中国科学: 数学 2020 年 第 50 卷 第 10 期: 1437 ~ 1454
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS
自然科学基金项目进展专栏 综 述

近可积 Hamilton 系统动力学的多样性

程崇庆

南京大学数学系, 南京 210093
E-mail: chengcq@nju.edu.cn

收稿日期: 2020-04-25; 接受日期: 2020-06-08; 网络出版日期: 2020-08-27
国家自然科学基金 (批准号: 11790272 和 11631006) 资助项目

摘要 近可积 Hamilton 系统的研究被 Poincaré 称为动力学的基本问题. 自 20 世纪中叶以来, 相关研究取得了巨大进展. Kolmogorov 定理的建立和 Arnold 扩散现象的发现是其中的两大里程碑, 极大地深化了我们对于近可积 Hamilton 系统动力学多样性的理解. 本文将就相关内容作简要介绍.

关键词 Hamilton 系统 Kolmogorov 定理 Arnold 扩散

MSC (2010) 主题分类 37J40, 37J50, 49L25

1 引言

近可积 Hamilton 系统的研究被 H. Poincaré 称为动力学的基本问题, 他为何有此看法笔者不得而知. 经过一个多世纪的研究, 动力系统已发展成为涉及范围非常广阔的领域. 除去运用动力系统方法研究其他问题外, 光滑动力系统研究的对象大致包含两类, 一是从自然科学问题中提炼出的方程 (如微分方程、差分方程), 如 Hamilton 方程等; 二是假设了若干基本特征的系统, 如一致、非一致或部分双曲系统. 前者的特征是自然科学问题促进数学理论的发展, 后者则更多地是从数学自身的发展来探索可能存在的复杂现象. 在近代, 前者的代表人物有 A. N. Kolmogorov 和 V. I. Arnold 等, 后者的代表人物则有 S. Smale 等. 这两大潮流各有特点, 推动着动力系统的研究不断深入. 在一百多年后的今天, 笔者感觉到 Poincaré 的观点有着非凡的前瞻性. 可积系统过于理想化, 在自然界非常稀少, 难以具有代表性. 对于一般的具有自然科学背景的远离可积系统, 人们受制于数学工具的缺乏往往无从下手来研究其复杂动力学行为. 作为许多物理现象的数学模型, 近可积 Hamilton 系统既具有极其复杂的动力学现象, 又是不少有力的数学工具大展身手的地方. 20 世纪 Kolmogorov 关于不变环面理论的建立和 Arnold 扩散现象的发现便是两大发展里程碑, 其影响远超动力系统领域. 这验证了 Poincaré 的先见之明, 笔者认为这个基本问题的研究远未结束, 还有着广阔的发展前景.

这一问题的研究起源于对太阳系运行规律的研究. 根据万有引力定律和 Newton 第二定律证明了关于二体问题的 Kepler 三定律后, Newton 发现三体问题极其复杂, 似无规律可循. 根据 Laplace 的说

英文引用格式: Cheng C-Q. Dynamical diversity of nearly integrable Hamiltonian systems (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 1437–1454, doi: 10.1360/SSM-2020-0127

© 2020《中国科学》杂志社

法[1], Newton 认为该问题是如此复杂以至于只有上帝才知道如何控制其稳定性. 由于太阳的质量大约是木星质量的 1,000 倍, 而木星质量是其他七大行星质量之和的 2.5 倍, 太阳系可以看作是一个近可积 Hamilton 系统. 每个行星受到的外力作用主要来自太阳, 其他外力可以看作是小扰动. 在 Newton 的 "Principia" 发表之后大约一百年, Lagrange "证明了" 太阳系的运行状态是稳定的, 几十年之后 Laplace 和 Poisson 再次 "证明了" 太阳系的稳定性 (参见文献 [2]). 人们不禁奇怪为什么一个问题要被反复证明. 实际上, 这些只是精确到不同量级的证明, 远不是真正的证明. 如果要求考虑时间趋向于无穷时的运行状态, 人们就不能对系统做任何近似. 这在下文将有说明.

该问题研究的革命性变化肇始于 Poincaré 里程碑式的工作. 为庆祝瑞典 - 挪威国王奥斯卡二世的 60 岁生日, 《数学杂志》(*Acta Mathematica*) 在 1885 年发布通告, 举办一次数学问题比赛. 题目有 4 个, 第一个就是关于多体问题: 在不发生碰撞的前提下, 运动轨道是否可以表示为已知函数的一致收敛级数解. 尽管 Poincaré 没有给出完整的解答, 但是审稿人 Weierstrass 敏锐地认识到 Poincaré 的这项工作开启了天体力学研究的新纪元. 他发展的定性方法使得人们可以不通过求解而研究长时间动力学行为, 而为完善本文的后续工作更让人们意识到系统的演变经常是混沌的, 不可积系统大量存在. 19 世纪后期统计力学的发展, 如 Boltzmann 热力学熵公式的建立, 也使人们更倾向于认为绝大多数系统不可积.

事情的发展方向似乎有点循环反复. 在 20 世纪 50 年代, Kolmogorov 发现近可积 Hamilton 的大部分运动是规则运动, 而不是混沌运动. 起初 Kolmogorov 打算证明环面上的运动弱混合, 但结果发现大部分运动是拟周期运动, 构成大量不变环面. Arnold 形容这个过程与哥伦布的经历类似, 起初意图是向西出发到达印度, 结果却是发现了新大陆. 这些环面构成集合的 Lebesgue 测度接近全测. 根据该结果, 遍历性假设对于近可积 Hamilton 系统不成立, 使得 Birkhoff 遍历定理成立的遍历测度关于 Lebesgue 测度奇异. 文献 [3] 虽然只有短短的 4 页, 在知晓所有证明细节的今天, 笔者认为 Kolmogorov 在该文献中不仅给出了证明思路而且指出了证明将涉及的所有要点. 众所周知, 在 20 世纪 60 年代初, Arnold 就任意自由度近可积系统的解析情形给出了详细证明, Moser 就二维保面积扭转映射在不小于 333 阶可微的函数范畴内证明了该结果, 相关文章发表在《哥廷根数理杂志》这样一个不太受到关注的杂志上. 据说 Moser 声称当时没有读懂 Kolmogorov 的原文. Arnold 将不变环面的存在性定理称为 Kolmogorov 定理. 目前比较流行的称谓是 KAM 理论, 而 Moser 曾经对笔者说, 他更愿意称其为 KAM 方法. 这一理论具有重要意义. 如果能将其应用于太阳系这样的近可积系统, 则人们可以推断太阳系在大概率意义下是稳定的. 如果初始条件落在这些众多的不变环面上, 则各大行星将永远沿着几乎不变的轨道围绕太阳运行.

尽管不变环面构成的集合占据了相空间的大部分区域, 但该集合只是一个无处稠密的闭集. 人们自然希望知道相空间剩余区域内的动力学. 据说起初 Kolmogorov 相信在不变环面集合的余集中的运动也不至于太复杂. 但是在看到 Melnikov[4] 计算同宿圈在扰动下开裂的结果后, Arnold[5] 构造了实例, 在共振区存在着作用量发生很大变化的轨道. 据此他进一步猜测, 自由度数不小于 3 的通有近可积系统存在作用量几乎可以任意变化的轨道 (参见文献 [6]), 此现象如今称为 Arnold 扩散. 作为经典力学的重大成就, 人们认为它可能具有更加惊人和意想不到的物理意义 (参见文献 [7]). 大量由规则轨道构成的不变环面和高度不稳定的轨道互相嵌套、共存, 呈现出丰富的动力学多样性. 近年来, 巴黎天文台的 Laskar 和 Gastineau[8,9] 通过数值计算发现一个惊人的现象. 根据观测结果, 他们取了上千组初值来近似太阳系目前的运动状态, 其中大约有百分之一的初值会导致太阳系坍塌: 三十多亿年之后, 地球将与金星或者火星相撞. 他们称这种现象为混沌扩散 (chaotic diffusion). 这种混沌扩散过程的开始阶段可以解释为 Arnold 扩散.

笔者曾经于 2004 年就相关问题写过一个粗浅的综述 [10]. 十余年来, 该领域的研究, 尤其是关于 Tonelli 型 Hamilton 系统的变分理论和关于动力学不稳定性的 Arnold 扩散的研究又取得了突破性进展. 笔者在本文中将就相关内容再谈一些浅见.

2 Hamilton 方程、Lagrange 方程与最小作用量原理

起始于 Fermat 的最短光程原理、到 Lagrange 时代定型的最小作用量原理揭示了系统的真实运动 $x(t)$ 是使得 Lagrange 作用量达到极小, 即

$$\int_{t_0}^{t_1} L(\dot{x}(t), x(t), t)dt = \inf_{\substack{\xi(t_0)=x(t_0)\\ \xi(t_1)=x(t_1)}} \int_{t_0}^{t_1} L(\dot{\xi}(t), \xi(t), t)dt$$

对于任意 $t_0 < t_1$ 时刻都成立, 这里的曲线 $\xi(t)$ 取自绝对连续函数空间. 作用量积分中的被积函数 L 被称为 Lagrange 量, 定义在 $TM \times \mathbb{R}$ 上, M 称为构型空间. 该作用量泛函的临界点方程就是 Lagrange 方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0,$$

其中 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ 是构型空间的局部坐标. 该方程实际上就是 D'Alembert 的虚功原理.

如果 Lagrange 量关于 $\dot{x}$ 是正定函数, 即 L 关于 $\dot{x}$ 的 Hessian 矩阵是正定二次型, 则考虑 Lagrange 量的 Legendre 变换

$$H(x, y, t) = \max_{\dot{x}} \langle \dot{x}, y\rangle - L(\dot{x}, x, t),$$

由此得到关系 $y = \partial_{\dot{x}} L(\dot{x}, x, t)$. 据此人们容易由 Lagrange 方程导出 Hamilton 方程

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}. \tag{2.1}$$

利用 Poincaré-Cartan 作用量 $\int ydx - Hdt$ 容易证明 Φ_H^t 保持辛结构不变 $\Phi_H^{t*}\omega = \omega$, 其中

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i,$$

Φ_H^t 表示相应的 Hamilton 流.

由于完全非线性方程难以求解, 寻找周期解这样一种具有比较简单形式的解就成了人们研究的首选. Poincaré 相信这样的系统中存在着无穷多的周期解. 变分方法在寻找周期解的研究中发挥了重要作用. 例如, 应用 Morse 理论, 人们可以求得一些特殊的周期解. 由于周期函数构成 Sobolev 函数空间, 寻找周期解问题转化为寻找作用量泛函在这类函数空间中的临界点问题 (参见文献 [11]). 由于 Poincaré-Cartan 型作用量泛函上下无界, 利用诸如山路引理之类的原理可以寻找鞍点型的临界点 (参见文献 [12]). 通过研究这些周期解 (闭曲线) 的 Maslov 型指标, 人们可以区分 T- 和 kT- 周期解是否是一回事 (参见文献 [13]). 用几何语言解释, Maslov 指标就是测地线通过共轭点的次数. 由于表示复杂动力学行为的解不是周期解, 目前还无法在某个合适的函数空间中应用 Morse 理论之类的方法来研究这类问题.

注意到周期解支撑了一个构型空间切丛 (余切丛) 上的不变测度, 对于作用量正定的 Hamilton 系统, 考虑相应 Lagrange 量的极小不变测度成为一个发展方向. 考虑满足以下条件的 Lagrange 量 $L \in C^2(T\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}, \mathbb{R})$, 称为 Tonelli 型 Hamiltonian,

(1) 正定性: L 关于 $\dot{x}$ 的 Hessian 矩阵正定;

(2) 超线性增长性: 当 $|\dot{x}|\to\infty$ 时, 对于所有的 (x,t) 都有 $L(x,\dot{x},t)/|\dot{x}|\to\infty$;

(3) 完备性: Lagrange 方程的每一个解都可以延拓到 $t\in\mathbb{R}$.

其中第 3 个条件对于自治系统自然成立. 对于自治 Hamilton 系统, 即 Hamilton 函数不含时间 t, 由 Hamilton 方程得到 $\frac{d}{dt}F(x(t),y(t))=\{F,H\}$, 这导出能量守恒律 $H(x(t),y(t))\equiv E$. 由于这里研究的 Hamilton 系统的每一个等能量面是紧致无边流形, 所以解不可能在有限时间内爆破.

我们按照 Mañé[14] 的做法来叙述极小测度如何定义. 给定一条绝对连续闭曲线 $\gamma:[0,k]\to\mathbb{T}^n$, 即 $\gamma(0)=\gamma(k)$, 我们就得到一个 $T\mathbb{T}^n\times\mathbb{T}$ 上的测度 μ_γ 使得对于所有连续函数 $f:T\mathbb{T}^n\times\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ 都有

$$\frac{1}{k}\int_0^k f(\dot{\gamma}(t),\gamma(t),t)dt=\int f d\mu_\gamma.$$

考虑由所有闭曲线决定的测度的集合 $\{\mu_{\gamma_k}:k\in\mathbb{N}\}$. 记 $\mathfrak{H}$ 为其闭包, 称其为 holonomic 测度集合. 容易证明存在 $\mu\in\mathfrak{H}$ 使得

$$\int L d\mu=\inf_{\nu\in\mathfrak{H}}\int L d\nu,$$

而且该测度关于 Lagrange 流 ϕ_L^t 不变, 即 $\int L d\phi_L^{t*}\mu=\int L d\mu$ 对于任意 t 都成立. 称该测度为极小不变测度, 这样的测度不一定唯一.

在局部坐标下 1- 形式 η 都可以表示成为 $\eta=\sum a_i(x)dx_i$, 注意到该形式为闭的充分必要条件是 $\frac{\partial a_i}{\partial x_j}=\frac{\partial a_j}{\partial x_i}$. 借用符号 $\eta=\sum a_i(x)\dot{x}_i$, 我们看到条件 η 为闭使得 $L-\eta$ 决定的 Lagrange 方程与 L 决定的 Lagrange 方程相同. 给定上同调类 $c\in H^1(\mathbb{T}^n,\mathbb{R})$, 取一闭 1- 形式 η_c 为其代表元, 容易看出存在不变测度 μ_c (参见文献 [14–16]) 使得

$$\int(L-\eta_c)d\mu_c=\inf_{\nu\in\mathfrak{H}}\int(L-\eta_c)d\nu,$$

而且此关系与选取的代表元无关. 称 μ_c 为 c- 极小不变测度. 所有 c- 不变测度的支撑构成的集合记为 $\tilde{\mathcal{M}}(c)$, 称其为相应于同调类 c 的 Mather 集. 记 $\alpha(c)=-\int(L-\eta_c)d\mu_c$, 可以证明 $\alpha:H^1(\mathbb{T}^n,\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ 是具有超线性增长性的凸函数.

我们还可以引进极小曲线的概念 (参见文献 [14,17]). 一条绝对连续曲线 $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{T}^n$ 称为 c- 半静态曲线, 如果对于任意的 $t_0<t_1$ 和 $t_0'<t_1'$ 使得 $t_0'-t_0,t_1'-t_1\in\mathbb{Z}$ 都有

$$\int_{t_0}^{t_1}(L-\eta_c+\alpha(c))(\dot{\gamma}(t),\gamma(t),t)dt\leqslant\int_{t_0'}^{t_1'}(L-\eta_c+\alpha(c))(\dot{\xi}(t),\xi(t),t)dt$$

在条件 $\gamma(t_0)=\xi(t_0')$ 和 $\gamma(t_1)=\xi(t_1')$ 下成立. 这样的曲线自然是 Lagrange 方程的解, 所以决定了一条轨道 $(\dot{\gamma}(t),\gamma(t))$, 称其为 c- 半静态轨道. 我们将所有 c- 半静态轨道构成的集合记为 $\tilde{\mathcal{N}}(c)$, 称其为相应于同调类 c 的 Mañé 集. 显然有关系 $\tilde{\mathcal{M}}(c)\subseteq\tilde{\mathcal{N}}(c)$. 用 $\pi:T\mathbb{T}^n\to\mathbb{T}^n$ 表示通常意义下的投影, 记 $\mathcal{M}(c)=\pi\tilde{\mathcal{M}}(c)$ 和 $\mathcal{N}(c)=\pi\tilde{\mathcal{N}}(c)$. 可以证明, 集合映射 $c\to\tilde{\mathcal{N}}(c)$ 和 $c\to\mathcal{N}(c)$ 具有上半连续性. 我们还可以定义静态曲线. 一条 c- 半静态曲线称为 c- 静态曲线, 如果它满足以下条件: 对于曲线上任意一点 x 都存在一系列闭曲线 $\gamma_k:[0,k]\to\mathbb{T}^n$ 使得 $\gamma_k(0)=\gamma_k(k)=x$, 沿着 γ_k 的 $L-\eta_c+\alpha(c)$ 的 Lagrange 作用量趋于 0. 所有 c- 静态轨道构成的集合称为 Aubry 集, 记为 $\tilde{\mathcal{A}}(c)$. 我们有关系 $\tilde{\mathcal{M}}(c)\subseteq\tilde{\mathcal{A}}(c)\subseteq\tilde{\mathcal{N}}(c)$. Aubry 集和 Mather 集都是切丛上的 Lipschitz 图, 即投影算子的逆 $\pi^{-1}:\mathcal{A}(c)\to\tilde{\mathcal{A}}(c)$ 和 $\pi^{-1}:\mathcal{M}(c)\to\tilde{\mathcal{M}}(c)$ 是 Lipschitz 映射. 而 Mañé 集合则不一定具有这样的性质.

在一般情形下, 我们对于 Mather 集合的结构一无所知. 下面将要谈及的 Kolmogorov 不变环面, 某些低维不变环面 [18] 支撑着某种不变测度. 对于保面积扭转映射这样一种比较特殊的 Hamilton 系统, 我们知道所有 Mather 集的结构. 在介绍扭转映射的结果前, 先简单回顾关于圆周自映射的 Denjoy 理论. 考虑圆周上的同胚映射 $f:\mathbb{T}\to\mathbb{T}$, Poincaré 引进了旋转数, 记为 $\rho(f)$. 它表示任意一个点在映射 f 下的平均旋转速度. 如果旋转数是无理数且一条轨道在圆周上构成稠密集, 则存在圆周上的同胚 h 使得如下左边的交换图成立:

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{T} & \xrightarrow{x\to x+\omega} & \mathbb{T}\\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h}\\ \mathbb{T} & \xrightarrow[f]{} & \mathbb{T},\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{ccc}\mathbb{T} & \xrightarrow{x\to x+\omega} & \mathbb{T}\\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h}\\ D_\omega & \xrightarrow[f]{} & D_\omega.\end{array}$$

Arnold [19] 提出问题, 当 f 是微分同胚时, h 是否也可以是微分同胚? Herman [20] 和 Yoccoz [21] 及后续的工作对此给出肯定答案. 如果轨道不构成稠密集, 则存在 Cantor 集合 D_ω 半共轭于刚体旋转, 使得如上右边的交换图成立, 这里的 h 不再是同胚, 而是魔鬼阶梯函数. 我们称 D_ω 为 Denjoy 集合.

恰当 (exact) 的保面积扭转映射 $(x,y)\in T^*\mathbb{T}\to(x',y')\in T^*\mathbb{T}$ 由生成函数 $S(x,x')$ 以如下形式给出, 即 $y'=\frac{\partial S}{\partial x'}$, $y=-\frac{\partial S}{\partial x}$. 函数 S 一般称为离散形式的 Lagrange 量. 构型 $(\ldots,x_i,x_{i+1},\ldots)$ 称为极小构型, 如果

$$\sum_{i=j}^{k-1}S(x_i,x_{i+1})\leqslant\sum_{i=j}^{k-1}S(x_i',x_{i+1}')$$

对于任意 $j<k$ 以及满足条件 $x_j'=x_j$ 和 $x_k'=x_k$ 的任意构型 $(x_j',x_{j+1}',\ldots,x_k')$ 成立. 由于关系

$$\frac{\partial S}{\partial x'}(x_{i-1},x_i)+\frac{\partial S}{\partial x}(x_i,x_{i+1})=0$$

沿极小构型成立, 它决定了一条映射的轨道 $(\ldots,(x_j,y_j),\ldots,(x_k,y_k),\ldots)$, 称其为极小轨道. Moser [22] 试图以另一种方式推广到高维, 但是后续工作不多.

由 Aubry-Mather 理论可知, 对于任一无理旋转数 ω, 映射或者具有一个不变圈或一个嵌入在光滑闭曲线上的 Denjoy 集合. 限制在不变圈时, 映射共轭于旋转数为 ω 的刚体旋转; 限制在 Denjoy 集合上时, 映射半共轭于这样的刚体旋转. 这种 Denjoy 集合对每一个无理旋转数而言是唯一的, 称其为 Aubry-Mather 集 [23]. 对于有理旋转数, 极小集就是由周期轨道构成. 这里极小是全局极小. 当不变圈不存在时, 还存在无穷多局部较小的 Denjoy 集合 [24]. 全局极小的是 Mather 集, 落在 $\deg=1$ 的嵌入圆周上, 而局部极小的 Denjoy 集合落在 $\deg>1$ 的嵌入圆周上.

保面积扭转映射是柱面 $T^*\mathbb{T}$ 到自身的映射. 以两个不变圈为边界, 我们就得到一个圆环域. 如果在该圆环域内没有其他不变圈, 则称其为 Birkhoff 不稳定域. Mather [25] 证明了该区域中任意两个极小轨道不变集 (Aubry-Mather 集合或极小周期轨道集) 之间都存在连接轨道. Mather 的证明很复杂, 但利用上同调等价的性质可以将其简化为一句话, 即这些 Aubry-Mather 集之间都具有上同调等价关系, 因而存在连接轨道.

为在 $T\mathbb{T}^n$ 上定义上同调等价关系, 称 $\mathbb{T}^n$ 的截面 Σ 是环面 $\mathbb{T}^{n-1}$ 的非退化嵌入, 如果存在光滑嵌入映射 $\phi:\mathbb{T}^{n-1}\to\mathbb{T}^n$ 使得 Σ 是该映射的像, 并且导入映射 $\phi_*:H_1(\mathbb{T}^{n-1},\mathbb{Z})\to H_1(\mathbb{T}^n,\mathbb{Z})$ 是单射. 给定一上同调类 c, 假设存在一个非退化嵌入的截面 Σ_c 使得所有的 c- 极小曲线都横截穿过该截面.

对于自治 Lagrange 系统, 考虑 $\mathcal{N}(c)\cap\Sigma_c$ 的一阶同调群. 由于 $\mathcal{N}(c)$ 是闭集, 因此存在开邻域 U 使得对于所有 $\mathcal{N}(c)$ 的开邻域 $U'\subseteq U$ 都有

$$H_1(U'\cap\Sigma_c,\mathbb{Z})=H_1(U\cap\Sigma_c,\mathbb{Z}),$$

从而可以记为 $H_1(\mathcal{N}(c)\cap\Sigma_c,\mathbb{Z})$. 作为 $H_1(\mathbb{T}^n,\mathbb{Z})$ 的子群 $i_{U*}H_1(\mathcal{N}(c)\cap\Sigma_c,\mathbb{Z})$, 其零化子 (annihilator) 构成 $H^1(\mathbb{T}^n,\mathbb{R})$ 的子群, 记为 $\mathbb{V}_c^{\perp}$, 对于所有的 $c\in\mathbb{V}_c^{\perp}$ 和 $g\in i_{U*}H_1(\mathcal{N}(c)\cap\Sigma_c,\mathbb{Z})$ 都有

$$\langle g,c\rangle=\oint_{\gamma_g}\eta_c=0,$$

这里 γ_g 和 η_c 分别是 g 和 c 的代表元. 称 c 上同调等价于 c' 是指存在一条连续道路 $\Gamma:[0,1]\to H_1(\mathbb{T}^n,\mathbb{R})$ 连接 c 与 c', 沿着 Γ- 道路 α 函数保持常数, 对于每一个 $s\in[0,1]$ 都存在 $\delta_s>0$ 使得对于所有的 $s'\in(s-\delta_s,s+\delta_s)$ 都有 $\Gamma(s)-\Gamma(s')\in\mathbb{V}_{\Gamma(s)}^{\perp}$.

对于非自治系统, 我们将 t 当成第 $n+1$ 个角变量, 与之相对应将上同调类扩展为 $\tilde{c}=(c,-\alpha(c))$, 曲线表示为 $(\gamma(t),t)$. 截面 $\Sigma_{\tilde{c}}$ 是取在扩展构型空间 $\mathbb{T}^{n+1}$ 中的 n 维非退化嵌入环面. 去除沿着整条 Γ- 道路上 α 函数保持常数的限制, 我们也可以类似定义非自治系统的上同调等价关系.

定理 2.1 [26–28] 如果上同调类 c 和 c' 相互等价, 则存在轨道连接 $\tilde{\mathcal{M}}(c)$ 与 $\tilde{\mathcal{M}}(c')$.

该定理给出了一种局部连接轨道的机制, 如果 $\tilde{\mathcal{N}}(c)$ 的一阶同调类有缺陷, 则在其对偶空间的垂直方向上的 Mañé 集之间可以有连接轨道. 还有另外一种连接轨道的机制, 即稳定与不稳定流形横截相交的变分形式. 为此, 我们引入 Hamilton-Jacobi 方程弱 KAM 解的概念.

所谓 Hamilton-Jacobi 方程弱 KAM 解其实就是一种黏性解, 它是 Lax-Oleinik 算子的不动点. 以自治系统为例,

$$T_t^-u(x)=\inf_{\gamma}\left\{u(\gamma(0))+\int_{-t}^{0}(L-\eta_c+\alpha(c))(\dot{\gamma}(s),\gamma(s),s)ds\right\}$$

定义了负向 Lax-Oleinik 算子. 它具有不动点 $u^-(x)$ (参见文献 [29]). 这种不动点实际上就是 Hamilton-Jacobi 方程 $H(x,\partial u+c)=\alpha(c)$ 的黏性解. 对于 Tonelli 型 Lagrange 量而言, 这些不动点是 Lipschitz 函数, 因而几乎处处可微. 在可微点 x 处, $(x,\partial u^-(x))$ 决定了一条负向极小轨道 $\gamma:(-\infty,0]\to\mathbb{T}^n$ 使得 $\gamma(0)=x$, $\dot{\gamma}(0)=\partial_yH(x,\partial u^-(x))$. 类似还可以定义正向 Lax-Oleinik 算子 T_t^+, 其不动点 u^+ 在可微处唯一决定了正向极小轨道. 对于非自治系统, Lax-Oleinik 算子在通常意义下不一定收敛 [30]. 严军和王楷植构造了一类新型的算子半群, 作用在任意连续函数上都收敛到 Hamilton-Jacobi 方程的黏性解 [31]. 负向解是半凹函数 (可以表示成为凹函数与二次可微函数之和), 正向解是半凸函数 (可以表示成为凸函数与二次可微函数之和). Mather 集的正负向弱 KAM 解 u^+ 和 u^- 决定了这个集合的稳定和不稳定集合. 如果 Mather 集是低维环面, 则非退化时就具有双曲结构. 这时正负弱 KAM 解就决定了局部稳定与不稳定流形 $W^{\pm}=\mathrm{Graph}(du^{\pm})$. 当 Mather 集不具有流形结构时, 稳定与不稳定流形不再存在, 但决定稳定与不稳定集合的生成函数依然存在. 稳定与不稳定流形相交意味着障碍函数 u^--u^+ 在那一点达到临界. 由于障碍函数是半凹函数, 所以它在极小点处可微, 在此处有 $\partial u^+=\partial u^-$. 因此, 障碍函数的极小点决定了一条同宿轨道. 该极小点与其他极小点不连通则意味着拓扑横截相交. 在这种情形下, 由 λ- 引理可知该 Mather 集与邻近的 Mather 集之间有连接轨道.

弱 KAM 解在全局范围上一般不是经典解, 特征线相交产生奇性. Cannarsa 和程伟利用内蕴方法给出了奇点沿广义特征线传播的全局理论 [32]. 他们又建立了紧流形上 Aubry 集的补集与弱 KAM 解割迹的同伦等价性 [33]. 弱 KAM 理论还可以扩展到切触形式的 Hamilton-Jacobi 方程. 它包含了带阻

尼的 Duffing 方程等重要的非能量守恒模型. 严军、王林和王楷植等率先就此展开研究, 创立隐式变分原理并建立了切触系统的正负向 Lax-Oleinik 半群 [34], 证明了静态方程解的存在性 [35], 建立了相应的 Mather 理论 [36].

3 Kolmogorov 定理

给定一 C^2- 光滑 Hamilton 函数 $H(x,y,t)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^{2n}$, 我们就得到一组 n 个自由度的 Hamilton 方程 (2.1). 作为研究 Hamilton 系统的开始, 人们自然会考虑寻找足够多的相互独立的首次积分. 函数 $F(x,y)$ 称为 H 的首次积分是指该函数沿着方程的任意解曲线保持常数, 这意味着二者的 Poisson 括号为 0, 即

$$\{F,H\}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial H}{\partial y_i}-\frac{\partial F}{\partial y_i}\frac{\partial H}{\partial x_i}\equiv 0.$$

定理 3.1 (Liouville) 对于 n 个自由度自治 Hamilton 系统 (2.1) 而言, 如果存在 n 个函数 $F_1=H,F_2,\ldots,F_n$ 满足如下条件:

(1) 对于所有 $1\leqslant i,j\leqslant n$ 有 $\{F_i,F_j\}\equiv 0$ 成立;

(2) 对于等值面 $M_{\mathbf{F}}=\{(x,y):F(x,y)=f_i,i=1,2,\ldots,n\}$ 上的所有点 (x,y) 而言, n 个 1- 形式 $dF_1,\ldots,dF_n$ 相互线性独立,

则有以下结论成立:

(1) $M_{\mathbf{F}}$ 是光滑的流 Φ_H^t 不变流形. 如果紧致连通, 则同胚于 n 环面 $\mathbb{T}^n=\{q_1,q_2,\ldots,q_n:\mathrm{mod}\,2\pi\}$;

(2) 在 $M_{\mathbf{F}}$ 上相流 Φ_H^t 为拟周期或周期, 在角坐标 $q=(q_1,q_2,\ldots,q_n)$ 下的方程为 $\dot{q}=\omega(\mathbf{f})$. 这意味着存在作用 - 角变量坐标 (p,q), 在正则变换 $(x,y)\to(p,q)$ 之下 Hamilton 量为 $H(x,y)=h(p)$, 即方程显式可解.

根据早在 400 年前就发现的 Kepler 第二定律, 对每一个行星而言, 太阳和行星的连线在相当的时间内扫过相等的面积. 这个面积就是作用量 p. 当然, 我们现在知道这只是近似. 而这种面积变量的变化则意味着 Arnold 扩散, 这在下面会作进一步阐述.

尽管 Liouville 定理如此之漂亮, 但遗憾的是可积系统在自然界非常稀少. 要研究具有自然背景的 Hamilton 系统, 我们就必须研究不可积系统. 幸运的是, 有不少具有自然背景的系统的数学模型可以归结为近可积系统

$$H(p,q)=h(p)+\epsilon P(p,q),\quad (p,q)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{T}^n,\tag{3.1}$$

如太阳系. 遵循万有引力定律的太阳系由太阳和八大行星组成, 数学上都近似成质点. 作为研究近可积系统的第一步尝试, 人们试图将解函数展开为小参数的级数而利用摄动方法求解. 对此人们必须回答一个问题, 即这样的级数是否收敛? 无论扰动如何之小, 长时间的积累使得人们都不能忽视扰动项的作用. 因共振现象时存在而产生久期项自不必说, 而多重频率因非共振而产生的小分母也使得形式级数难以收敛. 在长期困扰人们后, 这一问题的重大突破由 Kolmogorov [3] 做出:

定理 3.2 设近可积 Hamilton 量 (3.1) 在区域 $\{|\mathrm{Im}q|\leqslant\sigma,|p-p^*|\leqslant s\}$ 上实解析, 且满足非退化条件 $|\frac{\partial^2 h}{\partial p^2}|\neq 0$. 如果旋转频率 $\omega=\partial h(p^*)$ 满足 (D,μ)- 型 Diophantine 条件, 即存在 $D>0$ 和 $\mu>n$ 使得

$$|\langle\omega,k\rangle|=\left|\sum_{i=1}^{n}k_i\omega_i\right|\geqslant\frac{D}{|k|^{\mu}},\quad\forall\,k\in\mathbb{Z}^n\backslash\{0\},$$

则存在 $\epsilon^* = \epsilon^*(h, \sigma, D, \mu) > 0$ 使得对于所有 $\epsilon \leqslant \epsilon^*$, Hamilton 量 (3.1) 所决定的流 Φ_H^t 具有实解析不变流形 $M_\omega = \{p = p^* + U(\phi), q = \phi + V(\phi) : \phi \in \mathbb{T}^n\}$, 其中 $\phi(t) = \omega t + \phi(0)$, U 和 V 在 $\{|\mathrm{Im} q| \leqslant \frac{1}{2}\sigma\}$ 实解析, 当 $\epsilon \to 0$ 时有 $|U|, |V| \to 0$.

可以看出, 这个不变流形就是标准环面 $p = p^*$ 的微小变形. 只要常数 $D > 0$ 足够小而 $\mu > n$, 满足 (D, μ)- 型 Diophantine 条件的频率构成 Lebesgue 测度接近全测的集合. 这意味着, 在足够小的扰动下, 系统在接近全测的意义下依然是可积的! 由于系统在不同的不变环面上具有不同的旋转频率, 因此, 统计力学的基础 - 遍历性假设在数学意义下不再正确: 空间平均不等于沿着大部分轨道的时间平均. 幸运的是, 这个初看上去令人震惊的结论并不影响统计力学的应用. Kolmogorov 定理要求的 $\epsilon > 0$ 随着自由度数目的增加而急剧减小, 以至于在应用时就认为是零. 我们将在本文后面再探讨这一定理的意义.

该定理的证明由一系列近似恒等变换来实现, 类似于 Newton 迭代. 在纪念 Moser 的文章 [37] 中, Mather 等对此做了精准的评价. 要实现 Newton 迭代, 我们必须求解线性化方程. 为此, 证明线性导算子的逆存在且有界就成为关键. 遗憾的是, 这一点往往难以做到. Kolmogorov 设计的迭代放弃了证明线性导算子的逆存在且有界这一想法, 用充分接近的割线取代切线 (线性导算子). 这样引起的收敛速度虽然由指数 2 次减慢为指数 $1 + \delta$ 次, 但仍然能够保证这无穷多次迭代的复合收敛. 每一次的近似恒等变换由 Hamilton 流 Φ_W^t 的周期时间映射 $\Phi_W = \Phi_W^t|_{t=1}$ 产生, 于是有

$$H\Phi_W = h + \epsilon P + \{h + \epsilon P, W\} + \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)\{\{P, W\}, W\}\Phi_W^t dt.$$

令 $[P] = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} P dq_1 \cdots dq_n$. 如果选择函数 W 满足同调方程 $\langle \omega, \partial_x W\rangle + \epsilon(P - [P]) = 0$, 则 Hamilton 量在变换下具有形式 $H\Phi_W = (h + \epsilon[P])(p) + \epsilon^{1+\delta}P_1(p, q)$, 其中 $|\epsilon^{1+\delta}P_1(p, q)| \leqslant \epsilon^{1+\delta}$ 是以解析区域适当收缩而实现的. 最终, $\lim_{k\to\infty}\Phi_{W_1}\Phi_{W_2}\cdots\Phi_{W_k}$ 在 $\{|\mathrm{Im} q| \leqslant \frac{1}{2}\sigma, p = p^*\}$ 上收敛.

任意自由度的 Kolmogorov 定理的完整证明在解析条件下由 Arnold [38] 给出. 在解析函数范畴内, 函数导数的上界由函数值和解析区域的大小决定, 这使得坐标变换迭代收敛性的分析比较容易. 在二维保面积情形下, 运用光滑化技巧, Moser [39, 40] 将光滑性降低至 333 阶可微.

在完成 Kolmogorov 定理证明的同时, Arnold [19] 也把相关理论应用到天体力学的一类 n 体问题的研究. 考虑若干个天体, 其中一个天体比其他所有天体的质量大得多. 在小偏心率、小倾斜角和小天体之间不碰撞的条件之下, 该问题的数学模型是近可积 Hamilton 系统. 然而, 由于该模型缺失 Kolmogorov 定理所要求的非退化性, 人们并不能直接应用该定理. 为此, Arnold 将角变量分为快变和慢变两类角变量, 提出利用小扰动项的平均来补偿非退化性. 他就平面三体问题进行了深入研究. 在 Féjoz 的工作 [41] 之后, Chierchia 和 Pinzari 发现对于 $n+1$ 体问题而言, 在 $6n$ 维相空间中存在 $6n-2$ 维不变叶层结构. 限制在这种不变叶层上, Kolmogorov 退化性不再出现, 从而圆满地解决了该问题 [42]. 也许受 Arnold 这一工作的影响, 人们关心是否可以将 Kolmogorov 非退化条件减弱. Rüssman 提出可以将条件 $|\frac{\partial^2 h}{\partial p^2}| \neq 0$ 减弱为频率映射 ∂h 的像不落在某一超平面中这一条件, 后来称其为 Rüssman 非退化条件. Arnold 等的书 [43] 中指出程 - 孙、Herman、Rüssman 和 Sevryuk 分别给出证明, 文献 [44] 是第一个正式发表. 容易看出, Rüssman 条件是保证 Kolmogorov 定理成立的最弱非退化条件.

Kolmogorov 定理不仅可以对于近可积 Hamilton 系统建立, 而且对于一类不具有恰当辛结构的保体积映射也可以建立 (参见文献 [45]): $(I, \phi, \psi) \in \mathbb{R}\times\mathbb{T}^2 \to (I_1, \phi_1, \psi_1) \in \mathbb{R}\times\mathbb{T}^2$,

$$I_1 = I + \epsilon U(I, \phi, \psi),$$
$$\phi_1 = \phi + f(I) + \epsilon V(I, \phi, \psi),$$

$$\psi_1 = \psi + g(I) + \epsilon W(I, \phi, \psi),$$

其中 $\{(f(I), g(I)) : I \in \mathbb{R}\}$ 构成一条弯曲的曲线. 我们证明, 对于足够小的 $\epsilon > 0$, 该映射存在许多 2 维不变环面, 它们构成一个接近 Lebesgue 全测的无处稠密的闭集. 这个结果有不少重要应用. 一是否定了源于 Boltzman 的在保体积范畴内的拟遍历猜测, 因为 2 维不变环面阻挡了在 3 维空间内到处游走的轨道; 二是否定了 Pesin 的正 Lyapunov 指数猜测, 证实了非一致双曲系统在保体积微分同胚范畴内不通有, 因而此结果的存在导致微分动力系统专家需要研究部分双曲系统 (参见文献 [46–48]); 三是在 3 维不可压缩流体中的应用 (参见文献 [49, 50]), 实验观察到流体中确实有这种现象 (参见文献 [51]). 这个结果可以平行推广至一个作用量, 任意个角变量的保体积映射, 技术上没有难度. Herman、de la Llave 和夏志宏等做了这种推广 (参见文献 [52–55]).

在 Moser 的工作之后, Herman、Rüssman 和 Pöschel 将光滑性条件降至 $C^{2n+\delta}$. 就保面积扭转映射 (相当于 $n = 2$) 这一特殊情形, Herman [56, 57] 证明了光滑性要求至少为 C^4, 否则 KAM 不变圈就可能不存在. 在 Herman 这一结果发表 30 年后, 我们证明了对于任意 n 个自由度的近可积 Hamilton 系统而言, 光滑性要求至少为 C^{2n}, 否则就有反例 (参见文献 [58, 59]): 指定任意 Diophantine 频率 ω, 存在 $C^{2n-\delta}$- 拓扑下任意小的扰动打破该旋转频率的不变环面. 注意到不变环面实际上是 Hamilton-Jacobi 方程经典解的微分的图像, 该结果说明 Hamilton-Jacobi 方程在高能量处的经典解的存在性居然与 Hamilton 函数的光滑性有关. 另一方面, 通有情形下, 方程在低能量处不存在经典解 [28], 与 Hamilton 函数的光滑性无关.

对于有限自由度 Hamilton 系统, 这方面的工作还有双曲型 [60, 61]、椭圆型不变环面的存在性 [62] 及共振环面破裂后残留的低维环面 [63–67] 的存在性等工作.

对于 Hamilton 偏微分方程如非线性波动方程, 非线性 Schrödinger 方程等, 自 20 世纪 80 年代起开始有工作利用各种改进的 KAM 迭代技术证明小振幅拟周期解 (有限维环面) 的存在性, 其中有 Craig 和 Wayne [68, 69] 关于非线性波动方程的工作, Bourgain [70]、Eliasson 和 Kuksin [71] 关于高维非线性 Schrödinger 方程的工作, 刘建军和袁小平关于在无界扰动下拟周期解的存在性的工作 [72, 73] 等. 关于有限或无限维系统中低维环面存在性有大量的论文发表, 不在此一一列举.

4 Arnold 扩散

根据 Kolmogorov 定理, 近可积系统的相空间大部分由不变环面所占据 (Lebesgue 测度意义下). 但是, 这些环面构成的集合是一个无处稠密的闭集. 对于 n 个自由度的自治系统而言, 相空间分层为一族 $2n-1$ 维等能量面. 每一个等能量面关于 Hamilton 流不变. 当 $n \geqslant 3$ 时, n 维环面不分割 $(2n-1)$ 维等能量面. 这意味着这些不变环面的余集是连通集. 一个自然的问题便是, 是否存在轨道在此余集中到处游走?

作为研究该问题的第一步, Arnold [5] 构造了一个特殊的两个半自由度的 Hamilton 系统

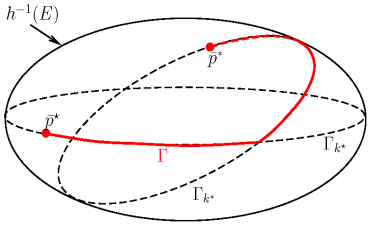
$$H(p, q, t) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \epsilon(\cos q_1 - 1)(1 + \mu(\cos q_2 + \cos t)). \tag{4.1}$$

他证明了, 对于任意的 $A < B$, 该系统存在轨道 $(p(t), q(t))$ 连接区域 $\{p_2 < A\}$ 与 $\{p_2 > B\}$. 尽管这个例子非常特殊, 他仍然猜测多自由度近可积 Hamilton 系统具有动力学不稳定性. 考虑近可积 Hamilton 系统

$$H(p, q) = h(p) + \epsilon P(p, q), \quad (p, q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n. \tag{4.2}$$

猜测 [6]: 在自由度不小于 3 的一般情形下, 近可积 Hamilton 系统 (4.2) 具有一条轨道先后穿过位于等能量面的同一连通分支上任意两点 p' 和 p'' 的任意小邻域.

这就是所谓 Arnold 扩散猜测. 由于相空间具有很多的不变环面, 因此, 这种轨道应该出现在共振线附近. 为了运用变分方法, 考虑正定系统, 即 h 是 y 的严格凸函数, 经典力学系统便满足这样的条件. 以 3 个自由度系统为例, 对于 $E > \min h$, 等值面 $h^{-1}(E)$ 是 3 维空间中的椭球面. 给定 $k \in \mathbb{Z}^3\backslash\{0\}$, 共振平面 $\langle k, \omega\rangle = 0$ 与 $\partial h(h^{-1}(E))$ 相交于一条道路 Γ_k. 在 Γ_k 与 $\Gamma_{k'}$ 相交处的频率满足两个共振关系. 给定 k, 如果 $\|k'\|$ 的模不大, 则称该频率是 (强) 双共振点, 否则称其为弱双共振. 共振线上大部分频率满足单共振或弱双共振条件. 如图, 我们希望构造轨道, 使得其作用量从 $\bar{p}^*$ 出发, 沿着 Γ_{k^*} 与 $\Gamma_{k^\star}$ 缓慢地变化到 $\bar{p}^\star$.



根据文献 [74], 我们可以选择适当多的双共振点 $\{p_i\}$, 以其为中心的若干圆盘 $\{p : \|p - p_i\| \leqslant \rho_i\}$ 覆盖该道路. 半径 $\rho_i = O(\epsilon^\sigma)$, 其中 σ 介于 $\frac{1}{3}$ 到 $\frac{1}{7}$ 之间, 与第二共振关系有关. 限制在每一个双共振的圆盘内, 通过齐次化变换和等能量约化, 我们得到以下形式的两个自由度周期非自治系统 [74]:

$$G_\epsilon(x, y, \tau) = \frac{1}{2}\langle Ay, y\rangle - V(x) + \epsilon^\sigma R\left(x, y, \frac{\tau}{\sqrt{\epsilon}}\right), \quad (x, \tau) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}, \quad \|y\| \leqslant O(\epsilon^{\sigma - \frac{1}{2}}), \tag{4.3}$$

其中 A 是正定矩阵, $x = (x_1, x_2)$, $x_1 = \langle k', q\rangle$, $x_2 = \langle k'', q\rangle$, $k' = k^\star$ 或 k^*, k_i'' 是 p_i 点处的第二个共振关系, 坐标 y 是坐标 x 的辛对偶, $V = V_{k'}(x_1) + V_{k', k_i''}(x_1, x_2)$,

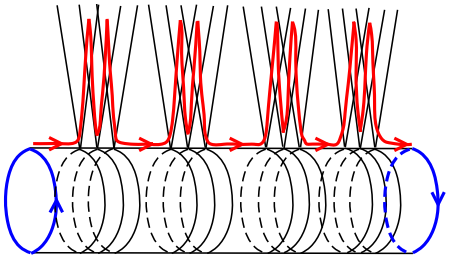
$$V_{k'} = -\sum_{j \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}} P_{jk'}(p_i) e^{j\langle k', q\rangle i},$$
$$* V_{k', k_i''} = -\sum_{(j,l) \in \mathbb{Z}^2, l \neq 0} P_{jk' + lk_i''}(p_i) e^{(j\langle k', q\rangle + l\langle k_i'', q\rangle)i},$$

其中 $P_{jk'}$ 和 $P_{jk' + lk_i''}$ 是 P 展开为关于 q 的 Fourier 级数的相关系数. 由于 $|P_k| \leqslant \|P\|_{C^m}|k|^{-m}$, 条件 $m \geqslant 3$ 和 $|k_i''|$ 足够大就可以保证 $V_{k', k_i''}$ 的 C^2- 模足够小. 首先考虑系统 $\frac{1}{2}\langle Ay, y\rangle - V_{k'}(x_1)$. 容易看出 $V_{k'}$ 的非退化极小点 x_1^* 对应着法向双曲不变柱面

$$\Pi_0 = \{(x, y) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2 : x_1 = x_1^*, y = A^{-1}(0, \omega), \omega \in \mathbb{R}\}.$$

应用法向双曲不变流形定理 [75] 可知, 如果 $|k_i''|$ 足够大, 则项 $V_{k', k_i''}(x)$ 可以作为小扰动处理, 因而, Hamilton 量 $\frac{1}{2}\langle Ay, y\rangle + V(x)$ 决定的流在 Π_0 的邻域内也具有法向双曲不变柱面 Π. 在这种情形下, 我们得到所谓预双曲 (a priori unstable) 系统. 因此, 给定一个通有性扰动 $P(p, q)$, 需要作为强双共振处理的共振点个数与 ϵ 无关. 而对于相对比较小的 $|k_i''|$, 我们无法将 $V_{k', k_i''}(x)$ 作为小扰动处理, 因而系统无法约化称预双曲系统. 这就是著名的双共振问题. 因此, 3 个自由度近可积系统 Arnold 扩散的研究分为两个阶段, 一是研究预双曲系统沿着柱面的轨道扩散, 二是如何通过双共振.

预双曲系统沿着柱面的轨道扩散研究主要有两点困难, 一是 gap 问题, 二是横截相交的通有性问题. 我们之所以说 Arnold 构造的例子 (4.1) 非常特殊就是因为这些问题不出现. 在这个例子中, 双曲柱面全部由不变圈构成. 每一个不变圈的稳定与不稳定流形横截相交, 从而导致一个不变圈的不稳定流形与附近不变圈的稳定流形相交而形成转移链. 根据 λ- 引理, 我们就可以得到沿着柱面扩散的轨道. 在通有情形下, 这两个问题会出现. 对于 $\frac{1}{2}\langle Ay,y\rangle - V(x)$ 决定的流限制在柱面 Π 上是可积系统. 根据法向双曲不变流形定理, 在小扰动 $\epsilon^\sigma R$ 之下, 流 $\Phi^t_{G_\epsilon}$ 决定的周期时间映射 (Poincaré 映射) 也具有一法向双曲不变柱面 Π_ϵ, 是 Π 的微小变形. 限制在该柱面上, 我们得到一个近可积保面积扭转映射. 对于共振旋转数, 柱面上会出现 Birkhoff 不稳定域. 对于强共振, 不稳定域的宽度达到 $O(\epsilon^{\frac{\sigma}{2}})$ 量级. 从而导致不稳定域一侧不变圈的不稳定流形可能无法与另一侧不变圈的稳定流形相交. 这就是所谓的 gap 问题. 在不变圈聚集的地方, 我们也必须验证这种横截相交性对于所有的不变圈都成立. 由于这些不变圈有不可数无穷多, 构成 Lebesgue 正测集, 这种验证亦非易事. 在严军与笔者合作的工作 [26, 76] 中, 这两个问题得到了解决. 由于 Birkhoff 不稳定域中没有不变圈, 因而所有相应的 Mañé 集限制在时间截面上是完全不连通集合. 所以, 它们之间具有平凡的上同调等价关系 (一种最简单的等价关系). 这也顺便解释了 Mather 的证明 [25] 为什么可以大幅度简化. 通过证明障碍函数具有 $\frac{1}{2}$-Hölder 模连续性, 横截相交问题得到解决. 所以, 在把上同调等价机制和 Arnold 机制的变分框架结合后, 我们解



决了预双曲系统沿着柱面的轨道扩散的通有性 (residual) 问题. 如上图, 红色曲线表示扩散轨道, 但是忽略了它围着柱面旋转的分量. 文献 [77] 中证明也存在完全以异宿轨机制扩散的轨道. Treschev [78] 利用分界线映射证明了 cusp-residual 性质. 所谓 cusp-residual 性质是指在函数空间的单位球上存在一个 residual 集合, 对于该集合的每一个扰动函数 P, 存在 $\epsilon > 0$ 使得扩散存在. 这里 ϵ 的下界是 0, 而 residual 性质是指存在 $\epsilon > 0$, 在半径为 ϵ 的球中存在通有集合, 对于该集合中的每一个扰动函数扩散均存在. 所以, cusp-residual 比 residual 弱得多. de la Llave 等利用共振二次环面的想法证明了一类预双曲系统的扩散问题 [79], 但这个方法仅能处理只含有限 Fourier 展开项的扰动项, 当展开项趋向无穷多时, $\epsilon \to 0$, 因而不具有通有性. Bernard 在文献 [80] 中将我们提出的两种机制总结成他所定义的等价关系这样一个抽象框架: 两个 Mather 集 $\tilde{\mathcal{M}}(c)$ 和 $\tilde{\mathcal{M}}(c')$ 称为等价, 如果存在道路 $\Gamma{:}[0,1] \to H^1(M,\mathbb{R})$ 使得 $\Gamma(0) = c$, $\Gamma(1) = c'$, 对于任意的 $s \in [0,1]$, 或者 $\tilde{\mathcal{M}}(\Gamma(s))$ 具有离散的极小同宿轨, 或者 $\tilde{\mathcal{N}}(\Gamma(s))\,|_{t=0}$ 是完全不连通集合. 第一种情形就是 Arnold 机制, 但离散极小同宿轨这一条件是否通有并不清楚, 我们只是证明了极小同宿轨完全不连通是通有性条件, 但这对于扩散轨道的通有性构造是足够了. 第二种情形就是上同调等价的最简单情形, 不包括我们为解决双共振问题而发现的非平凡的上同调等价关系 (参见文献 [28]).

双共振问题由于我们新发现了一种上同调等价关系而获得解决 (参见文献 [28, 81, 82]). 作为第一步, 首先考虑 Hamilton 量 (4.3) 的主部, 是两自由度经典力学系统

$$G(x,y) = \frac{1}{2}\langle Ay,y\rangle - V(x). \tag{4.4}$$

这是一个不可积系统. 利用变分方法我们证明 (参见文献 [82]), 任给同调类 $g \in H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z})$, 任给能量区间 $0 < E_0 < E_1 < \infty$ 以及对于通有的势能函数 V, 该力学系统存在有限段伦型为 g 的法向双曲不变柱面. 势能 V 具有唯一不动点且非退化这一条件保证系统在低能量段具有唯一伦型为 g 的法向双曲不变柱面, 而 A 的正定性保证了在高能量段这种柱面的存在唯一性 (参见文献 [81]). 注意到 Mañé 集 $\tilde{\mathcal{N}}(C)$ 位于 $E = \alpha(c)$ 的能量面上, 我们建立了这样一种上同调等价关系: 存在 $d > 0$ 使得对于任意 $E \in [0, d]$ 所有位于等值闭曲线 $\alpha^{-1}(E)$ 上的上同调类都互相等价. 上同调道路上的 $\tilde{\mathcal{N}}(c) \cap \Sigma_c$ 不一定是完全不连通集合, 可以含有不可收缩的闭圈 γ 但 $\langle \gamma, c' - c \rangle = \int_\gamma \eta_{c'-c} = 0$ 对于充分接近于 c 的 $c' \in \alpha^{-1}(E)$ 成立. 在周期小扰动之下, 这种等价关系仍然成立. 注意到伦型为 g 的法向柱面决定了上同调类空间的一个通道 $\mathscr{L}(g)$, 从 $\alpha^{-1}(\epsilon^{2\sigma-1})$ 延伸进入 $\{c : 0 < \alpha(c) < d\}$, 这意味着基于这种上同调等价而存在的连接轨道可以连接两个柱面, 从而实现了构造扩散轨道穿过双共振区域 (参见文献 [28, 83]). 在 cusp-residual 意义下 3 个自由度近可积正定系统的 Arnold 扩散的存在性因而是直接推论 (参见文献 [74]).

Mather 自 2002 年便宣布能够解决双共振问题 [84], 且在后来的十余年中一直声称他能够证明此事[1)], 但最终未能达到目的. 为了解释他的想法, 不失一般性, 假设势能函数在 $x = 0$ 达到唯一极小点并且非退化. 这样 $(x, y) = 0$ 是具有不可缩同宿轨的双曲不动点 [85]. 由于对称性 $G(x, y) = G(x, -y)$, 该不动点具有至少两对最小同宿轨, 每一对同宿轨对应于一对同调类 $\pm g_i$. 这些同调类在正整数系数下张成整个 $H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z})$. 选定的共振线对应的同调类或者正好是某个同调类 g_i, 或者是相邻的两个同调类的组合 $k_i g_i + k_j g_j$. 在第二种情形下, Mather 认为应该有伦型为 $k_1 g_1 + k_2 g_2$ 的法向双曲不变柱面从远处延伸至不动点附近. 扩散轨道沿着这些柱面延伸至不动点对应的周期解附近, 然后跳转至 g_i 的上同调对偶通道里穿过双共振. 至于 Mather 以何种方式构造穿过双共振的轨道, 笔者不得而知. 不久前 Marco 为此提出一个方案 [86, 87]. 他认为从一对同宿轨出发可以延拓出一个带洞的法向双曲不变柱面, 这是一个带边的流形. 同宿轨位于零能量面上. 考虑到在周期扰动下带边流形会损失一部分, 我们需要将该带边流形向负能量区延拓, 这部分区域由可收缩的周期轨道构成. 为了能够应用法向双曲不变流形定理, 我们必须证明该带边流形具有 C^1- 可微性, 而这一点在 Marco 的文章中并没有得到证明. Kaloshin 等的预印本 [88] 虽然长达 180 多页, 但也是采用 Mather 的途径和 Marco 的想法. 然而他们也没有证明这个带洞流形的 C^1- 可微性.

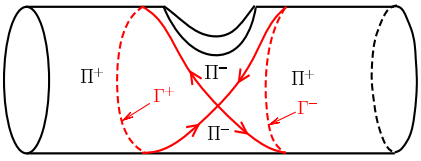
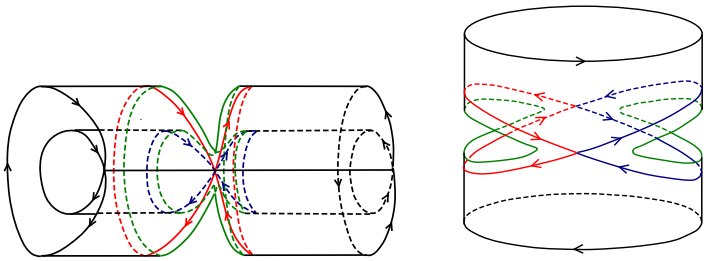


图 1 (网络版彩图) 区域 Π^+ 由正能量周期轨构成, 区域 Π^- 由负能量周期轨构成

该带边流形是由正能量周期轨和负能量周期轨再加上同宿轨拼接而成. 正能量周期轨不可收缩, 而负能量周期轨则可收缩. 除去同宿轨的开区域上的可微性容易证明: 同宿轨附近的最小周期轨是双曲型的, 这意味着 Poincaré 周期回归映射非退化, 从而保证流形在每一条这样的周期轨上的可微性. 但是当周期轨趋向同宿轨时, 回归周期趋于无穷, 同宿轨上不存在回归映射, 人们自然产生这样的疑问, 该可微性能否延拓到同宿轨? 即便可以延伸到同宿轨, 两边的法向导数是否相同? 最近我们对任意多自由度力学系统证明了这种光滑性 (参见文献 [89]). 我们发现, 不仅从一对同宿轨可以向正负能

1) Mather J. Near double resonance. Talks at the conferences on dynamical systems at Nice (2009) and Toronto, Nanjing, Oberwolfach, Edinburgh (2011)

量区延拓出具有一个洞的柱面, 而且可以从任意对具有不同伦型 $\{g_1,\dots,g_m\}$ 的同宿轨延拓出具有伦型为 $\sum_{k=1}^m k_i g_i$ 的带边 C^1- 光滑流形, 这里正整数组 $\{k_1,\dots,k_m\}$ 不可约. 在提升到适当的有限覆盖空间后, 它就是具有 $\sum_{i=1}^m k_i$ 个洞的柱面. 如下图, 以 $m=2$, $k_1=k_2=1$ 为例, 左边是在 $\mathbb{T}^n\times\mathbb{R}^n$ 中的奇异柱面, 两对同宿轨分别用红色线和蓝色线表示, 右图是其在覆盖空间中的提升.



对 n 个自由度的系统 (4.4) 而言, 矩阵 $J\mathrm{diag}\{A,\partial^2V(0)\}$ 具有 n 对实特征根 $(\pm\lambda_1,\pm\lambda_2,\dots,\pm\lambda_n)$, 如果 $x=0$ 是势能 V 的极小点. 上述结果需要以下条件:

(1) $\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n$, 最小同宿轨都沿着特征值 $\pm\lambda_1$ 的特征方向趋向于不动点;

(2) 势能具有较高的光滑性 $V\in C^{2\kappa+1}$, 其中 κ 满足条件 $(\kappa-1)\lambda_1>\lambda_n$.

我们不知道在仅假设 $V\in C^4$ 的条件下如何证明此结果 (参见文献 [88]). 对于足够光滑的系统而言, 文献 [89] 结果说明二共振问题并不引起特殊的困难 (至少对于具有较高光滑性的系统), 扩散轨道的构造与预双曲情形类似, 沿着同调类组合型的法向双曲不变柱面, 应用文献 [26,76] 的方法就可以穿越双共振, 而不需要像 Mather 建议的道路那样费周折, 在穿过双共振前改组合同调类到单个同调类, 在穿越以后再改回到原先的组合同调类道路. 当然, 利用这个结果我们也可以证明 Mather 建议的道路由于 Marco 的发现是行得通的. 这样我们就得到了 3 种不同的通过双共振的道路, 一个值得研究的问题便是, 沿着哪一条路径扩散轨道最多, 扩散速度最快?

对于 $n>3$ 的系统而言, 不仅有二重共振, 而且有三重直至 $n-1$ 重共振关系. 仅仅用文献 [28] 建立的上同调等价关系还不能处理越过多重共振点的问题. 三重以上的共振会导致共振点两端扩散道路对应的上同调类错位. 这一问题可以依据文献 [90] 中得到的障碍函数的模连续性, 在上同调空间中增加一段 "爬楼梯" 路径加以解决. 由此我们对于任意有限自由度正定近可积系统的 Arnold 扩散在 cusp-residual 光滑拓扑意义下在文献 [91] 中给出了证明. 文献 [92] 的题目比较醒目, 实际上他们并没有证明到这一点. 如前所述, 在单共振 (弱双共振) 附近存在一小段法向双曲不变柱面 [93], 因而系统在此附近可以约化为预双曲系统, 直接应用已有的方法, 如文献 [76], 便可得到文献 [92] 的结果: 存在作用量发生小幅度变化的轨道.

既然存在 Arnold 扩散, 那么人们自然会问扩散速度有多快? 根据 Nekhoroshev 以及后续的结果, 在 $\exp(c\epsilon^{-1/2n})$ 的时间尺度内, 作用量只发生 ϵ 量级的变化. 由此可见扩散速度相当缓慢 [94,95].

5 动力学复杂性

根据 Kolmogorov 定理, 这些不变环面构成的集合占据相空间的大部分区域. 但该集合无处稠密, 在其处处稠密的余集中存在扩散轨道. 所以人们自然会问这些不变环面是否具有动力学稳定性. Morbidelli 和 Giorgilli 在 20 世纪 90 年代发现不变环面附近的轨道扩散速度上限是 $O(\exp[-\exp(1/\sigma)])$, 其中 σ 是轨道到不变环面的距离, 即不变环面具有超指数的稳定性 [96]. 如果将扩散速度展开为距离 σ

的 Taylor 级数, 人们则得到扩散 “速度” 为零这样的稳定性结果. 这不禁令人回想起 Lagrange 等 “证明了” 太阳系稳定性的往事.

最近的研究表明, 无论多高精度的近似都会导致人们对于稳定性判断的根本性错误. 张建路等发现, 3 个自由度系统的 Kolmogorov 不变环面在 Lyapunov 意义下不稳定, 在不变环面附近既存在轨道以该环面为其 ω- 极限集 (时间趋于正无穷时, 轨道无限接近不变环面), 也存在轨道以该环面为其 α- 极限集 (时间趋于负无穷时, 轨道无限接近不变环面) [97]. 由于 Kolmogorov 不变环面是覆盖整个构型空间的 Lagrange 子流形, 这些正、负向渐近轨道看来并不像双曲低维不变流形的渐近轨道那样对应于某种生成函数, 后者是以指数速度趋向于低维流形. 众所周知, 除去在稳定或不稳定流形上的轨道, 其他任何轨道的 ω- 或 α- 极限集都不可能正好是该低维流形.

在证明 Kolmogorov 定理之后, Arnold 即指出高维椭圆型不动点是否具有 Lyapunov 动力学稳定性这一问题依然未知 [19]. Douady 构造了一个 4 维辛映射 [98] 说明椭圆不动点可以不具有这样的稳定性: 在该不动点的任意小邻域中都具有轨道离开一个固定的邻域 U. 但这并不意味着椭圆不动点本身是自 U 之外出发的某些轨道的 α- 极限集. 如果椭圆不动点的频率满足共振关系, 根据三自由度 Hamilton 系统中 Arnold 扩散的存在通有性可知该椭圆不动点不仅不具有 Lyapunov 动力学稳定性, 而且是一些轨道的 α- 极限集以及另外一些轨道的 ω- 极限集. 如果频率是 Diophantine 向量, 相同的现象依然存在, 但证明更加复杂, 原理与文献 [97] 中的证明技术基本相同.

Herman 曾经猜测 [1] 在通有情况下多自由度 Hamilton 系统的等能量面上具有稠轨道, 这实际上就是源自 Ehrenfest 的拟遍历猜测 [99]. 笔者认为这是比 Arnold 扩散困难得多的问题, 人们还需要长时间的研究积累才可能解决此问题. 这间接印证了为何 Arnold 扩散如此受到重视, Arnold 选取了一个恰当的切入点, 一方面具有更加惊人和意想不到的物理意义, 另一方面它又不是极端之困难以至于人们不知道如何下手去研究. Birkhoff [100] 曾经研究了负曲率曲面上的测地流, 证明了存在这样的轨道, 其极限集包含了各种伦型的最短闭测地线. 根据 Gauss-Bonnet 公式, 这种曲面的亏格不会小于 2. 所以, Birkhoff 的结果不能应用到构型空间为 $\mathbb{T}^2$ 的力学系统 (4.4). 根据文献 [28, 定理 1.3] 可知, 在低能量面上存在这样的轨道, 其极限集包含了该能量面的所有 Aubry 集合 (极小周期轨一定是对应于某个上同调类的 Aubry 集合).

正如 Moser 所说, 对古老的天体力学问题的长期研究刺激了 Hamilton 动力系统理论的发展 [101]. 从 Newton 开始, 经过 Lagrange、Poincaré、Kolmogorov 和 Arnold 等一大批杰出数学家的不懈努力, 如今我们可以运用 Kolmogorov 理论和 Arnold 扩散等理论来理解太阳系的稳定性, 但还不能直接证明. 如果把受 Newton 万有引力支配的太阳系在作用 - 角变量坐标系下写成近可积形式, 那么 $\epsilon \approx 0.5 \times 10^{-3}$. 这个参数对于物理学家而言也许可以认为很小, 但对于应用 Kolmogorov 定理而言却是太大了. 如何将 ϵ 的上界在数量级上有所提升是一件非常有意义但也非常困难的事. 如果这两个理论可以运用于太阳系, 我们可知太阳系在大概率意义下稳定. 如果初始条件落在不变环面上, 太阳系将永远做拟周期运动, 即各大行星在近似于椭圆的轨道上围绕太阳运行. 由于不变环面集合的余集是处处稠密的小测度集合, 太阳系在小概率意义下将坍塌, 而这个坍塌过程的起始阶段可以用 Arnold 扩散来描述, 各个行星运行的近似椭圆的轨道将逐渐改变 (当行星之间即将相撞时, 系统已经不近可积). 这样的解释和巴黎天文台 Laskar 等的数值计算结果相吻合.

致谢 笔者对审稿人的修改意见表示衷心感谢.

参考文献

1 Herman M. Some open problems in dynamical systems. Doc Math, 1998, 2: 797–808

2 Moser J K. Is the solar system stable? Math Intelligencer, 1978, 1: 65–71
3 Kolmogorov A N. Preservation of conditionally periodic movements with small change in the Hamilton function. Dokl Akad Nauk SSSR, 1954, 98: 527–530
4 Melnikov V K. On the stability of a center for time-periodic perturbations. Trans Moscow Math Soc, 1963, 12: 1–57
5 Arnold V I. Instability of dynamical systems with several degrees of freedom. Sov Math Dokl, 1964, 5: 581–585; translation from Dokl Akad Nauk SSSR, 1964, 156: 9–12
6 Arnold V I. The stability problem and ergodic properties for classical dynamical systems. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Moscow: Mir, 1966, 387–392
7 Diacu F, Holmes P. Celestial Encounters: The Origin of Chaos and Stability. Princeton: Princeton University Press, 1996
8 Laskar J, Gastineau M. Existence of collisional trajectories of Mercury, Mars and Venus with the Earth. Nature, 2009, 459: 817–819
9 Laskar J. Is the solar system stable? Prog Math Phys, 2013, 66: 239–270
10 程崇庆. KAM 理论与 Arnold 扩散: Hamilton 系统的动力学稳定性问题. 中国科学 A 辑: 数学, 2004, 34: 257–267
11 Rabinowitz P H. Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 65. Providence: Amer Math Soc, 1986
12 Ding Y. Variational Methods for Strongly Indefinite Problems. Singapore: World Scientific, 2007
13 Long Y. Index Theory for Symplectic Paths with Applications. Basel: Birkhäuser, 2002
14 Mañé R. Generic properties and problems of minimizing measures of Lagrangian systems. Nonlinearity, 1996, 9: 273–310
15 Mather J. Minimal measures. Comment Math Helv, 1989, 64: 375–394
16 Mather J. Action minimizing invariant measures for positive definite Lagrangian systems. Math Z, 1991, 207: 169–207
17 Mather J. Variational construction of connecting orbits. Ann Inst Fourier (Grenoble), 1993, 43: 1349–1386
18 Cheng C-Q. Minimal invariant tori in the resonant regions for nearly integrable Hamiltonian systems. Trans Amer Math Soc, 2005, 357: 5067–5095
19 Arnold V I. Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics. Russian Math Surveys, 1963, 18: 85–191
20 Herman M. Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle a des rotations. Publ Math Inst Hautes Études Sci, 1979, 49: 5–233
21 Yoccoz J-C. Conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation vérifie une condition diophantienne. Ann Sci École Norm Sup (4), 1984, 17: 333–359
22 Moser J K. Minimal solutions of variational problems on a torus. Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire, 1986, 3: 229–272
23 Mather J. Existence of quasi-periodic orbits for twist homeomorphisms of the annulus. Topology, 1982, 21: 457–467
24 Mather J. More Denjoy minimal sets for area preserving diffeomorphisms. Comment Math Helv, 1985, 60: 508–557
25 Mather J. Variational construction of orbits of twist diffeomorphisms. J Amer Math Soc, 1991, 4: 207–263
26 Cheng C-Q, Yan J. Existence of diffusion orbits in a priori unstable Hamiltonian systems. J Differential Geom, 2004, 67: 457–517
27 Li X, Cheng C-Q. Connecting orbits of autonomous Lagrangian systems. Nonlinearity, 2010, 23: 119–141
28 Cheng C-Q. Dynamics around the double resonance. Cambridge J Math, 2017, 5: 153–228
29 Fathi A. Weak KAM theorem in Lagrangian dynamics, preliminary version number 10. https://www.math.u-bordeaux.fr/~pthieull/Recherche/KamFaible/Publications/Fathi2008_01.pdf, 2008
30 Fathi A, Mather J. Failure of convergence of the Lax-Oleinik semi-group in the time periodic case. Bull Soc Math France, 2000, 128: 473–483
31 Wang K, Yan J. A new kind of Lax-Oleinik type operator with parameters for time-periodic positive definite Lagrangian systems. Comm Math Phys, 2012, 309: 663–691
32 Cannarsa P, Cheng W. Generalized characteristics and Lax-Oleinik operators: Global theory. Calc Var Partial Differential Equations, 2017, 56: 125
33 Cannarsa P, Cheng W, Fathi A. On the topology of the set of singularities of a solution to the Hamilton-Jacobi equation. C R Math Acad Sci Paris, 2017, 355: 176–180
34 Wang K, Wang L, Yan J. Implicit variational principle for contact Hamiltonian systems. Nonlinearity, 2017, 30: 492–515
35 Wang K, Wang L, Yan J. Variational principle for contact Hamiltonian systems and its applications. J Math Pures Appl (9), 2019, 123: 167–200
36 Wang K, Wang L, Yan J. Aubry-Mather theory for contact Hamiltonian systems. Comm Math Phys, 2019, 366:

981–1023
37 Mather J, McKean H, Nirenberg L, et al. Jürgen K. Moser (1928–1999). Notices Amer Math Soc, 2000, 47: 1392–1405
38 Arnold V I. Proof of Kolmogorov's theorem on the preservation of quasi-periodic motions under small perturbations of the Hamiltonian. Russian Math Surveys, 1963, 18: 9–36
39 Moser J K. On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus. Nachr Akad Wiss Göttingen Math-Phys Kl II, 1962, 1: 1–20
40 Moser J K. Remark on the paper: "On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus". Regul Chaotic Dyn, 2001, 6: 337–338
41 Féjoz J. Démonstration du 'théorème d'Arnold' sur la stabilité du système planétaire (d'après Herman). Ergodic Theory Dynam Systems, 1999, 24: 1521–1582
42 Chierchia L, Pinzari G. The planetary N-body problem: Symplectic foliation, reductions and invariant tori. Invent Math, 2011, 186: 1–77
43 Arnold V I, Kozlov V, Neishtadt A. Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics, 3rd ed. Encyclopaedia of Mathematical Sciences Volume 3. New York: Springer, 2006
44 Cheng C-Q, Sun Y S. Existence of KAM tori in degenerate Hamiltonian systems. J Differential Equations, 1994, 114: 288–335
45 Cheng C-Q, Sun Y S. Existence of invariant tori in three-dimensional measure-preserving mappings. Celestial Mech Dynam Astronom, 1990, 47: 275–292
46 Pesin Y, Climenhaga V. Open problems in the theory of non-uniform hyperbolicity. Discrete Contin Dyn Syst, 2010, 27: 589–607
47 Pugh C, Shub M, Starkov A. Stable ergodicity. Bull Amer Math Soc (NS), 2004, 41: 1–41
48 Shub M, Wilkinson A. Pathological foliations and removable zero exponents. Invent Math, 2000, 139: 495–508
49 Arnold V I, Khesin B A. Topological Methods in Hydrodynamics. Applied Mathematical Sciences, vol. 125. New York: Springer-Verlag, 1998
50 Khesin B, Kuksin S, Peralta-Salas D. KAM theory and the 3D Euler equation. Adv Math, 2014, 267: 498–522
51 Speetjens M F M, Clercx H J H, Van Heijst G J F. A numerical and experimental study on advection in three-dimensional Stokes flows. J Fluid Mech, 2004, 514: 77–105
52 Yoccoz J-C. Travaux de Herman sur les tores invariants. Astérisque, 1992, 206: 311–344
53 Yoccoz J-C. Recent developments in dynamics. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Basel: Birkhäuser, 1995, 246–265
54 de la Llave R. Recent progress in classical mechanics. In: Mathematical Physics X. Berlin-Heidelberg: Springer, 1992, 3–19
55 Xia Z. Existence of invariant tori in volume-preserving diffeomorphisms. Ergodic Theory Dynam Systems, 1992, 12: 621–631
56 Herman M. Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau, Vol. I. Astérisque, 1983, 103–104: 1–221
57 Herman M. Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau, Vol. II. Astérisque, 1986, 144: 1–243
58 Cheng C-Q. Non-existence of KAM torus. Acta Math Sin Engl Ser, 2011, 27: 397–404
59 Cheng C-Q, Wang L. Destruction of Lagrangian torus for positive definite Hamiltonian systems. Geom Funct Anal, 2013, 23: 848–866
60 Graff S. On the construction of hyperbolic invariant tori for Hamiltonian systems. J Differential Equations, 1974, 15: 1–69
61 Huang Q D, Cong F Z, Li Y. Persistence of hyperbolic invariant tori for Hamiltonian systems. J Differential Equations, 2000, 164: 355–379
62 Eliasson H. Perturbations of stable invariant tori for Hamiltonian systems. Ann Sc Norm Super Pisa Cl Sci (5), 1989, 15: 115–147
63 Bernstein D, Katok A. Birkhoff periodic orbits for small perturbations of completely integrable Hamiltonian systems with convex Hamiltonians. Invent Math, 1987, 88: 225–241
64 Treshchev D V. The mechanism of destruction of resonance tori of Hamiltonian systems (in Russian). Mat Sb, 1989, 180: 1325–1346
65 Cheng C-Q. Birkhoff-Kolmogorov-Arnold-Moser tori in convex Hamiltonian systems. Comm Math Phys, 1996, 177: 529–559
66 Cheng C-Q. Lower dimensional invariant tori in the regions of instability for nearly integrable Hamiltonian systems. Comm Math Phys, 1999, 203: 385–419
67 Cheng C-Q, Wang S L. The surviving of lower dimensional tori from a resonant torus of Hamiltonian systems. J Differential Equations, 1999, 155: 311–326

68 Wayne C E. Periodic and quasi-periodic solutions of nonlinear wave equations via KAM theory. Comm Math Phys, 1990, 127: 479–528
69 Craig W, Wayne C E. Newton's method and periodic solutions of nonlinear wave equations. Comm Pure Appl Math, 1993, 46: 1409–1498
70 Bourgain J. Quasi-periodic solutions of Hamiltonian perturbations of 2D linear Schrödinger equations. Ann of Math (2), 1998, 148: 363–439
71 Eliasson H, Kuksin S. KAM for the nonlinear Schrödinger equation. Ann of Math (2), 2010, 172: 371–435
72 Liu J, Yuan X. A KAM theorem for Hamiltonian partial differential equations with unbounded perturbations. Comm Math Phys, 2011, 307: 629–673
73 Liu J, Yuan X. Spectrum for quantum Duffing oscillator and small-divisor equation with large-variable coefficient. Comm Pure Appl Math, 2010, 63: 1145–1172
74 Cheng C-Q. The genericity of Arnold diffusion in nearly integrable Hamiltonian systems. Asian J Math, 2019, 23: 401–438
75 Fenichel N. Persistence and smoothness of invariant manifolds for flows. Indiana Univ Math J, 1971, 21: 193–226
76 Cheng C-Q, Yan J. Arnold diffusion in Hamiltonian systems: A priori unstable case. J Differential Geom, 2009, 82: 229–277
77 Zhou M. Hölder regularity of barrier functions in a priori unstable case. Math Res Lett, 2011, 18: 77–94
78 Treschev D. Evolution of slow variables in a priori unstable Hamiltonian systems. Nonlinearity, 2004, 17: 1803–1841
79 Delshams A, de la Llave R, Seara T M. A Geometric Mechanism for Diffusion in Hamiltonian Systems Overcoming the Large Gap Problem: Heuristics and Rigorous Verification on a Model. Memoirs of the American Mathematical Society, vol. 179. Providence: Amer Math Soc, 2006
80 Bernard P. The dynamics of pseudographs in convex Hamiltonian systems. J Amer Math Soc, 2008, 21: 615–669
81 Cheng C-Q. Uniform hyperbolicity of invariant cylinder. J Differential Geom, 2017, 106: 1–43
82 Cheng C-Q, Zhou M. Global normally hyperbolic invariant cylinders in Lagrangian systems. Math Res Lett, 2016, 23: 685–705
83 Cheng C-Q. Arnold diffusion in nearly integrable Hamiltonian systems. arXiv:1207.4016v2, 2013
84 Mather J. Arnold diffusion. I: Announcement of results. J Math Sci (N Y), 2004, 124: 5275–5289
85 Bolotin S. Homoclinic orbits to invariant tori of Hamiltonian systems. In: Dynamical Systems in Classical Mechanics, vol. 168. Providence: Amer Math Soc, 1995, 21–90
86 Marco J-P. Chains of compact cylinders for cusp-generic nearly integrable convex systems on $\mathbb{A}^3$. arXiv:1602.02399, 2016
87 Gidea M, Marco J-P. Diffusion along chains of normally hyperbolic cylinders. arXiv:1708.08314, 2017
88 Kaloshin V, Zhang K. A strong form of Arnold diffusion for two and a half degrees of freedom. arXiv:1212.1150v3, 2018
89 Cheng C-Q, Zhou M. Normally hyperbolic invariant cylinders passing through multiple resonance. arXiv:2001.11223, 2020
90 Cheng C-Q, Xue J. Order property and modulus of continuity of weak KAM solutions. Calc Var Partial Differential Equations, 2018, 57: 65
91 Cheng C-Q, Xue J. Arnold diffusion in nearly integrable Hamiltonian systems of arbitrary degrees of freedom. arXiv:1503.04153, 2015
92 Bernard P, Kaloshin V, Zhang K. Arnold diffusion in arbitrary degrees of freedom and normally hyperbolic invariant cylinders. Acta Math, 2016, 217: 1–79
93 Bernard P. Large normally hyperbolic cylinders in a priori stable Hamiltonian systems. Ann Henri Poincaré, 2010, 11: 929–942
94 Nekhoroshev N N. An exponential estimates for the time of stability of nearly integrable Hamiltonian systems. Russian Math Surveys, 1977, 32: 1–65
95 Niederman L. Stability over exponentially long times in the planetary problem. Nonlinearity, 1996, 9: 1703–1751
96 Morbidelli A, Giorgilli A. Superexponential stability of KAM tori. J Stat Phys, 1995, 78: 1607–1617
97 Zhang J, Cheng C-Q. Asymptotic trajectories of KAM torus. arXiv:1312.2102, 2013
98 Douady R. Stabilité ou instabilité des points fixes elliptiques. Ann Sci École Norm Sup (4), 1988, 21: 1–46
99 Ehrenfest P, Ehrenfest T. The Conceptual Foundations of the Statistical Approach in Mechanics. Ithaca: The Cornell University Press, 1959
100 Birkhoff G D. Dynamical Systems. American Mathematical Society Colloquium Publications, Volume IX. New York: Amer Math Soc, 1927
101 Moser J K. Dynamical systems—past and present. Doc Math, 1998, 1: 381–402

Dynamical diversity of nearly integrable Hamiltonian systems

Chong-Qing Cheng

Abstract The dynamics of nearly integrable Hamiltonian is called by Poincaré the fundamental problem of dynamical systems. Since the fifties of the last century, the great achievements have been made in the study of the problem. Among them, the Kolmogorov's theorem on invariant tori and the discovery of Arnold diffusion are the landmarks. They have greatly deepened our understanding on the dynamical diversity of nearly integrable Hamiltonian systems. We shall briefly review some of the developments.

Keywords **Hamiltonian system, Kolmogorov's theorem, Arnold diffusion**

MSC(2010) **37J40, 37J50, 49L25**

doi: 10.1360/SSM-2020-0127