中国科学 A 辑: 数学, 2007, 37(10): 1160–1166
http://www.scichina.com

《中国科学》杂志社
SCIENCE IN CHINA PRESS

中心外的同阶元必共轭的有限群

钱国华[1] 游兴中[2] 施武杰[3]

(1. 常熟理工学院数学系, 常熟 215500; 2. 长沙理工大学数学与计算科学学院, 长沙 410076;
3. 苏州大学数学科学学院, 苏州 215006)

摘要 证明了在有限群 G 中, 若中心外的任何两个同阶的元素均共轭, 则 G 为交换群或者 $G \cong S_3$.

关键词 有限群 有理群 共轭类

MSC(2000) 主题分类 20D60, 20E45

1 引言和主要结果

在文献 [1, 2] 中, Feit 和 Seitz 及张继平独立地解决了 Syskin 提出的著名问题: 若有限群 G 中任何两个同阶的元素均共轭, 则 $G \cong S_i, i = 1, 2$ 或 3. 本文将推广这一结果, 因为一个群的中心内的元素只能与自身共轭, 所以我们自然考察中心外的同阶元均共轭的有限群. 为叙述方便, 称中心外的同阶元均共轭的有限群为 OC- 群, 满足 $1 < Z(G) < G$ 的 OC- 群 G 为非平凡的 OC- 群. 我们的结论是

定理 A 不存在非平凡的 OC- 群.

一个有限群 G 称为有理群, 若 G 的复特征标都是有理特征标, 这也等价于对任意 $g \in G$ 及与 g 的阶 $o(g)$ 互素的整数 m, g^m 与 g 在 G 中共轭. 显然有理群的商群是有理群, 且由文献 [3] 知可解的有理群是 $\{2, 3, 5\}$- 群. 为证明定理 A, 需考察同阶的奇数阶元均共轭的有理群, 我们的结论是下面的定理 B. 定理 B 自身也有独立的意义, 例如, 我们能从定理 B 给出 Syskin 问题的一个简短的新证明.

定理 B 设 G 是一个有限的有理群, 若 G 中奇数阶的同阶元均共轭, 则 $G/O_2(G) \cong 1$, S_3, S_5, W 或 $[L_3(4)]\langle\beta\rangle$, 其中 W 是以 9 阶初等交换群为核和 Q_8 为补的 Frobenius 群, β 是 $L_3(4)$ 的酉自同构.

一个有趣的事情是: 定理 B 中所得出的商群和同阶元均共轭的有限群都是元素的阶为连续整数的有限群 [4].

本文中所讨论的群都是有限群. 若 A 为有限群 G 的子集, $\pi_e(A)$ 表示 A 中元素的阶的集合, $k_G(A)$ 表示与 A 有非平凡的交的 G- 类的个数. 其他未加说明的术语和符号都是标准的.

收稿日期: 2004-12-01; 接受日期: 2007-05-18
国家自然科学基金 (批准号: 10571128, 10671026)、高等学校博士学科点专项科研基金 (批准号: 20060285002)、江苏省高校自然科学研究计划 (批准号: 05KJB110002) 和长沙理工大学基金 (批准号: 1004116) 资助项目
E-mail: ghqian2000@yahoo.com.cn, xzyou2003@yahoo.com.cn, wjshi@suda.edu.cn

2 若干引理

引理 2.1 若 G 是非平凡的 OC- 群, 则 $|Z(G)|=2$ 或者 G 是幂零群.

证明 假定 G 不是幂零群. 任取 $p\in\pi(Z(G))$, 令 y 是 $Z(G)$ 中的一个 p- 元, 使得 $o(y)=p^e$ 极大. 因为 G 不幂零, 我们可取到 $x\in G-Z(G)$, 使得 $o(x)=q^r$ 且 $p\neq q$. 显然, $xy,xy^{-1}\in G-Z(G)$ 且 $o(xy)=o(xy^{-1})=p^eq^r$, 于是有 $g\in G$, 使得 $(xy)^g=xy^{-1}$, 即 $x^gy=xy^{-1}$. 从而 $y^{q^r}=(x^gy)^{q^r}=(xy^{-1})^{q^r}=(y^{-1})^{q^r}$, 即 $y^{2q^r}=1$, 所以 $y^2=1$, $o(y)=2$, 因此 $Z(G)$ 为初等交换 2- 群. 若 $Z(G)$ 不是 2 阶群, 设 a_1 和 a_2 是 $Z(G)$ 中的两个不同的 2 阶元, 则 xa_1 和 xa_2 是 $Z(G)$ 外的两个同阶元, 于是有 $g\in G$, 使得 $x^ga_1=xa_2$, 这样 $a_1=(x^ga_1)^{q^r}=(xa_2)^{q^r}=a_2$, 矛盾, 故 $|Z(G)|=2$.

引理 2.2 若 G 是 OC- 群, 则 $G/Z(G)$ 是有理群.

证明 对任意 $x\in G-Z(G)$, 若整数 m 与 $o(x)$ 互素, 则 x 与 x^m 是 $Z(G)$ 外的两个同阶元, 因此由条件知它们在 G 中共轭. 这说明 G 的中心外的元素都有理, 从而 G 的所有不可约特征标在中心外都取有理值. 特别地, 对任意 $\chi\in\mathrm{Irr}(G/Z(G))$, χ 在 $G-Z(G)$ 上都取有理值, 因此 $G/Z(G)$ 的不可约特征标都有理, 从而 $G/Z(G)$ 是有理群.

引理 2.3 设 G 是 q- 可解群, V 是忠实的不可约 $E[G]$- 模, E 是特征为 q 的有限域, 则存在忠实的不可约特征标 $\chi\in\mathrm{Irr}(G)$, 使得 $\chi(1)|\dim_E(V)$.

证明 我们知道 $D=\mathrm{End}_{E[G]}(V)$ 是包含 E 的有限域, 记 $e=|D:E|$. 于是 V 是次数等于 $\dim_E(V)/e$ 的绝对不可约 $D[G]$- 模. 取 V 的一组 D- 基就能作出 G 的绝对不可约 D- 表示 Λ. 令 R 是复数域中的代数整数环, 取 R 的极大理想 M, 使得 $M\geqslant qR$. 于是 $F=R/M$ 是特征为 q 的代数闭域, 可将 D 看作 F 的子域, 于是 Λ 成为 G 的忠实的不可约 F- 表示, 为强调起见记为 Λ^F. 令 γ 是对应于 Λ^F 的不可约 Brauer 特征标. 因 G 是 q- 可解群, 由 Fong-Swan 定理 (文献 [5, 定理 10.2.1]), 存在 $\chi\in\mathrm{Irr}(G)$, 使得 $\chi(x)=\gamma(x)$ 对任意 q- 正则元 $x\in G$. 特别地, 有 $\chi(1)=\gamma(1)=\dim_E(V)/e$, 从而 $\chi(1)|\dim_E(V)$.

事实上, 在本文使用上述引理时, 仅需存在忠实不可约的 $\chi\in\mathrm{Irr}(G)$, 使得 $\chi(1)<\dim_E(V)$.

引理 2.4 设 $q>3$ 是素数, r,a 是正整数且 $r>1$. 若 q^r-1 整除 $2^a\cdot3^2\cdot5\cdot7$, 则 $r=2$.

证明 若 $r=2^t\cdot s$, 其中 $s>1$ 为奇数, 令 $d=(q^{2^t})^{s-1}+(q^{2^t})^{s-2}+\cdots+q^{2^t}+1$, 则 $q^r-1=(q^{2^t}-1)d$ 且 d 为奇数. 因此由 $q^r-1|2^a\cdot3^2\cdot5\cdot7$ 得 $d|3^2\cdot5\cdot7$, 直接验证可得矛盾. 故 $r=2^t$, 且由 $q^r-1=(q^{2^{t-1}}+1)(q^{2^{t-2}}+1)(q^{2^{t-3}}+1)\cdots(q^2+1)(q+1)(q-1)$ 整除 $2^a\cdot3^2\cdot5\cdot7$ 得 $t\leqslant3$.

进一步, 当 $q>3$ 时, 假设 $r=2^t=4$ 或 8, 则总有 $q^4-1=(q^2+1)(q+1)(q-1)$ 整除 $2^a\cdot3^2\cdot5\cdot7$. 若 $q-1=2^c$, 则 $c=2$ 或 $c\geqslant4$, 此时 $q^4-1=(2^{2c-1}+2^c+1)(2^{c-1}+1)2^{c+2}$, 从而 $(2^{2c-1}+2^c+1)(2^{c-1}+1)|3^2\cdot5\cdot7$, 对 $c=2$ 或 $c\geqslant4$ 都是不可能的. 同理 $q+1$ 也不能是 2 的方幂. 这样, $q^2+1,q+1,q-1$ 都含有奇素因子, 且三者所含的奇素因子是两两不同的, 因此 $q-1=2^c\cdot3,2^c\cdot5,2^c\cdot7$ 或 $2^c\cdot3^2$. 若 $c=1$, 则 $q=7,11$ 或 19, 均有 q^4-1 不整除 $2^a\cdot3^2\cdot5\cdot7$, 矛盾; 若 $c>1$, 则 $q+1=2\cdot3,2\cdot5,2\cdot7$ 或 $2\cdot3^2$, 得 $q=5,13$ 或 17, 同样可得矛盾.

引理 2.5 若 G 是任意有限群, 则 $G/Z(G)$ 不为广义四元数群.

证明见文献 [6, p. 94, 习题 58].

引理 2.6 若 G 是非平凡的 OC- 群, 则 G 不是幂零群.

证明 反设 G 是一个极小的非平凡的幂零 OC- 群, 我们通过若干步来推出矛盾.

断言 2.1 G 是 2- 群.

事实上, 令 H 是 G 的正规 2- 补, 显然 $H/Z(H)$ 是有理群 $G/Z(G)$ 的直因子, 故 $H/Z(H)$ 有理. 注意到非平凡的奇数阶群不能是有理群, 因此 $H = Z(H)$, 于是 $G = P \times H$, 其中 P 是非交换 2- 群. 易见 P 是非平凡的 OC- 群, 由 G 的极小性得 $G = P$.

断言 2.2 $|Z_2/Z| = 2$, 其中 $Z = Z_1 = Z(G), Z_{i+1}/Z_i = Z(G/Z_i)$.

下面总设 $\exp(Z) = 2^k$, $\overline{G} = G/Z$.

由引理 2.2, G/Z 是有理 2- 群, 所以 Z_2/Z 是初等交换群. 若 $|Z_2/Z| = |\overline{Z_2}| \neq 2$, 令 $\overline{a_i} \in \overline{Z_2}$, 使得 $o(\overline{a_i}) = 2, G_i = \langle a_i, Z\rangle, i = 1, 2, 3$, 则 G_i 是交换群且 $2^k \leqslant \exp(G_i) \leqslant 2^{k+1}$. 因此存在 $x, y, z \in Z$, 使得 $\{a_1x, a_2y, a_3z\}$ 中必有两个元有相同的阶 2^k 或 2^{k+1}, 从而这两个同阶元在 G 中共轭, 这又推出它们在 $\overline{G}$ 中的像也共轭, 矛盾, 因此 Z_2/Z 是 2 阶群.

断言 2.3 $Z_2 - Z$ 中的元都是 2^{k+1} 阶元.

反设 $Z_2 - Z$ 中的元不都是 2^{k+1} 阶元, 则由 $\exp(Z) = 2^k$, $Z_2 - Z$ 中有 2^k 阶元 x. 令 $y \in G - Z_2$ 满足 $y^2 \in Z_2$, 即 yZ_2 是 G/Z_2 的对合. 显然 yZ_2 中的元素的阶不能超过 2^{k+2}.

若 yZ_2 中有 2^{k+2} 阶元, 则 $Z_2 - Z$ 中有 2^{k+1} 阶元 x_1, 此时 $x_1Z = Z_2 - Z$ 中的元素都是 2^{k+1} 阶元, 矛盾. 若 yZ_2 中有元素 t, 使得 $o(t) \leqslant 2^k$, 则 tZ 中必有 2^k 阶元 u 且 $u \in tZ \subset tZ_2 = yZ_2$. 由条件得 u 与 x 在 G 中共轭, 显然矛盾.

若对所有 G/Z_2 的对合 yZ_2, 其中的元都是 2^{k+1} 阶元, 则所有这些 y 与 $Z_3 - Z_2$ 的某个固定的 2^{k+1} 阶元 t 共轭, 从而 G/Z_2 中的对合都共轭, 于是 G/Z_2 是循环群或广义四元数群. 由引理 2.5, G/Z_2 为循环群, 但此时 G/Z 交换, 从而 $Z_2 = G$ 是交换群, 矛盾.

断言 2.4 $\exp(Z) = 2$.

反设 $\exp(Z) = 2^k \geqslant 4$. 令 $x \in Z_2 - Z$, 则由断言 2.3 知 $o(x) = 2^{k+1}$. 由引理 2.5, 我们可取到 $y \in G - Z_2$, 使得 $y^2 \in Z$. 注意到 y 不能与 $Z_2 - Z$ 中元素共轭, 所以由断言 2.3 推出 $o(xy) \leqslant 2^k$. 由文献 [6, 第 3 章, 引理 1.3] 得

$$1 = (xy)^{2^k} = x^{2^k} y^{2^k} [y, x]^{2^{k-1}(2^k-1)} = x^{2^k} [y, x]^{2^{k-1}(2^k-1)} = x^{2^k} [y^2, x]^{2^{k-2}(2^k-1)} = x^{2^k},$$

矛盾.

断言 2.5 最后的矛盾.

令 $|G/Z| = 2^a$. 因为 G/Z 不循环, 所以有 $M \lhd G$, 使得 G/M 是 4 阶初等交换群, 这样 $k_G(G - M) \geqslant 3$. 分析 G 的主列的长度易见 $k_G(M - Z) \geqslant a - 2$. 这样 $k_G(G - Z) \geqslant a + 1$, 从而由条件推出 $G - Z$ 中存在元素 t, 使得 $o(t) \geqslant 2^{a+1}$. 因为 $\exp(Z) = 2$, 所以 tZ 是 G/Z 的 2^a 阶元, 于是 G/Z 循环, 矛盾.

引理 2.7 设 N 为非交换群 G 的正规子群且 $|G/N| = 2$. 若 $k_G(G - N) = 2$, 则 $|C_G(x)| = 4$ 对任意 $x \in G - N$.

证明 令 $G - N = a^G \cup b^G$. 由 $|G/N| = 2$ 得 $o(aN) = o(bN) = 2$, 因此 $o(a)$ 和 $o(b)$ 为偶数, 从而 $|C_G(a)|$ 和 $|C_G(b)|$ 为偶数. 因为

$$|N| = |G - N| = |a^G| + |b^G| = |G|/|C_G(a)| + |G|/|C_G(b)|,$$

所以 $1/|C_G(a)| + 1/|C_G(b)| = 1/2$, 必有 $|C_G(a)| = |C_G(b)| = 4$.

3　定理的证明

定理 B 的证明　首先证明定理的条件对商群 G/N 保持. 显然 G/N 仍是有理群, 令 $G/N=\overline{G}$. 任取 $\overline{x}$ 和 $\overline{y}$ 是 $\overline{G}$ 的两个同阶的奇数阶元. 不妨设 x 和 y 分别是 xN 和 yN 中 G 的最小阶的奇阶元. 若 $o(x)=o(y)$, 则 x 和 y 是 G- 共轭的, 从而 $\overline{x}$ 和 $\overline{y}$ 是 $\overline{G}$- 共轭的. 若 $o(x)\neq o(y)$, 则存在奇素数 p, 使得 $o(x)=p^bm, o(y)=p^an$, 其中 $a<b$ 且 $p\nmid mn$. 令 $x_1=x^{mn}, y_1=y^{mn}$, 于是 $o(\overline{x_1})=o(\overline{y_1})$. 注意到 $x_1^{p^{b-a}}$ 和 y_1 的阶都是奇数 p^a, 于是它们 G-共轭, 从而 $\overline{x_1^{p^{b-a}}}$ 和 $\overline{y_1}$ 是 $\overline{G}$- 共轭的, 由此推出 $o(\overline{x_1})=o(\overline{y_1})=o(\overline{x_1^{p^{b-a}}})$, 故 $o(\overline{x_1})$ 及 $o(\overline{x})$ 是 p'- 数, 这样 x 就不是 xN 中最小阶的奇阶元, 矛盾. 从而证明了定理条件对商群保持.

现在可以假设 $O_2(G)=1$, 来证明 $G\cong 1$, S_3, S_5, W 或 $[L_3(4)]\langle\beta\rangle$.

断言 3.1　G 有唯一的极小正规子群.

若 G 有两个不同的极小正规子群 N_1 和 N_2, 令 $A_i\lhd G$, 使得 $A_i/N_i=O_2(G/N_i)$, 其中 $i=1,2$. 由归纳 $G/A_i\cong S_3$, S_5, W 或 $[L_3(4)]\langle\beta\rangle$. 注意到 N_2 同构于 G/N_1 的一个极小正规子群且 N_2 不是 2- 群, 故推出 N_2 (N_1 同样) 是 3 阶群或 A_5 或 3^2 阶初等交换群或 $L_3(4)$.

若 $N_2\cong A_5$, 则有理群 $G/C_G(N_2)\cong S_5$. 由于 G 的奇阶的同阶元都共轭, 则 $C_G(N_2)$ 是 $\{3,5\}'$- 群, 因此 G/N_2 是 $3'$- 群. 但由归纳 $G/A_2\cong S_3$,S_5,W 或 $[L_3(4)]\langle\beta\rangle$, 都有 $3||G/N_2|$, 矛盾.

若 $N_2\cong L_3(4)$, 则有理群 $G/C_G(N_2)$ 同构于 $\mathrm{Aut}(L_3(4))$ 的一个子群, 由文献 [7], $G/C_G(N_2)\cong [L_3(4)]\langle\beta\rangle$. 类似于上面的推理, 可得矛盾.

若 N_1 和 N_2 是 3 阶群或 3^2 阶初等交换群, 注意到命题条件要求 G 的 3 阶元在一个 G-类里面, 显然矛盾.

断言 3.2　令 N 是 G 的唯一的极小正规子群, 若 N 不可解, 则 $G\cong S_5$ 或 $[L_3(4)]\langle\beta\rangle$.

若 N 是不可解的, 令 $N=N_1\times N_2\times\cdots\times N_k$ 是 k 个同构单群 N_i 的直积. 取 x 是 N_1 中的一个奇素数 p 阶元, 易见 $x^G\subset N_1\cup\cdots\cup N_k$. 若 $k>1$, 令 y 是 N_2 中的 p 阶元, 则 $o(xy)=o(x)=p$, 从而 xy 与 x 是 G- 共轭的, 显然矛盾, 因此 $k=1$, N 是非交换单群.

由 N 的唯一极小正规性, 推出 $C_G(N)=1$, 于是 $G\leqslant \mathrm{Aut}(N)$. 由文献 [1] 的定理 B, 有 N 同构于下面的单群之一:

$$A_n,\quad \mathrm{PSp}_4(3),\quad \mathrm{Sp}_6(2),\quad O_8^+(2),\quad L_3(4),\quad \mathrm{PSU}_4(3).$$

若 $N\cong A_n$, 注意到 A_n 不是有理群, 故有 $G\cong S_n$ 或者 $G\leqslant \mathrm{Aut}(A_6)$. 注意到当 $n>6$ 时, S_n 至少有两个 3 阶元类, 矛盾. 由文献 [7], 若 $n=6$, G 有两个 3 阶元类, 矛盾, 故 $G\cong S_5$.

由文献 [7], 若 $N\cong \mathrm{PSp}_4(3), O_8^+(2), \mathrm{Sp}_6(2)$ 或 $\mathrm{PSU}_4(3)$, G 总有两个同阶的奇阶元类, 矛盾. 若 $N\cong L_3(4)$, 则 $G\cong [L_3(4)]\langle\beta\rangle$.

断言 3.3　以下总假设 N 是 G 的唯一的极小正规子群, 且 N 是 $q^r (q\geqslant 3)$ 阶初等交换群, $A/N=O_2(G/N)$. 我们断言:

(1) G 在 N 处分裂, 于是存在 G 的子群 H, 使得 $G=HN$, $H\cap N=1$;

(2) $(|N|,|H|)=1$, 且 $C_G(N)=N$, q^r-1 整除 $|H|$.

事实上, 若 $N\leqslant \Phi(G)$, 则 $q||G/N|$. 因为 $O_2(G)=1$, 则 $O_2(G/N)=1$, 从而 $A=N$, $G/N\cong 1, S_3, S_5, W$ 或 $[L_3(4)]\langle\beta\rangle$. 因为 $N-\{1\}$ 是 G 中所有 q 阶元的一个 G- 类, 所以 $(|N|-1)||G/N|$.

情形 3.3.1. $G/N \cong S_3$.

此时易见 N 是 3 阶群, 从而 $P \in \mathrm{Syl}_3(G)$ 是 9 阶循环群. 显然 $P \lhd G$, 因此 $P-N$ 为 G 中所有 9 阶元的一个 G- 类. 令 $x \in P-N$, 则 $|x^G| = |P-N| = 6$, $|C_G(x)| = 3$, 矛盾.

情形 3.3.2. $G/N \cong S_5$.

此时 $q = 3, 5$. 若 $q = 3$, 注意到 G 有 10 个 Sylow 3- 子群, 再由条件得 $G-N$ 中的 3- 元都是 9 阶元且是一个 G- 类 u^G, 则 $10(3^{r+1}-3^r) = |u^G|$, 从而 $|C_G(u)| = \frac{|S_5|3^r}{10(3^{r+1}-3^r)} = 6$, 这与 $o(u) = 9$ 矛盾. 若 $q = 5$, 则由类似的推理可得矛盾.

情形 3.3.3. $G/N \cong W$.

此时 $q = 3$ 且 $|N| = 3$ 或 9. 令 $H \in \mathrm{Syl}_2(G)$, $P \in \mathrm{Syl}_3(G)$, 则 $H \cong Q_8$, $P \lhd G$. 若 $|N| = 3$, 因为 G 中的 3 阶元都共轭, 则 G 只有唯一的 3 阶子群, 这样 P 必循环, 但 W 的 Sylow 3- 子群不循环, 矛盾. 若 $|N| = 9$, 则 $|P| = 81$ 且 $P-N$ 为 G 中所有 9 阶元的一个 G- 类. 令 $x \in P-N$, 则 $|x^G| = 72$, 从而 $|C_G(x)| = 9$. 另外, 对 $u \in N-\{1\}$, 因为 $N-\{1\} = u^G$, 所以 $|C_G(u)| = 81$, 从而 $C_G(u) = P$. 因此 H 无不动点地作用在 P 上, 注意到 $2||H|$, 所以 P 必为交换群, 这样 $|C_G(x)| \geqslant 81$, 矛盾.

情形 3.3.4. $G/N \cong [L_3(4)]\langle\beta\rangle$.

此时 $q = 3, 5, 7$. 令 $M \lhd G$ 使得 $M/N \cong L_3(4)$.

若 $q = 5$, 则由 $q^r - 1$ 整除 $|G/N| = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ 得 $|N| = q^r = 5, 5^2$. 当 $|N| = 5$ 时, 易见 $N \leqslant Z(M)$, 因为 $L_3(4)$ 的 Schur 乘子是 $\{2,3\}$- 群, 必有 $M = N \times L_3(4)$, 此时 G 的 5- 阶元不在一个类中, 矛盾. 若 $|N| = 5^2$, 因为 $M/C_M(N) \leqslant \mathrm{GL}(2,5)$ 且 $\mathrm{GL}(2,5)$ 没有子群是非交换单群, 故 $C_M(N) = M$, 同样有 $M = N \times L_3(4)$, 矛盾.

若 $q = 7$, 与上段推理一样可得矛盾.

若 $q = 3$, 则由 $3^r - 1$ 整除 $2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ 得 $|N| = 3^r = 3, 3^2, 3^4$. 若 $|N| = 3$, 类似于情形 3.3.3 中的推理可得矛盾. 若 $|N| = 3^2$, 因为 $\mathrm{GL}(2,3)$ 是可解群, 所以 $N \leqslant Z(M)$, 这样 N 中的 3 阶元不在一个 G- 类中, 矛盾. 若 $|N| = 3^4$, 则 $|C_G(x)/N| = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ 对 $x \in N-\{1\}$. 于是 $L_3(4) \cong M/N$ 中有阶为 $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ 或 $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$ 的子群, 由文献 [7], 这是不可能的.

由于 $N \cap \Phi(G) = 1$, 因此 G 在 N 处分裂, 从而存在 G 的子群 H, 使得 $G = HN$, $H \cap N = 1$, 且由条件同阶的奇数阶元都共轭推出 N 是 G 的 Sylow q- 子群. 若 $C_G(N) \neq N$, 则 $N < C_G(N) = C_H(N) \times N$, 推出 $C_H(N)$ 是 G 的非平凡正规子群, 这与断言 3.1 矛盾, 因此 $C_G(N) = N$. 另外由 $|N|-1$ 整除 $|G/N|$ 立即推出 $|N|-1$ 整除 $|H|$.

断言 3.4 若 $q = 3$, 则 $G \cong S_3$ 或 W.

若 $q = 3$, 由归纳 $H/O_2(H) \cong 1, S_3, S_5, W$ 或 $[L_3(4)]\langle\beta\rangle$, 再由 H 是 $3'$- 群得 H 是 2- 群, 即 $H/O_2(H) = 1$. 现在由 $3^r - 1$ 整除 $|H|$ 知 $3^r - 1$ 是 2 的方幂, 熟知此时必有 $3^r = 3$ 或 $3^r = 9$.

若 $3^r = 3$, 此时 $G/N \leqslant \mathrm{Aut}(N)$ 推出 $G \cong S_3$.

若 $3^r = 9$, 此时 2- 群 H 同构于 $\mathrm{Aut}(N) = \mathrm{GL}(2,3)$ 的子群. 注意到 $\mathrm{GL}(2,3)$ 的 Sylow 2- 子群 P 是 16 阶半二面体群, 它不是有理群, 因此 $H < P$. 因为 $8 = q^r - 1$ 整除 $|H|$, 于是 $|H| = 8$. 因为 $N-\{1\}$ 是由 G 的所有 3 阶元组成的一个 G- 类, 从而 G 是 Frobenius 群, 此时有理群 H 必是 Q_8.

下面将证明 $q \neq 3$ 是不能成立的.

断言 3.5　$q=3$, 从而定理成立.

反设 $|N|=q^r, q\neq 3$. 由断言 3.3, $G=HN$, $H\cap N=1$, $N\in \mathrm{Syl}_q(G)$, $C_G(N)=N$ 且 q^r-1 整除 $|H|$. 且由归纳得, $H/O_2(H)\cong S_3, S_5, W$ 或 $[L_3(4)]\langle\beta\rangle$.

若 $r=1$, 此时 H 有忠实的线性特征标, 所以 H 是循环群, 从而有理群 H 是 2 阶群, 此时必有 $q=3$, 矛盾. 所以 $r>1$, 由断言 3.3, q^r-1 整除 $|H|$, 考察 $|H|$ 所有可能的情形, 总有 q^r-1 整除 $2^a\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$. 于是由引理 2.4 得 $r=2$. 由引理 2.3, 存在忠实的 $\chi\in \mathrm{Irr}(H)$, 使得 $\chi(1)|2$. 若 $\chi(1)=1$, 则 H 循环, 从而有理群 H 是 2 阶群, 此时必有 $q^r=q$, 矛盾. 因此可设 $\chi(1)=2$.

若 χ 非本原, 则 H 有指数为 2 的正规交换子群 T, 从而 $H/O_2(H)\cong S_3$. 此时 G 是可解有理群, 从而 $|N|=5^2$. 因为 N 是 G 的唯一极小正规子群, 交换群 T 忠实作用在 N 上, 熟知此时有 $y_0\in N$, 使得 $C_T(y_0)=1$, 因为 $N-\{1\}$ 是一个 G- 类, 所以对所有 $y\in N-\{1\}$ 都有 $C_T(y)=1$, 这样 T 就无不动点地作用在 N 上, 因此 T 是循环群 (因为 T 是 Frobenius 群 TN 的交换的 Frobenius 补). 注意到 $|y_0^G|=24$, 有 $|T|=12$ 或 24. 当 $|T|=24$(或 12) 时, T 中的 24 阶元 (或 12 阶元) 不能是一个 H- 类 (因为这样的元素的 H- 类长是 2), 从而 H 不是有理群, 矛盾.

若 χ 是 H 的忠实的本原特征标, 由文献 [8, p. 260], $H/Z(H)\cong A_4, S_4$ 或 A_5. 结合我们的归纳假设得 $H/Z(H)\cong S_4$, 此时 G 是可解有理群, 也有 $|N|=5^2$. 注意到 $Z(H)$ 是循环群, 因此对有理群 H 而言, $|Z(H)|\leqslant 2$, 再由 χ 的本原性得 $Z(H)>1$, 因此 $|Z(H)|=2$, $|H|=48$. 进一步 H 是 $\mathrm{Out}(N)=\mathrm{GL}(2,5)$ 的 48 阶子群, 我们推出 $H\cong \mathrm{GL}(2,3)$, 但由文献 [9, E11.8], $\mathrm{GL}(2,3)$ 不是有理群, 矛盾. 定理 B 证毕.

推论 3.1　在有限群 G 中, 若任意两个同阶的元素均共轭, 则 $G\cong S_i, i=1,2$ 或 3.

证明　容易得到推论中的条件对商群是保持的且 G 是有理群, 因此由定理 B, $G/O_2(G)\cong 1, S_3, S_5, W$ 或 $[L_3(4)]\langle\beta\rangle$. 注意到 S_5 中有 2 个 2 阶元的共轭类, W 和 $[L_3(4)]\langle\beta\rangle$ 中均有 3 个 4 阶元的共轭类, 因此 $G/O_2(G)\cong 1$ 或 S_3. 若 $G=O_2(G)>1$, 由条件, 则 G 中只有唯一的 2 阶元, 从而 G 是循环群或广义四元数群, 此时易见 $G\cong S_2$. 若 $G/O_2(G)\cong S_3$, 令 $\exp(O_2(G))=2^k$, 由条件, $O_2(G)$ 包含了 G 的所有阶为 2^i 的元, 其中 $1\leqslant i\leqslant k$, 因此对所有 2- 元素 $x\in G-O_2(G)$, $o(x)=2^{k+1}$, 于是构成一个 G- 类, 其类长 $|x^G|=|G|/2$, 因此 $|C_G(x)|=2$, 于是 $k=0$, 从而 $O_2(G)=1$, 即 $G\cong S_3$.

定理 A 的证明　反设 G 是一个非平凡的 OC- 群, 我们来推矛盾.

由引理 2.1 及 2.6, G 不是幂零群但 $|Z(G)|=2$, 从而 G 是有理群且满足定理 B 的条件, 因此 $G/O_2(G)\cong S_3, S_5, W$ 或 $[L_3(4)]\langle\beta\rangle$. 令 $M\lhd G$, 使得 $O_2(G)<M<G$ 且 $|G/M|=2$.

对任意 $x\in G-M$, 令 $x=yz$, 其中 $yz=zy$ 且 y 是 2- 元, z 是奇数阶元. 易见 $y\in G-M$ 且 $o(z)$ 是固定的一个数. 事实上, 当 $G/O_2(G)\cong S_5$ 或 $[L_3(4)]\langle\beta\rangle$ 时, $o(z)=3$; 当 $G/O_2(G)\cong S_3$ 或 W 时, $o(z)=1$, 即 $G-M$ 中元都是 2- 元.

令 $P\in \mathrm{Syl}_2(G), P_1=P\cap M\in \mathrm{Syl}_2(M)$, $\exp(P_1)=2^k$. 由条件不存在 2- 元 $x\in G-M$ 及 2- 元 $y\in M-Z(G)$ 使得 $o(x)=o(y)$. 注意到 $k_G(G-M)>1$, 否则 G 是以 M 为核的 Frobenius 群, 与 $Z(G)>1$ 矛盾. 下面分 $P-P_1$ 中有对合和无对合两种情形来说明.

情形 1. 若 $P-P_1$ 中无对合.

对任意 $x\in G-M$, 若 x 为 2- 元, 则 $o(x)=2^{k+1}$; 若 x 为非 2- 元, 则 $o(x)=3\cdot 2^{k+1}$, 从

而 $k_G(G-M)=2$. 由引理 2.7, $|C_G(g)|=4$ 对任意 $g\in G-M$, 与 $G-M$ 中有非 2- 元矛盾.

情形 2. 若 $P-P_1$ 中有对合.

由条件知 $P_1-Z(G)$ 中无对合, 因此 P_1 是循环群或广义四元数群.

若 P_1 循环, 则 $G/O_2(G)$ 不能同构于 S_5 或 $[L_3(4)]\langle\beta\rangle$. 当 $G/O_2(G)\cong S_3$ 或 W 时, $\pi_e(G-M)=\{2,2^{k+1}\}$ 且 $k_G(G-M)=2$, 但这时由 P_1 循环推出 P 循环, 显然矛盾.

若 P_1 是广义四元数群.

(2.1) 若 $G/O_2(G)\cong S_3$ 或 W, 此时 $\pi_e(G-M)=\{2,2^{k+1}\}$ 且 $k_G(G-M)=2$. 由引理 2.7, $|C_G(g)|=4$ 对任意 $g\in G-M$, 因此 $2^{k+1}=4$, P_1 是初等交换群, 矛盾.

(2.2) 若 $G/O_2(G)\cong S_5$. 因为 P_1 是广义四元数群, 所以 $O_2(G)$ 是 P_1 的指数为 4 的循环子群, 且 $C_M(O_2(G))>O_2(G)$, 从而 $O_2(G)=Z(M)$. 显然 $M'=M$(否则 P_1 不可能是广义四元数群), 故 $O_2(G)$ 是 $A_5\cong M/O_2(G)$ 的 Schur 乘子. 此时 $M=\mathrm{SL}(2,5)$, G 是 A_5 的 Schur 覆盖群 $2.A_5.2$, 但此时 $G-M$ 和 M 中都有 6 阶元, 矛盾.

(2.3) 若 $G/O_2(G)\cong[L_3(4)]\langle\beta\rangle$, 则 $M/O_2(G)\cong L_3(4)$, 因为 P_1 是广义四元数群, 考察 $L_3(4)$ 的 Sylow 2- 子群, 易得矛盾.

无论文献 [1] 或 [2] 以及本文所证明的定理 B, 为解决 Syskin 问题都直接或间接地用到有限单群分类定理.

问题 对 Syskin 问题是否存在一个不依赖于分类定理的证明?

致谢 本文的准备阶段得到张继平教授的帮助, 事实上, 引理 2.1 的结论是他给出的, 同时审稿人对本文的修改提出宝贵的意见, 对此我们深表感谢.

参 考 文 献

1 Feit W, Seitz G M. On finite rational groups and related topics. *Illinois J Math*, **33**: 103–131 (1988)
2 张继平. 关于有限群的 Syskin 问题. 中国科学 A 辑: 数学, **2**: 124–128 (1988)
3 Gow R. Groups whose characters are rationally-valued. *J Algebra*, **40**: 280–299 (1976)
4 Brandl R, Shi W J. Finite groups whose element orders are consecutive integers. *J Algebra*, **143**: 388–400 (1991)
5 Feit W. The Representation Theory of Finite Groups. Amsterdam-New York-Oxford: North-Holland Publishing Company, 1982
6 Huppert B. Endlich Gruppen I. Berlin: Springer-Verlag, 1979
7 Conway J H, Curtis R T, Norton S P, et al. Atlas of Finite Groups. Oxford: Clarendon Press, 1985. 1–88
8 Isaacs I M. Character Theory of Finite Groups. New York: Academic Press, 1976
9 Huppert B. Character Theory of Finite Groups. Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1998