

基于区间数据的数字货币市场风险测算 新方法

张丁漩¹, 孙玉莹^{1,2}, 洪永淼^{1,2}

(1. 中国科学院大学经济与管理学院, 数字经济监测预测预警与政策仿真教育部哲学社会科学实验室, 北京 100190; 2. 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190)

摘要 在数字经济时代, 数字货币的出现吸引了诸多投资者与研究者, 但其高波动性的价格特征, 为投资决策和风险评估提出了新的挑战. 为更准确地刻画这种特征, 本文提出基于指数衰减加权自举法的区间变量置信域构建方法, 进一步以此置信域的覆盖面积与尾部分位数作为评估数字货币市场波动率与尾部风险的新指标. 以比特币为例的实证结果表明, 首先, 相比于传统点值模型如指数加权移动平均模型, 区间变量置信域的覆盖面积能同时有效度量比特币价格的水平与极差的不确定性, 这增加了对日内价格波动的度量. 其次, 在分析尾部风险预测效果时, 相比于历史模拟法和指数加权移动平均模型预测的在险价值, 区间变量置信域生成的尾部分位数在条件覆盖率与非条件覆盖率检验上的表现更优. 此外, 本文提出的基于指数衰减加权的自举法更有效地刻画市场的非正态分布与时变性的特征. 本研究不仅为数字货币的波动分析贡献了一种新的统计工具, 而且为金融市场的尾部风险管理提供了新方法和新视角.

关键词 区间数据; 数字货币; 置信域; 波动性; 尾部风险

An Innovative Approach for Risk Measurement in Digital Currency Market Using Interval-valued Data

ZHANG Dingxuan¹, SUN Yuying^{1,2}, HONG Yongmiao^{1,2}

(1. School of Economics and Management, MOE Social Science Laboratory of Digital Economic Forecasts and Policy Simulation, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China; 2. Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

收稿日期: 2024-03-08

基金项目: 国家自然科学基金 (72322016, 72073126, 72091212, 71973116); 国家自然科学基金“计量建模与经济政策研究”基础科学中心项目 (71988101)

Supported by National Natural Science Foundation of China (72322016, 72073126, 72091212, 71973116); National Natural Science Foundation of China (NSFC) Fundamental Scientific Center Project “Econometric Modelling and Economic Policy Studies” (71988101)

作者简介: 张丁漩, 博士研究生, 研究方向: 金融风险、区间数据建模, E-mail: zhangdingxuan19@mails.ucas.ac.cn; 孙玉莹, 副研究员, 研究方向: 计量经济学、时间序列分析、模型平均等, E-mail: sunyuying@amss.ac.cn; 洪永淼, 世界计量经济学会会士、发展中国家科学院院士, 中国科学院数学与系统科学研究院特聘研究员, 研究方向: 计量经济学、时间序列分析、金融计量学、统计学, E-mail: ymhong@amss.ac.cn.

Abstract In the digital economy, the emergence of digital currencies has attracted considerable attention from both investors and researchers. However, their high volatility characteristics present new challenges in investment decision-making and risk assessment. To capture the characteristics comprehensively, this paper proposes a novel approach for constructing confidence regions for interval-valued variables based on the exponentially decay weighted bootstrap. The coverage area of the confidence regions and tail quantiles provide new indicators for assessing the volatility and tail risks in the market. Empirical results using Bitcoin as a case study demonstrate the proposed approach outperforms other traditional point-based methods such as exponential weighted moving average in measuring the uncertainty and intraday price volatility. Furthermore, the derived tail quantiles exhibit superior predictive performance for tail risk compared to Value-at-risk methods and the exponential weighted moving average, as evidenced by various tests. The proposed methodology not only contributes a new statistical tool for analyzing digital currency volatility but also provides novel perspectives for extreme risk management in financial markets.

Keywords interval-valued data; digital currency; confidence region; volatility; tail risk

1 引言

自从 2009 年比特币诞生以来, 各种数字货币层出不穷, 对传统的货币体系、金融秩序、国际关系、法律制度等方面都产生了深远的影响 (陈收等, 2021; 李苍舒和沈艳, 2019; 周颖刚等, 2022). 特别地, 近几年世界政治环境的紧张和动荡, 俄乌冲突等重大突发事件较多, 很多地区的投资者采用数字货币来避免汇率风险、通胀风险、规避税收与监管 (Glenn and Reed, 2023). 同时, 一些中小国家和地区, 如委内瑞拉、伊朗、土耳其、津巴布韦等, 由于经济危机、货币崩溃、政治动乱等原因, 也出现了比特币的大量使用和流通 (Pagnotta, 2022). 截至 2023 年, 根据 CoinMarketCap 网站¹的统计数据显示, 全球的数字货币达到了 22163 种, 交易所有 668 个, 总市值达到了 7986.88 亿美元. 其中, 比特币的市值仍排在第一, 占数字货币总市值的 41.2%.

尽管数字货币在实践中有一定的交易流通代币的作用 (Cong, Li and Wang, 2021; Lee and Parlour, 2022), 并且被纳入投资组合 (Kajtazi and Moro, 2019), 但其市场价格的高波动特征给投资者带来的巨大的风险. 以比特币为例, 其价格在 2021 年 4 月达到 63000 美元以上, 而在之后的三个月内又跌至 29000 美元. 一方面, 这是由于数字货币的价格受到多种因素的影响, 如利率、股票市场和外汇市场的波动、数字货币网络因素、市场需求和供应量、竞争币种、技术创新、虚假交易、重大事件、货币政策、市场情绪等 (Cong et al., 2023; Liu and Tsyvinski, 2021; Koutmos, 2020; 陈阳, 费为银和潘海峰, 2023; 谢平和石午光, 2015; 姬强等, 2022). 另一方面, 该市场具有高度的投机性, 存在许多投机者试图获得超额收益, 市场参与者的增加使交易变得活跃, 也使得市场中充斥着诸多噪声 (Scaillet, Treccani and Trevisan, 2020). 因此, 数字货币比其他传统的金融资产波动性更大 (Şanlı, Balcılar and Özmen, 2023;

¹<https://coinmarketcap.com>.

郭笑春和汪寿阳, 2020), 如何更准确地把握这类新型高波动金融资产的波动与尾部风险情况对金融风险管理具有重要的实际意义。

现有关于数字货币市场风险的研究采用了指数加权移动平均模型 (exponential weighted moving average, EWMA)、GARCH 类模型以及机器学习模型 (Aharon et al., 2023; Alexander and Dakos, 2023; Trucíos, 2019)。然而, 这些关于比特币价格波动性的研究都是基于点值数据进行建模, 如使用日度收盘价格, 这样其实仅包含了比特币的日间波动信息, 而忽略了其日内交易价格波动的信息。由于比特币等数字货币均是二十四小时交易, 且没有涨跌幅的限制, 其日内的价格波动较大, 如 2021 年 5 月 19 日当天比特币最高价与最低价的价差达到了 13255 美元, 这是在对其市场波动与尾部风险进行研究时所不可忽略的信息。

在金融计量经济学中, 最高价与最低价的价差区间 (极差) 是比单点值收盘价含有更多信息量的波动性指标 (Brownlees and Gallo, 2010; 吴鑫育, 谢海滨和汪寿阳, 2020; 郑挺国和左浩苗, 2013), 如 Chou (2005) 指出 CARR 模型比 GARCH 模型预测波动率更为准确, 其原因是极差比波动包含更多信息。极差在金融市场的技术分析中也起着独特的作用, 一些研究通过对高点、低点和区间的联合动态建模, 为金融市场如股票和原油市场提出了一些交易策略, 以改进常见的技术分析 (Caporin, Ranaldo and De Magistris, 2013)。然而, 如 He et al. (2010) 所述, 关注区间极差无法得到相应的高点和低点信息, 如果不做差分, 将高点和低点视为区间数据进行建模, 可以包含更多信息 (洪永淼和汪寿阳, 2021a), 提高统计推断和预测 (Sun et al., 2018)。

现有大多数区间数据建模主要是将区间视为中点和极差 (或者上界和下界), 采用单变量或二元变量方法进行建模 (Billard and Diday, 2003; Brito, 2007; Neto and De Carvalho, 2008)。例如, Maia, De Carvalho and Ludermir (2008) 使用 AR、ARIMA 对 ITS 进行建模, 并预测了巴西石油公司的日度最高和最低股价; He et al. (2010) 使用 VECM 和 TFM 模型来预测 WTI 的高低价格; Cheung, Cheung and Wan (2009) 利用 VECM 对英国富时 100 指数的高低价格进行了预测; Rodrigues and Salish (2015) 提出了 CR-SETARX 模型来捕获区间数据的非线性特征。这些文献虽然用到了区间数据, 但本质上还是将区间数据简化为常见的点值数据进行处理, 没有基于区间型随机变量, 未能充分使用区间信息给出模型参数估计的统计性质及相应的经济解释。洪永淼和汪寿阳 (2021b) 指出对区间数据这样一类新型结构化数据建模时通常是将其转化为点值数据后使用传统计量经济学模型, 但在数据转化过程中往往伴随着信息损失, 需要新的统计模型与统计方法直接对这些数据建模。因此构建基于随机集的区间计量理论和方法来刻画区间特征是十分有意义的, 也是对传统计量经济学和统计学理论的拓展 (洪永淼, 2022)。

为充分利用区间数据信息, Han et al. (2016) 将区间数据视为不可分割的随机集, 针对多个时间序列提出了区间向量自回归移动平均 (interval-valued vector autoregressive moving average, IVARMA) 模型, 给出了参数估计方法, 建立了相应的渐近理论。该模型中的单个时间序列的区间生成过程相当于一个自回归条件区间模型 (autoregressive conditional interval, ACI)。He et al. (2021) 将 ACI 模型应用于原油市场价格的预测, 实证结果表明相比于单变量 ARMA 模型和向量误差校正模型 (VECM), ACI 模型提供了更准确的预测。为了刻画区间数据的非线性特征, Sun et al. (2018) 提出了阈值自回归区间模型 (threshold autoregressive

interval, TARI) 模型, 建立了可用于大样本下统计推断的渐进理论, 并应用于美国股市的预测. 为量化分析重大事件对金融市场的冲击, Sun et al. (2021) 提出了一般化的非线性区间模型, 给出了非线性最小二乘估计方法, 该方法可以同时评估资产收益的水平值与波动性的变化. 此外, 这些基于随机集的区间数据建模理论与方法被广泛地应用到原油市场 (Lu et al., 2022; Sun et al., 2022)、汇率市场 (Sun et al., 2020).

然而, 现有区间数据建模在金融市场的研究主要是针对区间价格预测, 并没有涉及市场风险的研究, 且对数字货币这种高波动性市场的研究较少. 因此, 为了提升对高波动性数字货币市场的风险预测, 本文提出了基于指数衰减加权自举法 (bootstrap) 的区间变量置信域构建方法, 进一步以此置信域的覆盖面积与尾部分位数作为评估数字货币市场波动率与尾部风险的新指标. 实证部分的结果表明, 第一, 相比于基于正态分布假设的区间变量置信域, 本文提出的置信域在覆盖度等指标上的预测表现更好. 第二, 相比于传统点值模型如 EWMA 模型, 区间变量置信域的覆盖面积能同时有效度量比特币价格的水平与极差的不确定性, 这增加了对日内价格波动的度量. 第三, 在尾部风险预测方面, 相比于历史模拟法和 EWMA 模型预测的在险价值, 区间变量置信域生成的尾部分位数在条件覆盖率与非条件覆盖率检验上的表现更优. 最后, 本文提出的基于指数衰减加权的 bootstrap 可以更有效地刻画市场的非正态分布与时变性的特征.

本文的贡献主要如下: 第一, 现有文献将区间视为不可分割的随机集, 其分布具体形式难以简单刻画, 因此, 本文提出了自适应的区间变量置信域构建方法, 以刻画区间变量的不确定性与内部相关性. 第二, 本文提出的指数衰减加权 bootstrap 方法来控制区间型残差的抽取概率, 相较于以往的等权重方法, 可以给最近的观测值分配更大的权重, 从而更有效地刻画金融时间序列的时变性、波动集聚性的特征. 第三, 本文从区间数据的角度提供了度量金融市场波动性与尾部风险的新方法, 相比点值数据模型包含更多信息, 提高了风险估计的准确性, 相比依赖高频数据的模型则降低了建模估计的成本.

本文余下部分安排如下: 第二节是区间变量置信域构建的模型方法, 以及对比模型和对比指标的选择; 第三节是针对比特币市场实证分析, 评估了区间变量置信域覆盖度、市场波动度量以及尾部风险预测的效果; 第四节总结全文.

2 模型和方法

2.1 ACI 模型

在介绍 ACI 模型之前, 首先需要介绍拓展区间型随机变量的定义 (Han et al., 2016). 假设 Y 是一个拓展区间型随机变量, 它被定义为概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的一个可测映射, 即 $Y: \Omega \rightarrow I_R$, 其中 I_R 是实数域 R 上所有有序数对构成的集合. 根据定义, 对任意 $\omega \in \Omega$, 有 $Y(\omega) = [Y_L(\omega), Y_R(\omega)]$.

ACI (p, q) 模型本质上是基于点值数据的自回归移动平均模型 ARMA (p, q) 模型在区间数据上的扩展 (He et al., 2021). ACI (p, q) 模型是对区间时间序列的条件均值建模, 将线性时间序列模型从点值变量拓展到取值为集合型的区间随机变量, 从而研究区间整体的演变过程. 其具体形式如下:

$$Y_t = \alpha_0 + \beta_0 I_0 + \sum_{j=1}^p \beta_j Y_{t-j} + \sum_{j=1}^q \gamma_j u_{t-j} + u_t, \tag{1}$$

其中, $\alpha_0, \beta_j (j = 0, \dots, p), \gamma_j (j = 0, \dots, q)$ 为待估计的参数, I_0 为单位区间 $[-0.5, 0.5]$, $\alpha_0 + \beta_0 I_0$ 为区间截距项, u_t 为区间残差. Y_t 为拓展随机区间, 可表示为 $Y_t = (Y_{L,t}, Y_{R,t})'$ 或 $Y_t = (Y_{m,t}, Y_{r,t})'$, 其中, $Y_{L,t}, Y_{R,t}$ 为区间的左、右端点, $Y_{m,t}, Y_{r,t}$ 为区间的中点与极差. 值得注意的是, 与 Kaucher (1980) 的定义一致, 拓展随机区间允许区间的左端点大于右端点, 以更好地适应金融数据的建模过程 (Han et al., 2016). 例如, 在研究家庭内部工资中, 由妻子和丈夫的收入构成的家庭工资区间, 区间的左端点 (即妻子收入) 不一定小于右端点 (即丈夫收入); 在资本资产定价模型中, 由无风险利率和投资组合收益率构成资产价格区间, 区间的左端点 (即无风险利率) 不一定小于右端点 (即投资组合收益率). ACI 模型可以捕捉一些经济和金融中的典型特征事实, 如波动聚类、杠杆效应等特征.

估计方法方面, 本文采用了最小 D_K 距离估计方法 (Sun et al., 2018), 来估计上述区间数据模型的参数. 假设区间数据回归模型的参数向量为 $\theta = (\alpha_0, \beta_0, \dots, \beta_p, \gamma_1, \dots, \gamma_q)'$, 那么基于集合型区间样本, 最小化拓展随机区间残差项的平方和, 从而得到模型参数估计, 即:

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta \in \Theta} \sum_{t=1}^T q_t(\theta), \tag{2}$$

其中, $q_t(\theta) = \|Y_t - Z_t' \theta\|_K^2 = D_K^2(Y_t, Z_t' \theta)$ 为区间残差项基于 D_K 距离的平方, Z_t 为相应于参数向量 θ 的解释区间向量. $D_K^2(A, B)$ 表示区间 $A = [A_L, A_R]$ 与 $B = [B_L, B_R]$ 之间的 D_K 距离的平方:

$$D_K^2(A, B) = d' \mathbf{K} d, \tag{3}$$

其中, $d = (A_R - B_R, -(A_L - B_L))'$, \mathbf{K} 是一个 2×2 的矩阵, $\mathbf{K}_{11} = K(1, 1), \mathbf{K}_{22} = K(-1, -1), \mathbf{K}_{12} = \mathbf{K}_{21} = K(1, -1) = K(-1, 1)$. 我们假设 $K(u, v)$ 是一个对称的正定加权函数, 使得对于 $u, v \in S^0 = \{u \in R^1, |u| = 1\} = \{1, -1\}$:

$$\begin{cases} K(1, 1) > 0, K(1, -1) = K(-1, 1), \\ K(1, 1)K(-1, -1) > K(1, -1)^2. \end{cases} \tag{4}$$

2.2 区间变量置信域

2.2.1 基于指数衰减加权 bootstrap 的置信域

现有文献将区间视为不可分割的随机集, 其分布具体形式难以简单刻画, 因此, 本文基于 ACI 模型, 提出了预测区间型数据置信域的自适应方法. 基于 ACI 模型, 本文采用 Fresoli, Ruiz and Pascual (2015) 提出的向前 bootstrap 法获得 Y_{T+h} 的 bootstrap 预测值, 进而根据该 bootstrap 预测值的分布情况, 构建区间值变量的联合置信域. 其次, 数字货币市场的波动率较大, 通常具有时变性的特征, 较长的估计窗口可以保证模型参数估计的准确性, 但也会由于包含更多数据, 使得较新的信息权重较小, 因此无法快速反应市场近期的特征. 为了解决该问题, 本文在 bootstrap 抽取的区间型残差项时, 通过指数衰减加权的方式给予近期数据更高的权重.

以 ACI $(p, 0)$ 模型为例, 基于指数衰减加权的 bootstrap 算法步骤如下:

Step 1: 在确定了模型阶数 p 后, 通过最小 D_K 距离估计方法得到 ACI 模型的估计参数和相应的残差估计值序列 $\{\hat{u}_m\}$, 其中, $\hat{u}_m = (\hat{u}_{L,m}, \hat{u}_{R,m})'$, $m = p, \dots, T$;

Step 2: 为了给最近的观测值分配更大的权重, 本文使用指数衰减函数来控制区间型残差的抽取概率, 具体的抽取概率函数为:

$$w_{\hat{u}_m} = (1 - \lambda) * \lambda^{(T-m)}, \quad (5)$$

其中, $w_{\hat{u}_m}$ 是抽取到 \hat{u}_m 的概率权重, λ 是衰减因子, 取值在 0 到 1 之间, T 是估计窗口长度, m 是 \hat{u}_m 对应的时刻, $\lambda^{(T-m)}$ 表示通过将衰减因子的指数形式来计算递减权重. $w_{\hat{u}_m}$ 随时间 m 的增大而增大, 即在给定的时间窗口内, 近期的观测值将具有较大的权重, 而早期的观测值具有较小的权重. 较小的衰减因子则会导致权重随时间减小得更快, 从而会使得近期的观测值具有更大的权重.

在重构区间型残差的抽取概率后, 本文根据以下规则构造一个 bootstrap 序列 $\{Y_1^*, \dots, Y_T^*\}$:

$$Y_t^* = \hat{\alpha}_0 + \hat{\beta}_0 I_0 + \hat{\beta}_1 Y_{t-1}^* + \dots + \hat{\beta}_p Y_{t-p}^* + \hat{u}_t^*, \quad t = 1, \dots, T, \quad (6)$$

其中, 对于每一个区间型残差项 \hat{u}_t^* , 均依据 (5) 式的概率权重 $w_{\hat{u}_m}$ 从序列 $\{\hat{u}_m\}$ 中进行随机抽取, 即 $P\{\hat{u}_t^* = \hat{u}_m\} = w_{\hat{u}_m}$, P 为抽取概率. 当 $t = -1 + p, \dots, 0$ 时, $\hat{Y}_t^* = Y_t$. 利用 bootstrap 生成值 $\{Y_1^*, \dots, Y_T^*\}$ 以及最小 D_K 距离估计方法, 得到 ACI 模型的 bootstrap 参数值 $\hat{\theta}^* = (\hat{\alpha}_0^*, \hat{\beta}_0^*, \hat{\beta}_1^*, \dots, \hat{\beta}_p^*)$.

Step 3: 使用等式 (1) 中的模型, 固定原始序列的最后 p 个观测值, 即对于 $h \leq 0$ 的 $\hat{Y}_{T+h|T}^*$, 令 $\hat{Y}_{T+h|T}^* = Y_{T+h}$, 并用其 bootstrap 参数估计值代替上式的参数, 通过递归获得 Y_{T+h} 的新 bootstrap 值, 如下所示:

$$\hat{Y}_{T+h|T}^* = \hat{\alpha}_0^* + \hat{\beta}_0^* I_0 + \hat{\beta}_1^* \hat{Y}_{T+h-1|T}^* + \dots + \hat{\beta}_p^* \hat{Y}_{T+h-p|T}^* + \hat{u}_{T+h}^*, \quad (7)$$

其中, \hat{u}_{T+h}^* 为依据 (5) 式的概率权重 $w_{\hat{u}_m}$ 从序列 $\{\hat{u}_m\}$ 中随机抽取的区间型残差项;

Step 4: 将 Step2 与 Step3 重复 B 次.

Step 5: 构建 bootstrap 置信域.

首先, 根据 bootstrap 预测值可以进一步生成置信椭圆 (bootstrap ellipse, 简称 BE), 置信度为 $100(1 - \alpha)\%$ 的 BE 为:

$$BE_{T+h} = [Y_{T+h} | [Y_{T+h} - \bar{Y}_{T+h|T}^*]' S_{Y^*}(h)^{-1} [Y_{T+h} - \bar{Y}_{T+h|T}^*] \leq q_{1-\alpha}^*], \quad (8)$$

其中, $\bar{Y}_{T+h|T}^*$ 为 bootstrap 生成 $Y_{T+h|T}^{*(b)}$ 样本的平均数, $S_{Y^*}(h)$ 为相应的样本协方差矩阵, $q_{1-\alpha}^*$ 为二次型 $[Y_{T+h|T}^{*(b)} - \bar{Y}_{T+h|T}^*]' S_{Y^*}(h)^{-1} [Y_{T+h|T}^{*(b)} - \bar{Y}_{T+h|T}^*]$ 经验分布的 $100(1 - \alpha)\%$ 分位数.

其次, 基于 Lütkepohl (1991) 所提出的 Bonferroni 矩形 (Bonferroni rectangle, 简称 BR) 构造预测置信域, 该方法比较简单, 在实际应用中也较广泛. 基于 bootstrap 方法置信度为 $100(1 - \alpha)\%$ 的 BBR 区域顶点如下:

$$\begin{aligned} [b_{R,\frac{\alpha}{4}}, b_{R,1-\frac{\alpha}{4}}] &\equiv [\hat{y}_{R,T+h|T}^{*(\alpha/4)}, \hat{y}_{R,T+h|T}^{*(1-\alpha/4)}], \\ [b_{L,\frac{\alpha}{4}}, b_{L,1-\frac{\alpha}{4}}] &\equiv [\hat{y}_{L,T+h|T}^{*(\alpha/4)}, \hat{y}_{L,T+h|T}^{*(1-\alpha/4)}], \end{aligned} \tag{9}$$

其中, $\hat{y}_{i,T+h|T}^{*(\alpha/4)}$ 与 $\hat{y}_{i,T+h|T}^{*(1-\alpha/4)}$ ($i = L, R$) 分别是 bootstrap 生成的区间变量经验分布的下 $\alpha/4$ 分位数与上 $\alpha/4$ 分位数. 为了包括区间变量内部同时期的线性相关性, BBR 可以参考 Fresoli, Ruiz and Pascual (2015) 的方式进行修正, 得到修正后的 Bonferroni 矩形置信域 (modified bootstrap Bonferroni rectangle, 简称 MBBR). 修正后的矩形的顶点如下所示:

$$\begin{aligned} [b_{L,\frac{\alpha}{4}}, b_{R,\frac{\alpha}{4}} + p_h b_{L,\frac{\alpha}{4}}], & [b_{L,\frac{\alpha}{4}}, b_{R,1-\frac{\alpha}{4}} + p_h b_{L,\frac{\alpha}{4}}], \\ [b_{L,1-\frac{\alpha}{4}}, b_{R,\frac{\alpha}{4}} + p_h b_{L,1-\frac{\alpha}{4}}], & [b_{L,1-\frac{\alpha}{4}}, b_{R,1-\frac{\alpha}{4}} + p_h b_{L,1-\frac{\alpha}{4}}], \end{aligned} \tag{10}$$

式中的 $p_h = S_{Y^*,21}/S_{Y^*,11}$.

2.2.2 对比模型

针对区间随机变量的置信域, 本文选择了正态假设条件下的置信域作为对比模型. 假设区间序列的二元变量服从二元正态分布, 那么按点进行的联合密度预测如下:

$$Y_{T+h} \rightarrow N(\hat{Y}_{T+h|T}, \hat{W}_h). \tag{11}$$

则置信度为 $100(1-\alpha)\%$ 的 Y_{T+h} 的 h 步向前预测的置信椭圆 (normal ellipse, 简称 NE) 为:

$$NE_{T+h} = [Y_{T+h} | [Y_{T+h} - \hat{Y}_{T+h|T}] \widehat{W}_h^{-1} [Y_{T+h} - \hat{Y}_{T+h|T}] \leq q_{1-\alpha}], \tag{12}$$

其中, $q_{1-\alpha}$ 是自由度为 2 的卡方分布的 $100(1-\alpha)\%$ 分位数.

其次基于正态分布的 Bonferroni 矩形 (Bonferroni rectangle, 简称 BR) 构造置信度为 $100(1-\alpha)\%$ 的预测置信域, 顶点如下:

$$\begin{aligned} [b'_{R,\frac{\alpha}{4}}, b'_{R,1-\frac{\alpha}{4}}] &\equiv [\hat{y}_{R,T+h|T} - z_{\alpha/4} \sqrt{\widehat{W}_{h,11}}, \hat{y}_{R,T+h|T} + z_{\alpha/4} \sqrt{\widehat{W}_{h,11}}], \\ [b'_{L,\frac{\alpha}{4}}, b'_{L,1-\frac{\alpha}{4}}] &\equiv [\hat{y}_{L,T+h|T} - z_{\alpha/4} \sqrt{\widehat{W}_{h,22}}, \hat{y}_{L,T+h|T} + z_{\alpha/4} \sqrt{\widehat{W}_{h,22}}]. \end{aligned} \tag{13}$$

其中 $z_{\alpha/4}$ 是标准正态分布的 $\alpha/4$ 分位数. 同样地, 可以采用 Fresoli, Ruiz and Pascual (2015) 对该置信域进行修正, 修正后的矩形的顶点如下所示:

$$\begin{aligned} [b'_{L,\frac{\alpha}{4}}, b'_{R,\frac{\alpha}{4}} + p'_h b'_{L,\frac{\alpha}{4}}], & [b'_{L,\frac{\alpha}{4}}, b'_{R,1-\frac{\alpha}{4}} + p'_h b'_{L,\frac{\alpha}{4}}], \\ [b'_{L,1-\frac{\alpha}{4}}, b'_{R,\frac{\alpha}{4}} + p'_h b'_{L,1-\frac{\alpha}{4}}], & [b'_{L,1-\frac{\alpha}{4}}, b'_{R,1-\frac{\alpha}{4}} + p'_h b'_{L,1-\frac{\alpha}{4}}], \end{aligned} \tag{14}$$

其中 $p'_h = \widehat{W}_{h,21}/\widehat{W}_{h,11}$. 尽管修正后的 Bonferroni 矩形 (modified Bonferroni rectangle, 简称 MBR) 的面积与 BR 的面积相同, 但其覆盖范围可能会略有不同, 具体取决于 p'_h 值的大小和符号.

2.3 对比准则

2.3.1 置信域对比指标

为了对比不同置信域在预测时的覆盖情况, 本文参考 Gonzalez-Rivera, Luo and Ruiz (2020) 选取了六个指标. 第一个是平均覆盖度 $C_{(1-\alpha)}$ (简称为 C), 假设构造了 h 步向前预测的置信域, 从 $t = 1, \dots, N$ 开始计算, 置信度为 $100(1 - \alpha)\%$ 的平均覆盖度定义如下:

$$C_{(1-\alpha)} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N I_t^{(1-\alpha)}, \quad (15)$$

其中 $I_t^{(1-\alpha)}$ 是一个指示变量, 如果实际的数据在预测置信域内, 则 $I_t^{(1-\alpha)}$ 等于 1, 否则等于 0, 因此该指标越接近 $100(1 - \alpha)\%$ 越好.

第二个是置信域的平均覆盖面积 $V_{(1-\alpha)}$ (简称为 V), 可以用来反映预测置信域的大小:

$$V_{(1-\alpha)} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N V_t^{(1-\alpha)}, \quad (16)$$

其中 $V_t^{(1-\alpha)}$ 是 t 时刻置信度为 $100(1 - \alpha)\%$ 预测区域的覆盖面积.

第三个指标是条件覆盖面积 $CV_{(1-\alpha)}$ (简称为 CV), 该指标将置信域覆盖情况与面积结合起来, 来选择同等覆盖度水平下面积较小的置信域 (Golestaneh et al., 2018):

$$CV_{(1-\alpha)} = \left| \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left[I_t^{(1-\alpha)} - (1 - \alpha) \right] \times \left[V_t^{(1-\alpha)} \right]^{\frac{1}{2}} \right|. \quad (17)$$

第四个指标是置信域投影的平均长度 $P_{(1-\alpha)}$ (简称为 P), 该指标通过将二维的置信域投影到一维区间时所产生的区间的长度情况来评估预测区域. 本文选择了 $[0, \pi]$ 内多个方向进行映射投影. 对于每个方向, 本文计算了该方向上置信域投影的长度. 预测置信域的投影区间的平均长度为:

$$P_{(1-\alpha)} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N P_t, \quad (18)$$

其中, P_t 是在 t 时刻所有方向上的平均投影长度, $P_t = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^D (u_{d_i} - l_{d_i})$, D 表示方向的个数, u_{d_i} 和 l_{d_i} 是第 i 个方向上投影区间的上界和下界, $P_{(1-\alpha)}$ 越小越好.

第五个指标 $OP_{(1-\alpha)}$ (简称为 OP) 考虑了当预测失败时, 真实值到置信域投影的平均距离:

$$OP_{(1-\alpha)} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N OP_t, \quad (19)$$

其中 OP_t 是真实值到置信域投影后一维区间的平均距离, 由 $OP_t = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^D [(l_{d_i} - x_{d_i})I(x_{d_i} < l_{d_i}) + (x_{d_i} - u_{d_i})I(x_{d_i} > u_{d_i})]$ 得到, 其中 x_{d_i} 是投射在第 i 个方向上的真实数据点的坐标, $I(\cdot)$ 是指示函数, $OP_{(1-\alpha)}$ 越小越好.

第六个指标 $POP_{(1-\alpha)}$ (简称为 POP) 权衡了 $P_{(1-\alpha)}$ 与 $OP_{(1-\alpha)}$. 如果置信域投影区间的长度过大, 也会导致预测失败时真实值到置信域投影的距离变小. 因此本文也使用了

Gonzalez-Rivera, Luo and Ruiz (2020) 的组合准则, 将 P_t 与 OP_t 结合, 从而得到权衡 $P_{(1-\alpha)}$ 与 $OP_{(1-\alpha)}$ 后的指标:

$$POP_{(1-\alpha)} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N POP_t, \quad (20)$$

其中, $POP_t = P_t \times OP_t$, 该指标越小越好.

2.3.2 VaR 的回测检验方法

在检验 VaR 的预测效果时, 本文选取了六种常用的 VaR 回测检验 (backtesting) 方法, 包括失败率检验 (proportion of failures tests, POF)、条件覆盖率混合检验 (conditional coverage mixed test, CC)、条件覆盖率独立性检验 (conditional coverage independence test, CCI)、失败间隔时间混合检验 (time between failures mixed test, TBF) 与失败间隔时间独立性检验 (time between failures independence test, TBFI).

1) 非条件覆盖率检验

最常用的非条件覆盖率检验是 POF 检验 (proportion of failures), 检验预测失败的数量是否与置信水平一致. 实际损失超过 VaR 的估计记为失败, 实际损失低于 VaR 的估计记为成功. POF 检验的零假设是:

$$H_0: p = \hat{p} = \frac{x}{T}, \quad (21)$$

POF 检验的似然比 (LR) 为:

$$LR_{POF} = -2 \ln \left(\frac{(1-p)^{T-x} p^x}{\left[1 - \left(\frac{x}{T}\right)\right]^{T-x} \left(\frac{x}{T}\right)^x} \right), \quad (22)$$

其中, T 是观测次数, x 是失败次数, p 是置信水平. 在模型正确的零假设下, LR_{POF} 服从自由度为一的渐近 χ^2 分布. 如果 LR_{POF} 统计的值超过 χ^2 分布的临界值, 则零假设将被拒绝, 即该模型的预测是不准确的.

2) 条件覆盖率检验

条件覆盖率检验了 VaR 预测失败之间的相关性. 如果模型是准确的, 那么当天的预测失败不应该取决于前一天是否失败, 即在零假设下, π_0 和 π_1 的概率应该相等. CCI 检验的统计量为:

$$LR_{CCI} = -2 \ln \left(\frac{(1-\pi)^{n_{00}+n_{10}} \pi^{n_{01}+n_{11}}}{(1-\pi_0)^{n_{00}} \pi_0^{n_{01}} (1-\pi_1)^{n_{10}} \pi_1^{n_{11}}} \right), \quad (23)$$

其中, n_{00} 是第 $t-1$ 天预测成功且第 t 天预测成功的次数; n_{01} 是第 $t-1$ 天预测成功且第 t 天预测失败的次数; n_{10} 是第 $t-1$ 天预测失败且第 t 天预测成功的次数; n_{11} 是第 $t-1$ 天预测失败且第 t 天预测失败的次数. $\pi_0 = \frac{n_{01}}{n_{00}+n_{01}}$, 即在前一天预测成功时, 当天预测失败的条件概率; $\pi_1 = \frac{n_{11}}{n_{10}+n_{11}}$, 即在前一天预测失败时, 当天预测失败的条件概率; $\pi = \frac{n_{01}+n_{11}}{n_{00}+n_{01}+n_{10}+n_{11}}$, 即预测失败的概率.

通过将该独立性检验统计量与 POF 检验统计量相结合可以得到一个联合检验, 可以综合检验 VaR 模型的两个属性, 即预测的失败率和失败的独立性, 因此 CC 检验的统计量为:

$$LR_{CC} = LR_{POF} + LR_{CCI}, \quad (24)$$

LR_{CC} 服从 χ^2 分布, 如果 LR_{CC} 统计量的值低于 χ^2 分布的临界值, 则模型通过测试, 否则会导致模型被拒绝.

另一种独立性检验是从预测失败的时间间隔角度出发, 如果实际损失发生的时间间隔独立于先前的损失事件, 说明损失事件之间的时间模式不受以前的损失影响, 这符合风险管理的假设, 即市场风险的发生应该是随机的. 零假设是预测失败情况彼此独立. 在预测失败的次数为 n 的情况下, TBF1 检验的统计量为:

$$LR_{TBF1} = \sum_{i=2}^n \left[-2 \ln \left(\frac{p(1-p)^{v_{i-1}}}{\left(\frac{1}{v_i}\right) \left(1 - \frac{1}{v_i}\right)^{v_{i-1}}} \right) \right] - 2 \ln \left(\frac{p(1-p)^{v-1}}{\left(\frac{1}{v}\right) \left(1 - \frac{1}{v}\right)^{v-1}} \right), \quad (25)$$

其中, v_i 是第 i 和 $i-1$ 次失败之间的时间间隔, LR_{TBF1} 是服从自由度为 n 的卡方分布的统计量. TBF1 检验可以与 POF 检验相结合, 以获得独立性和覆盖性的混合测试, 即失败间隔时间混合检验:

$$LR_{TBF} = LR_{POF} + LR_{TBF1}, \quad (26)$$

其中, LR_{TBF} 是服从自由度为 $n+1$ 的卡方分布的统计量.

3 实证分析

3.1 数据描述

本文收集了从 2017 年 1 月 1 日至 2023 年 8 月 21 日期间, 共 2424 个交易日比特币的日度最低价 L_t 与最高价 H_t , 数据来源于 CoinMarketCap 网站. 表 1 展示了样本期间比特币最低价、最高价和收盘价的描述性统计信息. 可以发现, 样本期内比特币价格的波动较大, 收盘价、最高价与最低价的样本标准差均在 16000 左右, 尤其是在 2019 年后比特币的交易量上升的阶段, 日度价格跌幅最大达到 39%, 这说明其该市场的波动风险较大. 同时, 尽管图 1 显示比特币日度最低价与最高价在大部分时间的走势相似, 但从方差、峰度等指标上可以看出, 比特币的高、低价与收盘价具有不同的特征.

3.2 区间变量置信域的覆盖度

本文使用比特币的日度最低价 (L_t) 与最高价 (H_t) 计算的对数收益率组成的区间变量 $Y_t = (\log \frac{L_t}{L_{t-1}}, \log \frac{H_t}{H_{t-1}})$ 进行建模, 该区间样本满足 D_K 弱平稳性. 本文采用一步向前滚动

表 1 比特币日度最低价与最高价描述性统计

| | 最低价 | 最高价 | 收盘价 |
|-----|------------|------------|------------|
| 平均值 | 17908.5813 | 18900.4021 | 18440.1726 |
| 标准差 | 15681.8889 | 16574.5631 | 16154.98 |
| 峰度 | 0.1266 | 0.105 | 0.1188 |
| 偏度 | 1.0777 | 1.0786 | 1.0788 |
| 最小值 | 739.5 | 826.4 | 785.4 |
| 最大值 | 66334.9 | 68990.6 | 67527.9 |
| 观测数 | 2424 | 2424 | 2424 |

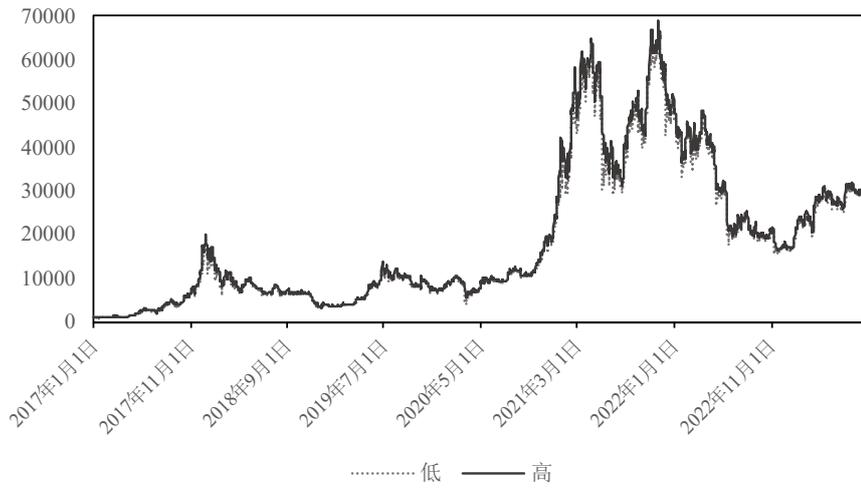


图 1 比特币日度最低价与最高价时序图

预测的方式, ACI (1, 0) 估计的滚动窗口为 500, bootstrap 的重复次数为 2000 次, 置信域的置信度为 95% 和 99%. 本节主要从覆盖情况上, 将本文提出的 bootstrap 置信域与基于正态分布的置信域进行对比, 因此本节在 bootstrap 抽取残差时采用等概率的方式. 图 2 展示了其中一天区间变量的 bootstrap 的预测点以及置信域的情况.

表 2 的 Panel A 展示了在 95% 的置信度下, 各置信域的指标对比情况. 首先, 在 95% 的置信度下, bootstrap 类置信域优于正态类置信域. 具体而言, 从实际覆盖度 C 来看, 尽管所有的置信域的实际覆盖情况都存在不同程度的低估或高估, 但 bootstrap 类置信域相较于

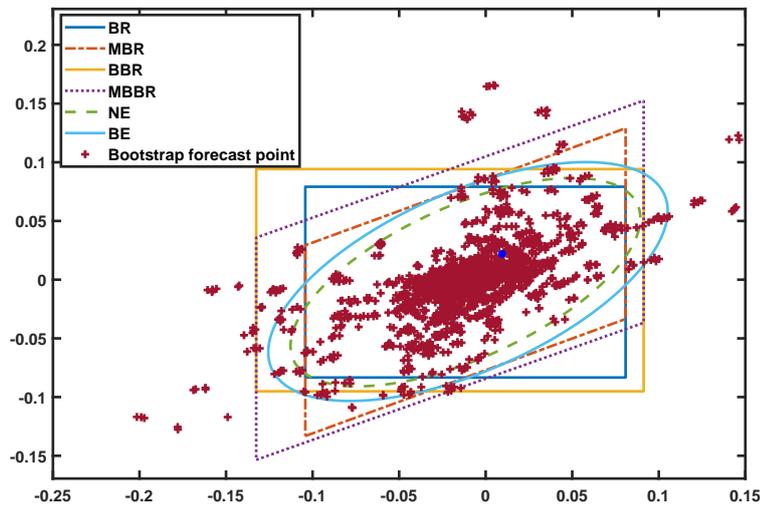


图 2 95% 置信度下置信域与 bootstrap 生成点

表2 置信域对比指标

| | C | V | CV | P | OP | POP |
|----------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---|---|
| Panel A: 95% 置信度下的对比 | | | | | | |
| BE | 0.9506 | 0.1673 | 0.0157 | 0.2056 | 8.32×10^{-4} | 1.67×10^{-4} |
| BBR | 0.9475 | 0.2025 | 0.0186 | 0.2589 | 5.60×10^{-4} | 1.43×10^{-4} |
| MBBR | 0.9529 | 0.2025 | 0.0168 | 0.2747 | 4.54×10^{-4} | 1.24×10^{-4} |
| NE | 0.9433 | 0.1598 | 0.017 | 0.1963 | 9.54×10^{-4} | 1.79×10^{-4} |
| BR | 0.9412 | 0.1823 | 0.0194 | 0.2328 | 7.61×10^{-4} | 1.69×10^{-4} |
| MBR | 0.9532 | 0.1823 | 0.0176 | 0.2463 | 6.00×10^{-4} | 1.40×10^{-4} |
| Panel B: 99% 置信度下的对比 | | | | | | |
| BE | 0.9891 | 0.2824 | 0.0055 | 0.3462 | 2.33×10^{-4} | 6.76×10^{-5} |
| BBR | 0.9813 | 0.3091 | 0.0083 | 0.3986 | 2.16×10^{-4} | 8.27×10^{-5} |
| MBBR | 0.9849 | 0.3091 | 0.0074 | 0.4229 | 1.88×10^{-4} | 7.78×10^{-5} |
| NE | 0.9709 | 0.1982 | 0.0075 | 0.2434 | 5.74×10^{-4} | 1.32×10^{-4} |
| BR | 0.9709 | 0.2282 | 0.0086 | 0.2915 | 4.41×10^{-4} | 1.21×10^{-4} |
| MBR | 0.9771 | 0.2282 | 0.0073 | 0.3084 | 3.62×10^{-4} | 1.04×10^{-4} |

正态类置信域更接近 95%，如 BE 相比 NE 而言，预测的准确性提升了 91%²。从平均面积 V 与条件覆盖面积 CV 来看，尽管 bootstrap 类置信域相比正态类置信域的平均面积都更大，但由于前者的实际覆盖度更好，因此 bootstrap 类置信域的条件覆盖面积 CV 相较于正态类置信域更小，即 bootstrap 类置信域在确保覆盖度更接近 95% 的前提下减小了平均面积。从指标 P、OP 与 POP 来看，bootstrap 类置信域的 P 指标相较于正态类置信域更大，这也是由于前者的覆盖范围更大导致的；但 bootstrap 类置信域的指标 OP 更小，说明在预测失败时（没有覆盖到实际值），实际值距离 bootstrap 类置信域更近；而较小的 POP 指标则说明 bootstrap 类置信域在确保预测失败时实际值到置信域投影距离更近的前提下，减小了置信域投影的长度。

其次，bootstrap 类置信域中，椭圆域 BE 与 Bonferroni 类置信域在不同的指标上表现有所差异。BE 在实际覆盖度 C、平均覆盖面积 V、条件覆盖面积 CV 以及平均投影长度 P 上的表现，均优于 Bonferroni 类置信域（BBR 与 MBBR），而在指标 OP 与 POP 上的表现，则是 Bonferroni 类置信域的预测表现更好。这说明一般而言 BE 的预测效果是较好的，但在一些极端情况导致预测失败时，Bonferroni 类置信域的表现则会更好。结合图 2 可以看到，Bonferroni 类置信域覆盖的范围更大，这有利于覆盖一些实际中比特币区间价格发生结构性突变的情况；但同时也会导致大部分情况下，Bonferroni 类置信域相比 BE 置信域而言，覆盖面积 V 与条件覆盖面积 CV 是过大的，因此 Bonferroni 类置信域不是更有效的。

最后，Bonferroni 类置信域中，经修正的 Bonferroni 置信域（MBR 与 MBBR），相较于原本的 Bonferroni 置信域（BR 与 BBR），有相同的覆盖面积 V，但在指标 CV、OP 与 POP 上有所提升，这是因为修正的 Bonferroni 置信域捕捉到区间变量内部的相关性。这一点也可

²BE 与置信度的差 = $|95.06\% - 95\%| = 0.06\%$ ，NE 与置信度的差 = $|94.33\% - 95\%| = 0.67\%$ 。BE 相比于 NE 的相对差为 $|0.06\% - 0.67\%| / 0.67\% * 100\% = 91\%$ 。

以结合图 2 得到, 修正的 Bonferroni 置信域相较于未修正的 Bonferroni 置信域有所倾斜, 以反映区间变量内部的相关性。

表 2 的 Panel B 中展示了 99% 置信度下, 各置信域的指标对比情况。首先, 可以发现, 在 99% 置信度下, 各置信域的实际覆盖度均有不同程度的低估, 但 bootstrap 类置信域相较于正态类置信域仍更接近设定的置信度 99%。其次, 与 95% 置信度下的结果一致, bootstrap 类置信域整体而言更优于正态类置信域, 这是因为 bootstrap 类置信域有更小的 CV、OP 与 POP。最后, 与 95% 置信度的结果有差异的是, 99% 置信度设定下, bootstrap 类置信域中, 置信域 BE 在指标 POP 上的表现优于另外两种 Bonferroni 置信域。这是因为 99% 置信度下, 置信域 BE 的指标 P 相比 Bonferroni 类置信域大幅减小, 即在确保预测失败时实际值到置信域投影距离更近的前提下, 减小了置信域投影的长度。

3.3 比特币价格波动性度量

相比点值数据, 区间值数据包含了比特币在一个时间段内的最高价和最低价, 这意味着区间值数据包含了更多的信息 (洪永淼, 2021), 可以更好地反映比特币的价格水平与波动情况。例如, 当不同两个交易日的比特币收盘价相同时, 它们的极差 (即最高价与最低价的差) 很可能存在较大差异, 难以用点值模型刻画极差的差异性, 而区间数据建模可以同时刻画水平和极差波动特征。进一步, 基于 bootstrap 生成区间变量的置信域既包含了过去比特币价格的波动情况, 也包含了其价格极差的波动, 可以反映价格水平与极差的不确定性 (Gonzalez-Rivera, Luo and Ruiz, 2020), 因此该类型置信域的覆盖面积更能反映比特币的总体波动。

在度量比特币波动性时, 一方面, 过于早期的样本可能与近期样本表现不一致, 增加估计偏差; 但另一方面, 样本数据量过少可能导致估计方差加大。这本质上是一个偏差和方差平衡的问题。因此, 本节采用指数衰减加权 bootstrap 方法来估计区间变量的置信域 BE, 滚动估计的时间窗口为 500, bootstrap 重复抽样的次数为 2000 次, 置信度为 95%。作为对比, 本文选取了常用的指数移动平均模型 (exponentially weighted moving average, EWMA), 以收盘价对数收益率序列来估计比特币收益率的波动率, 以极差序列估计其波动率来度量极差的不确定性, 其滚动估计窗口为 500, 衰减因子为 0.94。

图 3 以 95% 置信度、衰减因子为 0.94 的 BE 置信域为例, 对比置信域面积与比特币每日收盘价及每日极差。可以发现, 在比特币价格出现较大跌幅以及极差增大时, 置信域的覆盖面积都会快速上升, 而在波动降低的时段内又快速降低, 说明置信域可以比较灵敏地捕捉到市场上的波动信息, 并进行调整。同时, 这也反映了其覆盖面积在一定意义上可以作为比特币市场的波动情况的度量。

为了对比衰减因子的效果, 图 4 展示了 2018 年 5 月 17 日至 2019 年 12 月 31 日时段内, 无衰减因子, 以及衰减因子为 0.90、0.94 与 0.98 时 BE 置信域的覆盖面积对比图。衰减因子为 0.90、0.94 与 0.98 时, BE 的覆盖面积大致相似, 但衰减因子越大, 置信域的覆盖面积随时间变化的幅度越小, 即对市场波动性变化的反应越小。当不添加衰减因子时, 置信域的覆盖面积难以反映市场波动的变化情况。

图 5 展示了 95% 置信度下、衰减因子为 0.94 的 BE 覆盖面积, 以及 EWMA 计算的收

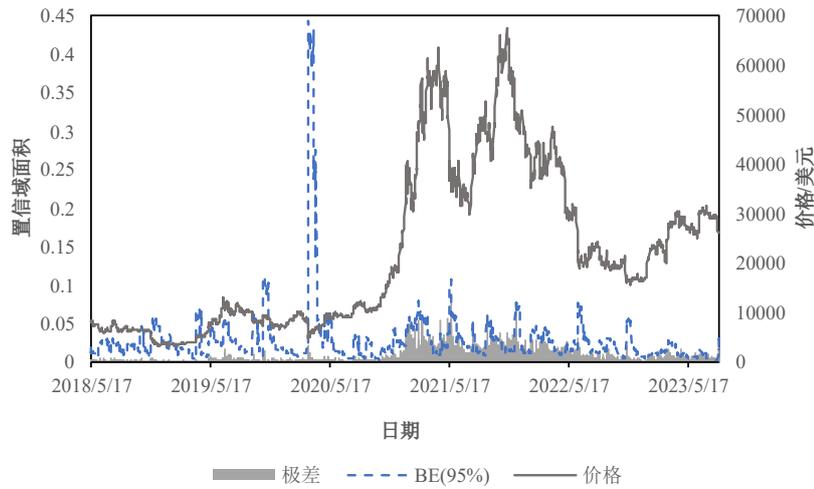
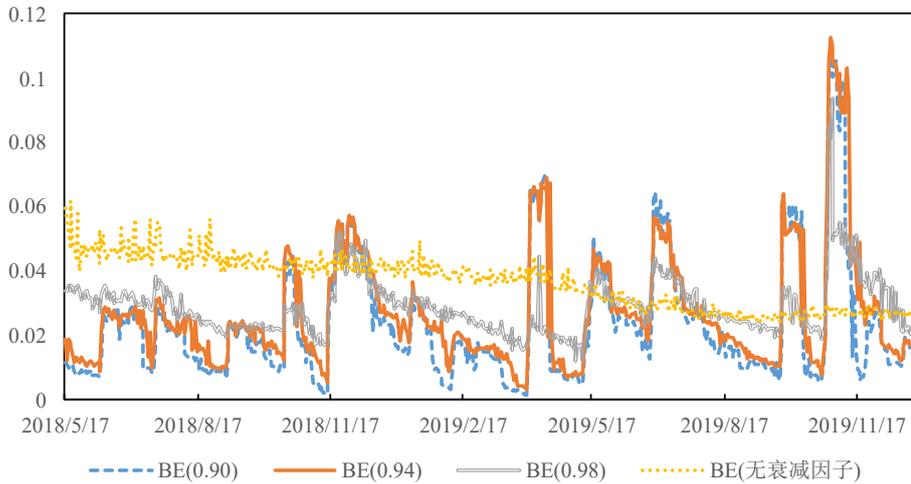


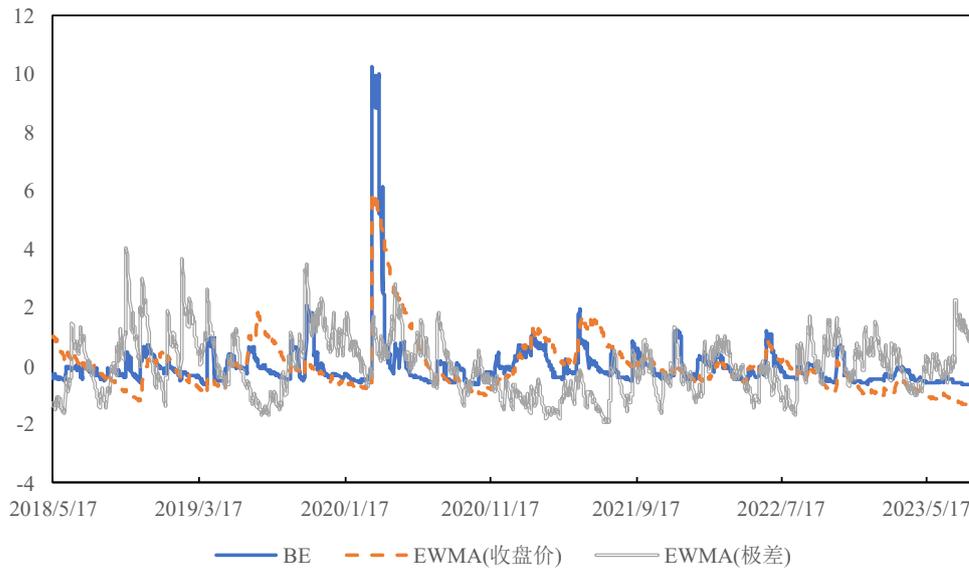
图3 置信域面积、比特币价格与极差对比



注: BE (0.90)、BE (0.94)、BE (0.98) 与 BE (无衰减因子) 分别是衰减因子为 0.90、0.94、0.98 以及无衰减因子时 BE 置信域的覆盖面积。

图4 各种衰减因子下 BE 置信域面积对比图

收益率与极差的波动率, 图中各序列值均经 z -score 方法进行标准化以便于对比. 可以发现 BE 的覆盖面积与 EWMA 计算的收益率的波动率走势相似, 并且也能捕捉到极差的波动情况, 但在一些时段内, 当极差的波动性上升时, EWMA 计算收益率的波动率并没有上升. 例如, 在 2021 年 9 月前后, 极差的波动性较大, BE 的覆盖面积迅速调整以反映该波动, 但 EWMA 计算的收益率的波动率仍处于较低水平, 没有反映该波动. 从表 3 展示三者的相关系数上也可以看出, BE 的覆盖面积与 EWMA 计算的收益率与极差的波动率具有较好的相关性, 但后二者之间的相关性较差. 总体而言, 区间变量置信域的覆盖面积能同时反映比特币价格的水平与极差的波动; 相比点值数据模型, 本文的方法增加了对日内波动风险的度量.



注: BE 为 BE 置信域的覆盖面积, EWMA (收盘价) 与 EWMA (极差) 分别是 EWMA 计算的收益率与极差的波动率, 三者均经 z-score 方法进行标准化。

图 5 区间型变量置信域覆盖面积与 EWMA 波动率对比

表 3 三种波动度量的线性相关系数

| | BE | EWMA (收盘价) | EWMA (极差) |
|------------|--------|------------|-----------|
| BE | 1.0000 | 0.7050 | 0.1432 |
| EWMA (收盘价) | 0.7050 | 1.0000 | -0.1099 |
| EWMA (极差) | 0.1432 | -0.1099 | 1.0000 |

注: BE 为置信域 BE 的覆盖面积, EWMA (收盘价) 与 EWMA (极差) 分别是 EWMA 计算的收盘价收益率的波动率以及极差的波动率。

3.4 比特币价格尾部风险度量

如前文所述, 比特币等数字货币不受交易时间与涨跌幅等限制, 且受到政策事件、投机者较多等因素的影响, 其经常显现出暴涨暴跌现象, 因此对其尾部风险进行估计具有重要意义. 设定置信度后, 在区间变量的置信域基础上, 可以得到单变量的置信下限, 该下限类似尾部分位数的思想, 可以用来度量比特币的尾部风险, 从而作为对比特币 VaR 的估计. 本文使用区间变量置信域得到最低对数收益率的置信下界, 作为最低对数收益率的 VaR, 其原因是最低对数收益率反映了极端损失的情况. 在估计一步向前预测的置信域时, 本文选取 ACI (1, 0) 的滚动估计窗宽为 500, 衰减因子为 0.94, bootstrap 次数为 2000 次, 置信度为 99%, 置信域选取了 BE、MBBR、NE 与 MBR. 为了对比不同衰减因子的效果, 本文还展示了衰减因子为 0.98 与 0.90 时置信域 BE 得到的结果. 对比模型方面, 本文选取了常用的历史模拟法 (history simulation, HS) 与 EWMA 模型来计算相应 99% 置信度下 VaR 的一步向前预测值, 其中 EWMA 模型的衰减因子为 0.94.

表4展示了各方法的实际覆盖度以及多种回测方法的检验结果,图6则展示了不同方法预测的比特币最低对数收益率 VaR 以及实际的最低对数收益率的时序图. 通过表4与图6可以得到以下结论.

第一, 衰减因子为 0.94 的 BE 通过了所有检验, 说明该方法在覆盖度以及对市场波动时变特征的捕捉方面均较好. MBBR 在 POF 检验上被拒绝, 这说明尽管其对市场上出现波动变化时的调整较为迅速, 但其实际覆盖度表现较差. NE 在检验 CC 与 CCI 上被拒绝; MBR 在检验 CCI、TBF 与 TBFI 上被拒绝; HS 在检验 TBF 与 TBFI 上被拒绝, 即这三种方法不能通过独立性检验. 这意味着尽管这三种方法的实际覆盖度接近 99%, 但在预测独立性上的表现较差, 说明预测 VaR 失败会集中出现在某段时间. 结合图6也可以看出, 这三种方法在调整预测值上较缓慢, 即在比特币市场波动特征出现变化时, 这三种方法不能很好地捕捉

表4 各方法 VaR 回测检验指标对比

| | 实际覆盖度 | POF | CC | CCI | TBF | TBFI |
|------------------|---------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| BE (0.94) | 0.9875 | 'accept' | 'accept' | 'accept' | 'accept' | 'accept' |
| BE (0.98) | 0.9943 | 'accept' | 'reject' | 'accept' | 'accept' | 'reject' |
| BE (0.90) | 0.9828 | 'reject' | 'accept' | 'reject' | 'accept' | 'accept' |
| MBBR | 0.9849 | 'reject' | 'accept' | 'accept' | 'accept' | 'accept' |
| NE | 0.9917 | 'accept' | 'reject' | 'reject' | 'accept' | 'accept' |
| MBR | 0.9891 | 'accept' | 'accept' | 'reject' | 'reject' | 'reject' |
| HS | 0.9927 | 'accept' | 'accept' | 'accept' | 'reject' | 'reject' |
| EWMA | 0.9745 | 'reject' | 'reject' | 'accept' | 'reject' | 'reject' |

注: 'reject' 表明拒绝原假设, 即该方法未通过检验; 'accept' 则表明不能拒绝原假设.

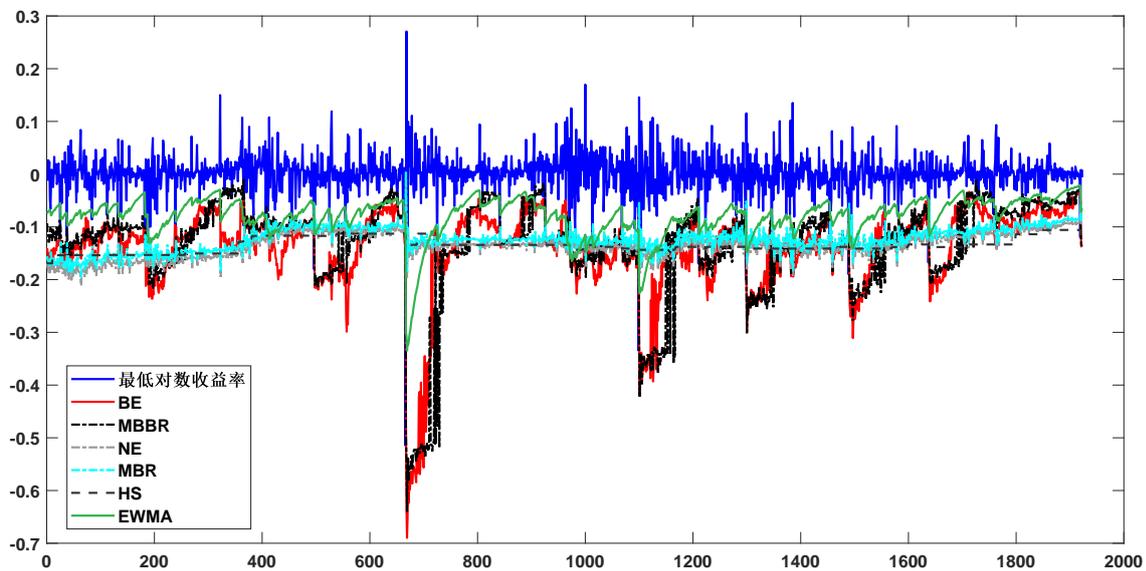


图6 VaR 预测对比图

市场当前的风险情况. EWMA 模型在检验 POF、CC、TBF 与 TBF1 上被拒绝, 表明该方法预测效果相对较差. 结合图 6 可以发现, EWMA 模型给出的预测能够比较好地适应市场波动性时变的特征, 但实际覆盖度的表现较差, 该方法在一些时刻低估了市场的尾部风险.

第二, 增加衰减因子的模型相较于等权重的模型预测效果更好; 并且本文所提的方法中衰减因子为 0.94 时预测效果更好. 首先, 由于 NE 与 MBR 两个置信域方法是等权重处理历史数据的, 而 BE 与 MBBR 则是使用了衰减因子 bootstrap 方法的置信域. 结合图 6 可以发现, 当比特币市场波动性发生变化时, BE 与 MBBR 均能做出迅速的调整, 对市场波动性的时变特征捕捉效果更好, 这说明了本文提出的基于指数衰减加权 bootstrap 方法有效地刻画了市场的时变性特征. 其次, 与 RiskMetricsTM 中选择 EWMA 衰减因子的方法类似, 本文也检验了多个衰减因子的效果, 发现衰减因子为 0.94 时回测检验的结果最好. 例如, 表 4 中展示了衰减因子为 0.94、0.98 与 0.90 的结果. 从三种衰减因子 BE 的结果来看, 衰减因子为 0.98 与 0.90 时的 BE 均被部分检验所拒绝, 并且从实际覆盖度来看, 过大或过小的衰减因子分别会高估或低估实际的尾部风险. 这是因为过大的衰减因子会使得更多的历史数据被纳入估计, 从而更加反映长期历史波动性而忽略了最近的市场风险变化; 而过小的衰减因子会使得最近的观测值权重很高, 这导致风险的估计对最近数据过度敏感, 从而可能忽视历史中高风险时期的信息, 使风险估计变得过于短视. 因此, 在选择衰减因子时, 需要权衡过去和最近观测值之间的权重.

综上所述, 根据回测检验结果, 使用衰减因子为 0.94 的区间变量 BE 置信域方法来计算一步向前预测 99% 置信度的 VaR 值, 可以更好地反映市场的尾部风险情况.

4 结论

本研究以区间型数据建模为基础, 提出了指数衰减加权 bootstrap 区间型变量置信域的构建方法, 并以置信域的覆盖面积与尾部分位数作为指标, 对比特币市场的波动情况与尾部风险进行的估计和度量, 得到以下研究结果:

1) 以比特币市场为例, 根据 bootstrap 方法构建的区间型对数收益率的置信域方法, 在覆盖度等方面表现均优于基于正态假设的置信域, 这是因为区间型对数收益率内部一般不服从正态分布. 因此, 本文提出的方法能更好地刻画市场收益率的非正态特征. 2) 置信域的覆盖面积指标, 可以更全面地度量比特币市场的波动情况. 这是因为相较于点值数据, 区间型数据既包含了价格水平信息, 又包含了价格的极差信息, 使得区间变量的置信域同时可以捕捉比特币价格的水平与极差的不确定性. 相较于之前对比特币市场的波动性预测方法, 该方法更适合此类具有高波动性特征的资产. 3) 利用区间变量置信域生成的尾部分位数, 可以较好地度量比特币市场的尾部风险. 基于指数衰减加权的 bootstrap 置信域在预测市场的 VaR 既保证了相应的覆盖度, 也使得在市场的波动性在有突发性的结构变化时, 对 VaR 的预测可以进行迅速地调整, 从而提高对尾部风险估计的准确性和稳健性.

本文为构建区间数据的置信域提出了新的方法, 为度量区间变量的不确定性提供了基础. 进一步, 基于区间型随机变量置信域的波动度量与尾部风险度量, 相比传统的点值模型有所提升, 这也为投资者提供了更多有效的管理风险的工具. 此外, 本文为后续区间数据在金融领域的应用研究提供了新框架与新视角. 值得进一步探索的研究方向, 例如将本文方法与投资

组合构建策略 (周春阳和吴冲锋, 2023)、市场间风险传染 (杨子暉, 陈雨恬和黄卓, 2023) 等方向进行更深入的整合和探讨, 以进一步为该领域提供新的研究范式。

参 考 文 献

- 陈收, 蒲石, 方颖, 陈国青, 黄丽华, 等, (2021). 数字经济的新规律 [J]. 管理科学学报, 24(8): 36-47.
Chen S, Pu S, Fang Y, Chen G Q, Huang L H, et al. (2021). The New Rules of Digital Economy[J]. Journal of Management Sciences in China, 24(8): 36-47.
- 陈阳, 费为银, 潘海峰, (2023). 基于区块链的加密代币定价研究 [J]. 计量经济学报, 3(1): 195-212.
Chen Y, Fei W Y, Pan H F, (2023). The Blockchain Crypto Token Pricing Research[J]. China Journal of Econometrics, 3(1): 195-212.
- 郭笑春, 汪寿阳, (2020). 数字货币发展的是与非: 脸书 Libra 案例 [J]. 管理评论, 32(8): 314-324.
Guo X C, Wang S Y, (2020). The Black and White of Digital Currency Development: A Case Study of Facebook Libra[J]. Management Review, 32(8): 314-324.
- 洪永淼, 汪寿阳, (2021a). 大数据、机器学习与统计学: 挑战与机遇 [J]. 计量经济学报, 1(1): 17-35.
Hong Y M, Wang S Y, (2021a). Big Data, Machine Learning and Statistics: Challenges and Opportunities[J]. China Journal of Econometrics, 1(1): 17-35.
- 洪永淼, 汪寿阳, (2021b). 大数据如何改变经济学研究范式?[J]. 管理世界, 37(10): 40-55.
Hong Y M, Wang S Y, (2021b). How Is Big Data Changing Economic Research Paradigms?[J]. Management World, 37(10): 40-55.
- 洪永淼, (2022). 概率论与统计学在经济学中的应用 [J]. 计量经济学报, 2(1): 1-18.
Hong Y M, (2022). Economic Applications of Probability and Statistics[J]. China Journal of Econometrics, 2(1): 1-18.
- 洪永淼, (2021). 理解现代计量经济学 [J]. 计量经济学报, 1(2): 266-284.
Hong Y M, (2021). Understanding Modern Econometrics[J]. China Journal of Econometrics, 1(2): 266-284.
- 姬强, 胡旻, 马嫣然, 张大永, 郭琨, (2022). 全球数字货币波动对中国金融资产的风险溢出效应研究 [J]. 管理评论, 34(2): 102-111.
Ji Q, Hu M, Ma Y R, Zhang D Y, Guo K, (2022). Risk Spillovers Between Global Cryptocurrency and Chinese Financial Assets[J]. Management Review, 2022, 34(2): 102-111.
- 李苍舒, 沈艳, (2019). 数字经济时代下新金融业态风险的识别、测度及防控 [J]. 管理世界, 35(12): 53-69.
Li C S, Shen Y, (2019). Identification, Measurement and Prevention of the Fin Tech Risk in the Digital Economy Era[J]. Management World, 35(12): 53-69.
- 吴鑫育, 谢海滨, 汪寿阳, (2020). 双因子随机条件极差模型及其实证研究 [J]. 管理科学学报, 23(1): 47-64.
Wu X Y, Xie H B, Wang S Y, (2020). Two-factor Stochastic Conditional Range Model and Its Empirical Study[J]. Journal of Management Sciences in China, 23(1): 47-64.
- 谢平, 石午光, (2015). 数字加密货币研究: 一个文献综述 [J]. 金融研究, 1: 1-15.
Xie P, Shi W G, (2015). A Literature Review of Cryptocurrency[J]. Journal of Financial Research, 1: 1-15.
- 杨子暉, 陈雨恬, 黄卓, (2023). 国际冲击下系统性风险的影响因素与传染渠道研究 [J]. 经济研究, 58(1): 90-106.
Yang Z H, Chen Y T, Huang Z, (2023). Research on Influencing Factors and Transmission Channels of Systemic Risks under International Shocks[J]. Economic Research Journal, 58(1): 90-106.

- 周春阳, 吴冲锋, (2023). 引入方差/波动率资产的动态最优投资组合 [J]. 管理科学学报, 26(1): 105–115.
Zhou C Y, Wu C F, (2023). Dynamic Optimal Portfolio Allocation with Variance/Volatility Assets[J]. Journal of Management Sciences in China, 26(1): 105–115.
- 郑挺国, 左浩苗, (2013). 基于极差的区制转移随机波动率模型及其应用 [J]. 管理科学学报, 16(9): 82–94.
Zheng T G, Zuo H M, (2013). Range Based Regime Switching Stochastic Volatility Models with Applications[J]. Journal of Management Sciences in China, 16(9): 82–94.
- 周颖刚, 纪洋, 倪晓然, 谢沛霖, (2022). 金融学的发展趋势和挑战与中国金融学的机遇 [J]. 计量经济学报, 2(3): 465–489.
Zhou Y G, Ji Y, Ni X R, Xie P L, (2022). Development Trend & Challenges of Finance Research and Opportunities of China's Finance[J]. China Journal of Econometrics, 2(3): 465–489.
- Aharon D Y, Butt H A, Jaffri A, Nichols B, (2023). Asymmetric Volatility in the Cryptocurrency Market: New Evidence from Models with Structural Breaks[J]. International Review of Financial Analysis, 87: 102651.
- Alexander C, Dakos M, (2023). Assessing the Accuracy of Exponentially Weighted Moving Average Models for Value-at-risk and Expected Shortfall of Crypto Portfolios[J]. Quantitative Finance, 23(3): 393–427.
- Billard L, Diday E, (2003). From the Statistics of Data to the Statistics of Knowledge: Symbolic Data Analysis[J]. Journal of the American Statistical Association, 98(462): 470–487.
- Brito P, (2007). Modelling and Analysing Interval Data[C]// Advances in Data Analysis: Proceedings of the 30th Annual Conference of the Gesellschaft FÜR Klassifikation Ev, Freie Universität Berlin, March 8–10, 2006. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg: 197–208.
- Brownlees C T, Gallo G M, (2010). Comparison of Volatility Measures: A Risk Management Perspective[J]. Journal of Financial Econometrics, 8(1): 29–56.
- Caporin M, Rinaldo A, De Magistris P S, (2013). On the Predictability of Stock Prices: A Case for High and Low Prices[J]. Journal of Banking and Finance, 37(12): 5132–5146.
- Cheung Y L, Cheung Y W, Wan A T K, (2009). A High-Low Model of Daily Stock Price Ranges[J]. Journal of Forecasting, 28(2): 103–119.
- Chou R Y, (2005). Forecasting Financial Volatilities with Extreme Values: The Conditional Autoregressive Range (CARR) Model[J]. Journal of Money, Credit and Banking, 37(3): 561–582.
- Cong L W, Li X, Tang K, Yang Y, (2023). Crypto Wash Trading[J]. Management Science, 69(11): 6427–6454.
- Cong L W, Li Y, Wang N, (2021). Tokenomics: Dynamic Adoption and Valuation[J]. Review of Financial Studies, 34(3): 1105–1155.
- Fresoli D, Ruiz E, Pascual L, (2015). Bootstrap Multi-step Forecasts of Non-Gaussian VAR Models[J]. International Journal of Forecasting, 31(3): 834–848.
- Glenn N, Reed R, (2024). Cryptocurrency, Security, and Financial Intermediation[J]. Journal of Money, Credit and Banking, 56(1): 185–223.
- Gonzalez-Rivera G, Luo Y, Ruiz E, (2020). Prediction Regions for Interval-valued Time Series[J]. Journal of Applied Econometrics, 35(4): 373–390.
- Han A, Hong Y, Wang S, Yun X, (2016). A Vector Autoregressive Moving Average Model for Interval-valued Time Series Data[J]. Essays in Honor of Aman Ullah (Advances in Econometrics), 36: 417–460.
- He A W W, Kwok J T K, Wan A T K, (2010). An Empirical Model of Daily Highs and Lows of West Texas Intermediate Crude Oil Prices[J]. Energy Economics, 32(6): 1499–1506.

- He Y, Han A, Hong Y, Sun Y, Wang S, (2021). Forecasting Crude Oil Price Intervals and Return Volatility via Autoregressive Conditional Interval Models[J]. *Econometric Reviews*, 40(6): 584–606.
- Kaucher E, (1980). Interval Analysis in The Extended Interval Space IR[M]// *Fundamentals of Numerical Computation (Computer-Oriented Numerical Analysis)*. Vienna: Springer Vienna: 33–49.
- Kajtazi A, Moro A, (2019). The Role of Bitcoin in Well Diversified Portfolios: A Comparative Global Study[J]. *International Review of Financial Analysis*, 61: 143–157.
- Koutmos D, (2020). Market Risk and Bitcoin Returns[J]. *Annals of Operations Research*, 294: 453–477.
- Lee J, Parlour C A, (2022). Consumers as Financiers: Consumer Surplus, Crowdfunding, and Initial Coin Offerings[J]. *Review of Financial Studies*, 35(3): 1105–1140.
- Liu Y, Tsyvinski A, (2021). Risks and Returns of Cryptocurrency[J]. *Review of Financial Studies*, 34(6): 2689–2727.
- Lu Q, Sun Y, Hong Y, Wang S, (2022). Forecasting Interval-valued Crude Oil Prices Using Asymmetric Interval Models[J]. *Quantitative Finance*, 22(11): 2047–2061.
- Lütkepohl H, (1991). Periodic VAR Processes and Intervention Models[M]// *Introduction to Multiple Time Series Analysis*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg: 391–414.
- Maia A L S, De Carvalho F A T, Ludermir T B, (2008). Forecasting Models for Interval-valued Time Series[J]. *Neurocomputing*, 71(16–18): 3344–3352.
- Neto E A L, De Carvalho F D A T, (2008). Centre and Range Method for Fitting A Linear Regression Model to Symbolic Interval Data[J]. *Computational Statistics and Data Analysis*, 52(3): 1500–1515.
- Pagnotta E S, (2022). Decentralizing Money: Bitcoin Prices and Blockchain Security[J]. *Review of Financial Studies*, 35(2): 866–907.
- Rodrigues P M M, Salish N, (2015). Modeling and Forecasting Interval Time Series with Threshold Models[J]. *Advances in Data Analysis and Classification*, 9: 41–57.
- Şanlı S, Balcılar M, Özmen M, (2023). Predicting the Volatility of Bitcoin Returns Based on Kernel Regression[J]. *Annals of Operations Research*, 14: 1–38.
- Scaillet O, Treccani A, Trevisan C, (2020). High-frequency Jump Analysis of the Bitcoin Market[J]. *Journal of Financial Econometrics*, 18(2): 209–232.
- Sun Y, Bao Q, Zheng J, Wang S, (2020). Assessing The Price Dynamics of Onshore and Offshore RMB Markets: An ITS Model Approach[J]. *China Economic Review*, 62: 101476.
- Sun Y, Han A, Hong Y, Wang S, (2018). Threshold Autoregressive Models for Interval-valued Time Series Data[J]. *Journal of Econometrics*, 206(2): 414–446.
- Sun Y, Qiao K, Wang S, (2021). Uncertainty Shocks of Trump Election in an Interval Model of Stock Market[J]. *Quantitative Finance*, 21(5): 865–879.
- Sun Y, Zhang X, Wan A T K, Wang S, (2022). Model Averaging for Interval-valued Data[J]. *European Journal of Operational Research*, 301(2): 772–784.
- TrucÍOs C, (2019). Forecasting Bitcoin Risk Measures: A Robust Approach[J]. *International Journal of Forecasting*, 35(3): 836–847.