[39,44-46]. 但高维 SMCF 与一维情形有着本质的不同:一维的 SMCF 保持曲线的度量不变,而高维 SMCF 下,底流形的度量会随着时间的演变.

从偏微分方程的角度看,一维的 SMCF 是一个半线性的薛定滯方程(其非线性项只有零阶项),而高维的 SMCF 则可以视为一个拟线性的薛定滯型方程(其对应二阶算子的系数含有一阶导数项). 与人们熟知的抛物型方程不同,非线性薛定滯型方程问题没有一般的存在性理论和研究方法. 目前已知的关于拟线性

的薛定滯方程的存在性定理对方程的结构有十分严苛的要求,并且只对定义在欧氏空间上的函数方程适用,参见文献^[47-48].

另一方面,与 SMCF 密切相关的 SMF 在过去 20 年来得到了广泛而深入的研究. 一些知名数学家都做出了开拓性的贡献,以下我们作简要介绍. Ding 等^[49]首先利用抛物逼近的方法证明了从一般维数黎曼流形出发的 SMF 的局部解的存在唯一性. Song 等^[50]用几何能量方法推广并改进了 SMF 唯一性的结果. Ding^[51]在 ICM 报告中猜想一维 SMF 总是存在整体解的. 这个猜想的某些情形被 Rodniaski 等证明^[52]. 而高维的 SMF 一般只有小初值才有整体存在性^[53-54]. Merle 等^[55]构造了从二维平面映到球面的 SMF 短时间爆破的例子.

在 SMCF 初值问题的存在性和适定性方面,2017 年 Song 等^[56]首次得到了四维欧氏空间中的二维紧黎曼面上的 SMCF 的初值问题的局部解的存在性. 随后,Song^[57]又用新的方法证明了一般维数欧氏空间中紧子流形上定义的 SMCF 的短时间存在性和唯一性. 其中存在性的证明综合运用了几何能量方法和子流形上的一致 Sobolev 嵌入定理;而唯一性的证明则是利用 SMCF 的高斯映射满足变度量的 SMF 的观察^[42],并发展了一套几何能量证明方法. 值得一提的是,唯一性证明中,利用 Grassmannian 流形上的平行移动,我们定义了两个子流形之间某种内蕴的距离. 相关存在唯一性结果叙述如下:

定理 12^[57] 设 $n \geq 2$ 是一个整数,记 $k_0 = [n/2] + 1$,其中 $[n/2]$ 是 $n/2$ 的取整. 假设 $F_0: \Sigma_0 \rightarrow \mathbf{R}^{n+2}$ 是 $(n+2)$ 维欧氏空间中一个光滑浸入子流形,其中 Σ_0 是一个 n 维紧致无边流形. 则以 F_0 为初值的 SMCF 存在一个唯一的局部光滑解 $F: (0, T) \rightarrow \mathbf{R}^{n+2}$,其中时间 T 依赖于初始子流形 F_0 的高斯映射的 $W^{k_0+1,2}$ -Sobolev 模.

一般情况下,高维 SMCF 的解有可能长时间存在,也有可能在有限时间发生爆破. Khesin 等^[58]发现,如果 $a, b > 0$ 满足方程

$$\begin{cases} \partial_t a = -n/b, \\ \partial_t b = +m/a. \end{cases}$$

则以 a, b 为半径的球面的乘积子流形 $S^m(a) \times S^n(b) \hookrightarrow \mathbf{R}^{m+1} \times \mathbf{R}^{n+1}$ 满足 SMCF. 因此,当 $m = n$ 时,SMCF 长时间存在并且

$$a(t) = e^{-nt}, b(t) = e^{nt}.$$

而当 $m < n$ (例如 $m = 1, n = 2$) 时,有

$$\begin{aligned} a(t) &= (1 - (n - m)t)^{n/(n-m)}, \\ b(t) &= (1 - (n - m)t)^{m/(m-n)}, \end{aligned}$$

从而 SMCF 在时刻 $T = \frac{1}{n-m}$ 处发生爆破, 此时其中一个球面的半径塌缩到 0, 而另一个球面的半径趋于无穷.

最近, 关于从欧氏空间中一个余二维非紧曲面出发的 SMCF 的存在性和适定性问题取得了一系列的进展. Huang 等^[59-60] 证明了一类定义在合适 Sobolev 空间中的强解的小初值局部适定性. Li^[61-62] 证明了当初值是一个余二维平面的小扰动时, SMCF 的整体正则性, 并研究了其长时间渐近行为.

3 超曲面的曲率流与几何不等式

超曲面的曲率流, 如平均曲率流、Gauss 曲率流、逆平均曲率流等, 是几何分析中一类重要的几何流. 除了曲率流本身的分析之外, 它们被应用在证明各类等周型不等式. Gage 等^[63] 利用平面上的曲线收缩流证明了二维等周不等式; Huisken 等^[64] 利用逆平均曲率流证明了三维 Riemann-Penrose 不等式; McCoy^[65] 利用一类保均质积分完全非线性曲率流重证了凸体的均质积分 Alexandrov-Fenchel 不等式; Andrews^[66] 利用一类各向异性曲率流重证了关于混合体积的 Alexandrov-Fenchel 不等式; Guan 等^[67] 和 Huisken^[68] 利用逆型完全非线性曲率流证明了星型 k -凸条件下或外向面积最小条件下的均质积分 Alexandrov-Fenchel 不等式.

近年来, 超曲面的曲率流与几何不等式得到了充足发展, 众多学者通过各类曲率流证明了各类等周型不等式. 在本节中, 我们将对欧氏空间中均质积分 Alexandrov-Fenchel 不等式的几何流证明做阐述, 并结合我们的工作从逆曲率流与 Alexandrov-Fenchel 不等式, 保体积型曲率流与 Alexandrov-Fenchel 不等式, 局部保体积型曲率流与 Alexandrov-Fenchel 不等式等方面的最新进展展开综述.

3.1 逆曲率流与 Alexandrov-Fenchel 不等式

Gerhardt^[69] 与 Urbas^[70] 分别在欧氏空间中独立地研究了下面的扩张逆曲率流. 设 $x(\cdot, t): M \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$, $t \in [0, T)$ 是一族从 n 维闭流形 M 到 $\mathbf{R}^{n+1}$ 的嵌入, 满足

$$\frac{\partial}{\partial t} x(p, t) = \frac{1}{\frac{H_k}{H_{k-1}}(p, t)} \nu(p, t), p \in M. \quad (4)$$

其中 H_k 表示 $\Sigma_t = x(M, t)$ 的 k 阶平均曲率, ν 表示 Σ_t 的单位外法向.

定理 13^[69-70] 设 $\Sigma_0 = x(M) \subset \mathbf{R}^{n+1}$ 是一个星形、

严格 k -凸的光滑嵌入闭超曲面. 那么存在流 (4) 的长时间光滑解 $x(\cdot, t), t \in [0, \infty)$, 并且 $\bar{x}(\cdot, t) = e^{-t} x(\cdot, t)$ 光滑收敛于单位球面.

这儿星形表示 $\langle x, \nu \rangle > 0$, (严格) k -凸表示 $H_l \geq (>) 0, 1 \leq l \leq k$.

设 $\Omega \subset \mathbf{R}^{n+1}$ 是一个具有光滑边界的有界区域, Ω 的均质积分定义为

$$W_0(\Omega) = \text{Vol}(\Omega), W_k(\Omega) = \frac{1}{n+1} \int_{\partial\Omega} H_{k-1} dA, \\ k = 1, \dots, n.$$

在凸几何理论中, 关于均质积分有以下 Alexandrov-Fenchel 不等式成立: 当 Ω 是凸区域时, 对 $0 \leq l < k \leq n$, 有

$$\frac{W_k(\Omega)}{W_l(\Omega)^{\frac{n+1-k}{n+1-l}}} \geq \frac{W_k(\mathbf{B}^{n+1})}{W_l(\mathbf{B}^{n+1})^{\frac{n+1-k}{n+1-l}}}. \quad (5)$$

等号成立当且仅当 Ω 是一个球体. 利用逆曲率流的存在收敛定理 13, Guan 等^[67] 证明了星形、 k -凸条件下的均质积分 Alexandrov-Fenchel 不等式.

定理 14^[67] 设 $\Sigma \subset \mathbf{R}^{n+1}$ 是一个星形、 k -凸的光滑嵌入闭超曲面. 则不等式 (5) 成立, 且等号成立当且仅当 Ω 是一个球体.

Guan 等^[67] 的主要观察是几何量 $\frac{W_k(\Omega)}{W_{k-1}(\Omega)^{\frac{n+1-k}{n-k}}}$ 沿着逆曲率流 (4) 是单调递减的. 利用这一性质和定理 13, 很容易得到定理 14 的证明.

在凸几何理论中, 均质积分是混合体积的特殊情况. 设 $\Omega \subset \mathbf{R}^{n+1}$ 是凸区域, $L \subset \mathbf{R}^{n+1}$ 是另一个固定凸体. 混合体积 $V_{(k)}(\Omega, L)$ 是 Ω 与 L 的 Minkowski 和 $(1-t)\Omega + tL$ 的体积的多项式展开的系数,

$$\text{Vol}((1-t)\Omega + tL) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (1-t)^{n+1-k} t^k V_{(k)}(\Omega, L).$$

特别地, 当 L 是单位球体 $\mathbf{B}^{n+1}$ 时, $V_{(k)}(\Omega, \mathbf{B}^{n+1})$ 就是 k 阶均质积分 $W_k(\Omega)$. 在凸几何理论中, 凸区域 Ω 关于混合体积的 Alexandrov-Fenchel 不等式仍然成立:

$$V_{(j)}(\Omega, L)^{n+1-i} \geq V_{(i)}(\Omega, L)^{n+1-j} \text{Vol}(L)^{j-i}, \\ 0 \leq i < j \leq n. \quad (6)$$

从微分几何角度, 当 L 是光滑的严格凸体时, $V_{(k)}(\Omega, L)$ 可以表示为各向异性曲率积分

$$V_{(k)}(\Omega, L) = \frac{1}{(n+1)} \int_{\partial\Omega} H_{k-1, F}(\nu) dA, \\ i = 1, 2, \dots, n, \quad (7)$$

其中 F 是由 L 唯一决定的各向异性范数, 而 $H_{k-1, F}$ 是各向异性 $k-1$ 阶平均曲率. 关于各向异性曲率流, 在 $n=1$ 时即曲线情形, 有很多发展, 参见文献[71-74].

在 $n \geq 2$ 时的研究相对较少, Andrews^[75] 考虑了各向异性 Gauss 曲率流. Xia 在文献[76]中研究了逆各向异性平均曲率流

$$\frac{\partial}{\partial t} x(p, t) = \frac{1}{H_{1,F}(p, t)} \nu_F(p, t), p \in M. \quad (8)$$

其中 ν_F 是各向异性法向, $H_{1,F}$ 是各向异性平均曲率. 我们证明了 Gerhardt-Urbas 定理 13 的各向异性版本.

定理 15^[76] 设 L 是光滑的严格凸体, F 是由 L 唯一决定的各向异性范数. 设 $\Sigma_0 = x(M) \subset \mathbf{R}^{n+1}$ 是一个星形、严格各向异性平均凸($H_{1,F} > 0$)的光滑嵌入闭超曲面. 那么存在流(8)的长时间光滑解 $x(\cdot, t)$, $t \in [0, \infty)$, 并且 $\tilde{x}(\cdot, t) = e^{-t} x(\cdot, t)$ 光滑收敛于 L .

利用以上定理, 我们证明了星形、各向异性平均凸条件下的各向异性 Minkowski 型不等式.

定理 16^[76] 设 $\Sigma \subset \mathbf{R}^{n+1}$ 是一个星形、各向异性平均凸的光滑嵌入闭超曲面. 则有

$$V_{(2)}(\Omega, L)^n \geq V_{(1)}(\Omega, L)^{n-1} \text{Vol}(L), \quad (9)$$

且等号成立当且仅当 Ω 是 L 的一个平移和伸缩.

如果将流(8)中的 $H_{1,F}$ 替换为 $\frac{H_{k,F}}{H_{k-1,F}}, 1 < k < n$, 此时流的存在收敛性还是未知的, 主要的困难在于曲率估计.

3.2 保体积型曲率流与 Alexandrov-Fenchel 不等式

Huisken^[77] 引入 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的以下保体积曲率流,

$$\frac{\partial}{\partial t} x(p, t) = (c(t) - H)(p, t) \nu(p, t), \quad (10)$$

其中 $c(t) = \frac{\int_{\Sigma_t} H dA}{\int_{\Sigma_t} dA}$ 是非局部项. 很容易看到, 在此流

下, Σ_t 所包围的区域 Ω_t 的体积是不变的. Huisken 在凸性条件下证明了此流的长时间存在和收敛性.

定理 17^[77] 设 $\Sigma_0 = x(M) \subset \mathbf{R}^{n+1}$ 是一个凸的光滑嵌入闭超曲面. 那么存在流(10)的长时间光滑解 $x(\cdot, t), t \in [0, \infty)$, 并且 $\tilde{x}(\cdot, t)$ 光滑收敛于一个球面.

此流的另一个性质是, Σ_t 的面积是递减的. 利用定理 17, 可以得到凸区域的等周不等式.

类似流(10), McCoy^[65] 考虑了 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的保均质积分曲率流,

$$\frac{\partial}{\partial t} x(p, t) = \left(c_k(t) - \frac{H_{k+1}}{H_k} \right) (p, t) \nu(p, t), \quad (11)$$

其中 $c_k(t) = \frac{\int_{\Sigma_t} H_{k+1} dA}{\int_{\Sigma_t} H_k dA}$ 是非局部项. 利用 $\int_{\Sigma} H_{k-1} dA$

的第一变分公式, 可以知道, 在此流下, $\int_{\Sigma} H_{k-1} dA$ 是不变的.

定理 18^[65] 设 $\Sigma_0 = x(M) \subset \mathbf{R}^{n+1}$ 是一个凸的光滑嵌入闭超曲面. 那么存在流(11)的长时间光滑解 $x(\cdot, t), t \in [0, \infty)$, 并且 $\tilde{x}(\cdot, t)$ 光滑收敛于一个球面.

此流的另一个性质是, $\int_{\Sigma} H_k dA$ 是递减的. 利用定理 18, McCoy^[65] 给出了凸区域的均质积分 Alexandrov-Fenchel 不等式(5)的新证明.

我们在双曲空间 $\mathbf{H}^{n+1}$ 中考虑了流(11), 证明了以下定理.

定理 19^[78] 设 $\Sigma_0 \subset \mathbf{H}^{n+1}$ 是双曲空间中一个 horo 凸的光滑嵌入闭超曲面. 那么存在流(11)的长时间光滑解 $x(\cdot, t), t \in [0, \infty)$, 并且 $\tilde{x}(\cdot, t)$ 光滑收敛于一个测地球面.

此处一个曲面被称为 horo 凸, 如果它的主曲率均不小于 1, 这是 $\mathbf{H}^{n+1}$ 中超曲面的一个非常自然的条件. 下面我们介绍这个流在双曲空间中 horo 凸超曲面的均质积分 Alexandrov-Fenchel 不等式的应用.

我们先介绍空间形式中的均质积分. 记 $N(K)$, $K = 0, \pm 1$ 表示曲率为常数 K 的空间形式. 特别地, $N(0), N(1), N(-1)$ 分别表示欧氏空间 $\mathbf{R}^{n+1}$, 球面 $\mathbf{S}^{n+1}$ 和双曲空间 $\mathbf{H}^{n+1}$. 设 $\Omega \subset N(K)$ 是一个具有光滑边界的有界区域, Ω 的均质积分定义为

$$W_0(\Omega) = \text{Vol}(\Omega), W_1(\Omega) = \text{Area}(\partial\Omega), \quad (12)$$

$$W_k(\Omega) = \frac{1}{n+1} \int_{\partial\Omega} H_{k-1} dA + K \frac{k-1}{n-k+3} W_{k-2},$$

$$k = 2, 3, \dots, n. \quad (13)$$

$W_k(\Omega)$ 的变分公式如下:

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} W_k(\Omega_t) = \frac{n+1-k}{n+1} \int_{\Sigma} H_k \langle Y, \nu \rangle dA, \quad (14)$$

其中 Y 是 $\{\Omega_t\}$ 的变分向量场. 利用式(14), 很容易证明, 沿着流(11), W_k 不变且 W_{k+1} 递减.

利用定理 19, 我们得到了 $\mathbf{H}^{n+1}$ 中 horo 凸的闭超曲面的 Alexandrov-Fenchel 不等式.

定理 20^[78] 设 $\Sigma \subset \mathbf{H}^{n+1}$ 是双曲空间中一个 horo 凸的光滑嵌入闭超曲面, 包围区域 Ω . 则对 $1 \leq k < l \leq n$, 有

$$W_k(\Omega) \geq f_k \circ f_l^{-1}(W_l(\Omega)), \quad (15)$$

其中 $f_k: [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}_+$ 是单调函数 $f_k(r) = W_k(B_r)$ 是

半径为 r 的测地球面的 k 阶均质积分, f_{k-1}^{-1} 是 f_{k-1} 的反函数. 等号成立当且仅当 Σ 是一个测地球面.

注意到, 双曲空间中的 Alexandrov-Fenchel 不等式与欧氏空间不同, 是没有显示表达式的. 在我们的工作之前, 不等式(15)在 k 为奇数, $l=1$ 的情形由 Li 等^[79]和 Ge 等^[80]通过逆曲率流的方法得到.

对于球面 $\mathbf{S}^{n+1}$ 中的 Alexandrov-Fenchel 不等式, 近来利用曲率流的方法, 对于凸超曲面也有部分结果, 参见文献[81-82].

3.3 局部保体积型曲率流与 Alexandrov-Fenchel 不等式

空间形式的度量极坐标表示为 $g = dr^2 + \lambda(r)^2 \sigma$, 其中 σ 是 $\mathbf{S}^n$ 的标准球面度量, $\lambda(r)$ 在欧氏空间 $\mathbf{R}^{n+1}$, 球面 $\mathbf{S}^{n+1}$ 和双曲空间 $\mathbf{H}^{n+1}$ 中分别表示 $1, \sin r, \sinh r$. Brendle 等^[83]为空间形式的闭超曲面设计了以下曲率流:

$$\frac{\partial}{\partial t} x(p, t) = \left(\frac{\lambda'(r)}{H_k} - \langle \lambda(r) \partial_r, \nu \rangle \right) (p, t) \nu(p, t). \quad (16)$$

这个流的设计是受空间形式中的 Minkowski 公式启发的. 对于空间形式中的闭超曲面 $\mathbf{S}$, 有 Minkowski 公式

$$\int_{\mathbf{S}} (H_{k-1} \lambda'(r) - H_k \langle \lambda(r) \partial_r, \nu \rangle) dA = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (17)$$

利用 Minkowski 公式(17)与空间形式中均质积分的第一变分公式(14), 可以看出, W_k 保持不变. 并且, 如果曲面沿流 k 凸性质保持, 则有 $W_l, l < k$ 是单调递增的, $W_l, l > k$ 是单调递减的.

关于流(16), 在欧氏空间中, 它等价于逆曲率流(4), 故当初始曲面是星形 k 凸时, 根据定理 13, 存在收敛性自然成立; 在球面和双曲空间中, 当初始曲面是星形 k 凸时, 该流的存在收敛性仍是未知问题. Brendle 等^[83]在 $k=n$ 时证明了流的长时间存在收敛性. 最近, Hu 等^[84]证明了在双曲空间中, 沿着流(16), 超曲面的 horo 凸性保持. 从而他们利用流(16)重新证明了定理 19.

利用这一思想, 我们研究了欧氏球体中带自由边界的凸超曲面中的相对 Alexandrov-Fenchel 不等式问题. 欧氏球体中的相对等周不等式由 Burago 等^[85]通过对称化方法给出分类结果. 一个自然的问题是, 欧氏球体中的均质积分是什么, 关于相对 Alexandrov-Fenchel 不等式是否成立?

Wang 等在文献[86]中证明了以下 Minkowski 公式: 设 $\Sigma \subset \overline{\mathbf{B}^{n+1}}$ 是单位球体中光滑嵌入带边超曲面, $\partial \Sigma \subset \partial \mathbf{B}^{n+1}$ 且与 $\partial \mathbf{B}^{n+1}$ 垂直相交, 则有

$$\int_{\Sigma} (H_{k-1} \langle x, e \rangle - H_k \langle X_e, \nu \rangle) dA = 0, \quad (18)$$

这儿 $e \in \mathbf{R}^{n+1}$ 是一个单位常向量场,

$$X_e := \langle x, e \rangle x - \frac{1}{2}(|x|^2 + 1)e \quad (19)$$

是一个共形 Killing 向量场. Minkowski 公式(18)的优点在于没有边界项出现.

下面我们将给出单位球体内带自由边界(参见文献[87])超曲面上均质积分的定义. 设 $\Sigma \subset \overline{\mathbf{B}^{n+1}}$ 是单位球体中光滑嵌入带边超曲面, $\partial \Sigma \subset \partial \mathbf{B}^{n+1}$ 且与 $\partial \mathbf{B}^{n+1}$ 垂直相交. 记 Ω 为 Σ 在 $\mathbf{B}^{n+1}$ 内部所围成的有界区域和 $T \subset \mathbf{S}^n$ 为 $\partial \Sigma$ 在 $\mathbf{S}^n$ 上面围成的有界区域, 其中 $\partial \Omega = \mathbf{S} \cup T$. 我们定义关于 $\Omega \subset \overline{\mathbf{B}^{n+1}}$ 的相对均质积分 $W_k(\Omega)$ 如下:

$$W_0(\Omega) = \text{Vol}(\Omega), W_1(\Omega) = \frac{1}{n+1} \text{Area}(\Sigma), \quad (20)$$

$$W_k(\Omega) = \frac{1}{n+1} \int_{\Sigma} H_{k-1} dA + \frac{k-1}{(n+1)(n-k+2)} W_{k-2}^{\mathbf{S}^n}(T), 2 \leq k \leq n, \quad (21)$$

其中 $W_{k-2}^{\mathbf{S}^n}(T)$ 是 $\mathbf{S}^n$ 中闭凸区域 T 的均质积分(由式(12)给出). 对于上述定义的相对均质积分 W_k , 它满足如下的第一变分公式: 设 Ω_t 是一族变分, 满足 $\mathbf{S}_t = \partial \Omega_t \cap \mathbf{B}^{n+1}$ 与 $\partial \mathbf{B}^{n+1}$ 垂直相交, 则有

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} W_k(\Omega_t) = \frac{n+1-k}{n+1} \int_{\Sigma} H_k \langle Y, \nu \rangle dA, \quad (22)$$

其中变分向量场 Y 满足 $Y|_{\partial \Sigma} \in T(\partial \mathbf{B}^{n+1})$.

利用 Minkowski 公式(18)和第一变分公式(22), 我们在 $\mathbf{B}^{n+1}$ 设计如下曲率流

$$\begin{cases} \partial_t x = \frac{\langle x, e \rangle}{H_k} - \langle X_e, \nu \rangle \nu, \\ \mathbf{S}_t \perp \partial \mathbf{B}^{n+1}. \end{cases} \quad (23)$$

根据 Minkowski 公式(18)和第一变分公式(22), 可以看到, 沿着曲率流(23), W_k 保持不变. 并且, 如果曲面沿流 k 凸性质保持, 则有 $W_l, l < k$ 是单调递增的, $W_l, l > k$ 是单调递减的.

定理 21^[87] 设 $\Sigma_0 \subset \overline{\mathbf{B}^{n+1}}$ 是单位球体中光滑嵌入带边的严格凸超曲面, $\partial \Sigma_0 \subset \partial \mathbf{B}^{n+1}$ 且与 $\partial \mathbf{B}^{n+1}$ 垂直相交. 那么对 $k = n$, 存在流(23)的长时间光滑解 $x(\cdot, t), t \in [0, \infty)$, 并且 $x(\cdot, t)$ 光滑收敛于一个与 $\partial \mathbf{B}^{n+1}$

垂直的球帽子.

与 $\partial \mathbf{B}^{n+1}$ 垂直的球帽子指的是

$$C_r := \left\{ x \in \overline{\mathbf{B}^{n+1}} : \left| x - \sqrt{r^2 + 2r \cos \theta + 1} e \right| = r \right\}, \\ r > 0. \quad (24)$$

基于定理 21 与相对均质积分在该流下的单调性,我们得到了单位球内带自由边界超曲面的如下相对 Alexandrov-Fenchel 不等式.

定理 22^[87] 设 $\Sigma \subset \overline{\mathbf{B}^{n+1}}$ 是单位球体中光滑嵌入带边的凸超曲面, $\partial \Sigma \subset \partial \mathbf{B}^{n+1}$ 且与 $\partial \mathbf{B}^{n+1}$ 垂直相交. 则对 $0 \leq k \leq n-1$,

$$W_n(\Omega) \geq (f_n \circ f_k^{-1})(W_k(\Omega)), \quad (25)$$

其中 $f_k(r) = W_k(C_r)$ 是一个严格递增函数. 等号成立当且仅当 Σ 是一个与 $\partial \mathbf{B}^{n+1}$ 垂直的球帽子.

类比欧氏空间闭曲面上的 Alexandrov-Fenchel 不等式,我们猜测,

$$W_k(\Omega) \geq (f_k \circ f_l^{-1})(W_l(\Omega)), 0 \leq l < k \leq n. \quad (26)$$

目前,由于对一般的 k , 流(23)的存在收敛性未知,因此我们还未能证明式(26).

参考文献:

- [1] HAMILTON R S. Three-manifolds with positive Ricci curvature[J]. Journal of Differential Geometry, 1982, 17(2):255-306.
- [2] DETURCK D M. Deforming metrics in the direction of their Ricci tensors[J]. Journal of Differential Geometry, 1983, 18(1):157-162.
- [3] CAO H D, ZHU X P. A complete proof of the poincaré and geometrization conjectures-application of the Hamilton-Perelman theory of the Ricci flow[J]. Asian Journal of Mathematics, 2006, 10(2):165-492.
- [4] KLEINER B, LOTT J. Notes on perelman's papers[J]. Geometry & Topology, 2008, 12(5):2587-2855.
- [5] MORGAN J W, TIAN G. Ricci flow and the Poincaré conjecture [C] // Clay Mathematics Monographs. Cambridge: American Mathematical Society, 2007:1-20.
- [6] PERELMAN G. The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications[EB/OL]. [2003-05-01]. <https://arxiv.org/abs/math/0211159>. pdf.
- [7] PERELMAN G. Ricci flow with surgery on three-manifolds [EB/OL]. [2023-05-01]. <https://arxiv.org/abs/math/0303109>.
- [8] PERELMAN G. Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds[J]. Topologica,

2008, 1(1):5.

- [9] BRENDLE S, SCHOEN R M. Classification of manifolds with weakly 1/4-pinched curvatures[J]. Acta Mathematica, 2008, 200(1):1-13.
- [10] BRENDLE S, SCHOEN R M. Manifolds with 1/4-pinched curvature are space forms[J]. Journal of the American Mathematical Society, 2009, 22(1):287-307.
- [11] SHI W X. Deforming the metric on complete Riemannian manifolds[J]. Journal of Differential Geometry, 1989, 30(1):223-301.
- [12] BAMLER R H, CABEZAS-RIVAS E, WILKING B. The Ricci flow under almost non-negative curvature conditions [J]. Inventiones Mathematicae, 2019, 217(1):95-126.
- [13] CABEZAS-RIVAS E, WILKING B. How to produce a Ricci flow via Cheeger-Gromoll exhaustion[J]. Journal of the European Mathematical Society, 2015, 17(12):3153-3194.
- [14] GIESEN G, TOPPING P M. Existence of Ricci flows of incomplete surfaces [J]. Communications in Partial Differential Equations, 2011, 36(10):1860-1880.
- [15] HOCHARD R. Short-time existence of the Ricci flow on complete, non-collapsed 3-manifolds with Ricci curvature bounded from below[EB/OL]. [2023-05-01]. <https://arxiv.org/abs/1603.08726>. pdf.
- [16] LEE M C, TAM L F. Chern-Ricci flows on noncompact complex manifolds[J]. Journal of Differential Geometry, 2020, 115(3):529-564.
- [17] XU G Y. Short-time existence of the Ricci flow on noncompact Riemannian manifolds[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 2013, 365(11):5605-5654.
- [18] HE F. Existence, lifespan, and transfer rate of Ricci flows on manifolds with small Ricci curvature [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 2019, 371(6):4059-4095.
- [19] XU G Y. Lower bound of Ricci flow's existence time [J]. Bulletin of the London Mathematical Society, 2015, 47(5):759-770.
- [20] SIMON M, TOPPING P M. Local mollification of Riemannian metrics using Ricci flow, and Ricci limit spaces[J]. Geometry & Topology, 2021, 25(2):913-948.
- [21] MCLEOD A, TOPPING P M. Global regularity of three-dimensional Ricci limit spaces[J]. Transactions of the American Mathematical Society, Series B, 2022, 9(11):345-370.

- [22] LAI Y. Ricci flow under local almost non-negative curvature conditions[J]. *Advances in Mathematics*, 2019, 343: 353-392.
- [23] HE F, LEE M C. Weakly PIC_1 manifolds with maximal volume growth[J]. *The Journal of Geometric Analysis*, 2021, 31(11): 10868-10885.
- [24] HE F. Existence and applications of Ricci flows via pseudolocality[EB/OL]. [2023-05-01]. <https://arxiv.org/abs/1610.01735>. pdf.
- [25] CAVALLETTI F, MONDINO A. Almost euclidean isoperimetric inequalities in spaces satisfying local Ricci curvature lower bounds[J]. *International Mathematics Research Notices*, 2020, 2020(5): 1481-1510.
- [26] WANG B. The local entropy along Ricci flow—Part B: the pseudo-locality theorems[EB/OL]. [2023-05-01]. <https://arxiv.org/abs/2010.09981>.
- [27] LEE M C, TOPPING P M. Three-manifolds with non-negatively pinched Ricci curvature. [2023-05-01]. <https://arxiv.org/abs/2204.00504>.
- [28] LEE M C, TOPPING P M. Manifolds with PIC_1 pinched curvature[EB/OL]. [2023-05-01]. <https://arxiv.org/abs/2211.07623>.
- [29] LAI Y. Producing 3D Ricci flows with nonnegative Ricci curvature via singular Ricci flows[J]. *Geometry & Topology*, 2022, 25(7): 3629-3690.
- [30] LEE M C. Complete Kähler-Einstein metric on stein manifolds with negative curvature[J]. *International Mathematics Research Notices*, 2022, 2022(6): 4280-4289.
- [31] SIMON M. Deformation of C^0 Riemannian metrics in the direction of their Ricci curvature[J]. *Communications in Analysis and Geometry*, 2002, 10(5): 1033-1074.
- [32] DA RIOS L. On the motion of an unbounded fluid with a vortex filament of anyshape[J]. *Rend Circ Mat Palermo*, 1906, 22: 117-135.
- [33] RICCA R L. Rediscovery of da Rios equations[J]. *Nature*, 1991, 352(6336): 561-562.
- [34] SHASHIKANTH B N. Vortex dynamics in R^4 [J]. *Journal of Mathematical Physics*, 2012, 53(1): 013103.
- [35] KHESIN B. Symplectic structures and dynamics on vortex membranes[J]. *Moscow Mathematical Journal*, 2012, 12(2): 413-434.
- [36] JERRARD R. Vortex filament dynamics for Gross-Pitaevsky type equations[J]. *Ann Sc Norm Super Pisa CI Sci*, 2002, 1(4): 733-768.
- [37] HASIMOTO H. A soliton on a vortex filament[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1972, 51(3): 477-485.
- [38] MARSDEN J, WEINSTEIN A. Coadjoint orbits, vortices, and Clebsch variables for incompressible fluids [J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1983, 7(1/2/3): 305-323.
- [39] HALLER S, VIZMAN C. Non-linear grassmannians as coadjoint orbits[J]. *Mathematische Annalen*, 2004, 329(4): 771-785.
- [40] DING W Y, WANG Y D. Schrödinger flow of maps into symplectic manifolds[J]. *Science in China Series A: Mathematics*, 1998, 41(7): 746-755.
- [41] TERNG C, UHLENBECK K. Schrödinger flows on Grassmannians, integrable systems, geometry, and topology[J]. *AMS/IP Stud Adv Math*, 2006, 36: 235-256.
- [42] SONG C. Gauss map of skew mean curvature flow[J]. *Proc Amer Math Soc*, 2017, 145(11): 4963-4970.
- [43] WANG M T. Gauss maps of the mean curvature flow [J]. *Mathematical Research Letters*, 2003, 10(3): 287-299.
- [44] GOMEZ H. Binormal motion of curves and surfaces in a manifold [D]. College Park: University of Maryland, 2004.
- [45] LIN F. Topological vorticity and geometric conserved motion, unpublished note, 2009.
- [46] TERNG C L. Dispersive geometric curve flows[J]. *Surveys in Differential Geometry*, 2014, 19(1): 179-229.
- [47] KENIG C E, PONCE G, VEGA L. The Cauchy problem for quasi-linear Schrödinger equations[J]. *Inventiones Mathematicae*, 2004, 158(2): 343-388.
- [48] LINARES F, PONCE G. Other nonlinear dispersive models [M] // *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations*. New York: Springer, 2009: 1-20.
- [49] DING W Y, WANG Y D. Local Schrödinger flow into Kähler manifolds[J]. *Science in China Series A: Mathematics*, 2001, 44(11): 1446-1464.
- [50] SONG C, WANG Y D. Uniqueness of Schrödinger flow on manifolds [J]. *Communications in Analysis and Geometry*, 2018, 26(1): 217-235.
- [51] DING W. On the Schrödinger flows[C]//*Proceedings of the International Congress of Mathematicians*. Beijing: Higher Ed Press, 2002: 283-291.
- [52] RODNIANSKI I, RUBINSTEIN Y, STAFFILANI G. On the global well-posedness of the one-dimensional Schrödinger map flow[J]. *Analysis & PDE*, 2009, 2(2): 187-209.

- [53] BEJENARU I, IONESCU A D, KENIG C E, et al. Global Schrödinger maps in dimensions $d \geq 2$: small data in the critical Sobolev spaces[J]. *Annals of Mathematics*, 2011, 173(3): 1443-1506.
- [54] LI Z. Global Schrödinger map flows to Kähler manifolds with small data in critical Sobolev spaces: high dimensions[J]. *Journal of Functional Analysis*, 2021, 281(6): 109093.
- [55] MERLE F, RAPHAËL P, RODNIANSKI I. Blowup dynamics for smooth data equivariant solutions to the critical Schrödinger map problem [J]. *Inventiones Mathematicae*, 2013, 193(2): 249-365.
- [56] SONG C, SUN J. Skew mean curvature flow [J]. *Communications in Contemporary Mathematics*, 2019, 21(1): 1750090.
- [57] SONG C. Local existence and uniqueness of skew mean curvature flow[J]. *Journal Für Die Reine Und Angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 2021, 2021(776): 1-26.
- [58] KHESIN B, YANG C. Higher-dimensional Euler fluids and hasimoto transform: counterexamples and generalizations[J]. *Nonlinearity*, 2021, 34(3): 1525-1542.
- [59] HUANG J X, TATARU D. Local well-posedness of skew mean curvature flow for small data in $d \geq 4$ dimensions [J]. *Communications in Mathematical Physics*, 2022, 389(3): 1569-1645.
- [60] HUANG J X, TATARU D. Local well-posedness of the Skew mean curvature flow for small data in $d \geq 2$ dimensions[EB/OL]. [2023-05-01]. <https://arxiv.org/abs/2202.10632.pdf>.
- [61] LI Z. Global transversal stability of Euclidean planes under skew mean curvature flow evolutions[J]. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 2021, 60(2): 1-19.
- [62] LI Z. Global and local theory of skew mean curvature flows[J]. *The Journal of Geometric Analysis*, 2021, 32(1): 1-40.
- [63] GAGE M, HAMILTON R S. The heat equation shrinking convex plane curves[J]. *Journal of Differential Geometry*, 1986, 23(1): 69-96.
- [64] HUISKEN G, ILMANEN T. The inverse mean curvature flow and the Riemannian Penrose inequality[J]. *Journal of Differential Geometry*, 2001, 59(3): 353-437.
- [65] MCCOY J A. Mixed volume preserving curvature flows [J]. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 2005, 24(2): 131-154.
- [66] ANDREWS B. Evolving convex hypersurfaces [D]. Canberra: Australian National University, 1993.
- [67] GUAN P F, LI J F. The quermassintegral inequalities for k -convex starshaped domains [J]. *Advances in Mathematics*, 2009, 221(5): 1725-1732.
- [68] HUISKEN G. An isoperimetric concept for the mass in general relativity[EB/OL]. [2023-05-01]. <https://video.ias.edu/node/234>.
- [69] GERHARDT C. Flow of nonconvex hypersurfaces into spheres[J]. *Journal of Differential Geometry*, 1990, 32(1): 299-314.
- [70] URBAS J I E. On the expansion of starshaped hypersurfaces by symmetric functions of their principal curvatures[J]. *Mathematische Zeitschrift*, 1990, 205(1): 355-372.
- [71] GAGE M E. Evolving plane curves by curvature in relative geometries [J]. *Duke Mathematical Journal*, 1993, 72(2): 441-466.
- [72] GAGE M E, LI Y. Evolving plane curves by curvature in relative geometries II [J]. *Duke Mathematical Journal*, 1994, 75(1): 79-98.
- [73] CHOU K S, ZHU X P. Anisotropic flows for convex plane curves[J]. *Duke Mathematical Journal*, 1999, 97(3): 579-619.
- [74] ANDREWS B. Evolving convex curves[J]. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 1998, 7(4): 315-371.
- [75] ANDREWS B. Motion of hypersurfaces by Gauss curvature [J]. *Pacific Journal of Mathematics*, 2000, 195(1): 1-34.
- [76] XIA C. Inverse anisotropic mean curvature flow and a Minkowski type inequality [J]. *Advances in Mathematics*, 2017, 315: 102-129.
- [77] HUISKEN G. The volume preserving mean curvature flow[J]. *J Reine Angew Math*, 1987, 382: 35-48.
- [78] WANG G F, XIA C. Isoperimetric type problems and Alexandrov-Fenchel type inequalities in the hyperbolic space[J]. *Advances in Mathematics*, 2014, 259: 532-556.
- [79] LI H Z, WEI Y, XIONG C W. A geometric inequality on hypersurface in hyperbolic space [J]. *Advances in Mathematics*, 2014, 253: 152-162.
- [80] GE Y X, WANG G F, WU J E. Hyperbolic alexandrov-fenchel quermassintegral inequalities II [J]. *Journal of Differential Geometry*, 2014, 98(2): 237-260.
- [81] CHEN C Q, GUAN P F, LI J F, et al. A fully-nonlinear flow and quermassintegral inequalities in the sphere[J]. *Pure and Applied Mathematics Quarterly*, 2022, 18(2): 437-461.
- [82] CHEN M, SUN J. Alexandrov-Fenchel type inequalities

in the sphere[J]. Advances in Mathematics,2022,397:108203.

[83] BRENDLE S,GUAN P,LI J. An inverse curvature type hypersurface flow in space forms[EB/OL]. [2023-05-01]. <https://www.mcgill.ca/mathstat/channels/event/pengfei-guan-mcgill-285929>.

[84] HU Y X,LI H Z,WEI Y. Locally constrained curvature flows and geometric inequalities in hyperbolic space[J]. Mathematische Annalen,2022,382(3/4):1425-1474.

[85] BURAGO Y D,MAZ'YA V G. Certain questions of potential theory and function theory for regions with irregular boundaries [J]. Zap Nauch Sem Leningrad Otdel Mat Inst Steklov,1967,3:152.

[86] WANG G F,XIA C. Uniqueness of stable capillary hypersurfaces in a ball [J]. Mathematische Annalen,2019,374(3/4):1845-1882.

[87] SCHEUER J,WANG G F,XIA C. Alexandrov-Fenchel inequalities for convex hypersurfaces with free boundary in a ball[J]. Journal of Differential Geometry,2022,120(2):345-37.

Analysis and application of curvature flow in differential geometry

HE Fei,SONG Chong,XIA Chao *

(School of Mathematical Sciences,Xiamen University,Xiamen 361005,China)

Abstract: Geometric flows are regarded as important subjects in differential geometry and geometric analyses, which secure numerous applications in differential topology,functional analysis,partial differential equations,and general relativity among others. This paper is devoted to offering a survey on the developments of geometric flows based on works of the geometric-analysis group in Xiamen University. In the paper,we primarily discuss recent developments on the existence for complete noncompact Ricci flow,the existence for skew mean curvature flow,hypersurface curvature flow and geometric inequalities,as well as further open problems.

Keywords: geometric flow; complete noncompact Ricci flow; skew mean curvature flow; hypersurface curvature flow; geometric inequality

(责任编辑:汪 军)