

# 基于螺旋理论模块化机器人运动学分析与仿真

陈伟海 周杰 于守谦 吴星明

(北京航空航天大学 自动化科学与电气工程学院, 北京 100083)

**摘 要:** 基于螺旋理论对模块化机器人的速度级和位移增量级运动学关系进行了分析, 开发了模块化冗余度机器人的逆运动学控制算法. 针对模块化机器人可能具有任意自由度和任意构型、可以经常快速安装和拆卸、易于可重构且由系列化、标准化部件组合的特性, 开发了具有自动建模功能的模块化机器人仿真系统. 该仿真系统由模块构造器、机器人建造器、图形示教和运动规划仿真器等分系统组成. 通过一个 7-DOF 模块化串联机器人抓放工件的演示实例验证了所提算法和仿真系统的实用性.

**关 键 词:** 模块化机器人; 冗余度机器人; 运动学; 仿真系统

**中图分类号:** TP 242

**文献标识码:** A **文章编号:** 1001-5965(2005)07-0814-05

## Kinematic analysis and simulation for modular manipulators based on screw theory

Chen Weihai Zhou Jie Yu Shouqian Wu Xingming

(School of Automation Science and Electrical Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

**Abstract:** Based on the screw theory, through analyzing the kinematic relationship of modular robots for velocity model and incremental displacement model, an inverse kinematic approach was developed for modular redundant robots. Since it can be assumed that modular robots have any possible DOFs and configurations, will be assembled and disassembled often, and are easily reconfigured because of having the series and standardization components, a simulation system with self-modeling function for modular manipulators was developed. This simulation system consists of module editor, robot builder, graphical teaching pendants, and motion planning pendants. The effectiveness of the proposed approach and simulation system was demonstrated by a 7-DOF modular serial robot with pick and place demonstration.

**Key words:** modular robots; redundant robots; kinematics; simulation system

冗余度机器人由于零空间解的无穷性, 使得它具有承担复杂任务的能力<sup>[1~3]</sup>. 与具有固定构型的常规机器人经常遭受构型约束而影响工作能力不同, 可重构模块化机器人以智能化、标准化、模块化和单缆技术为基本特征, 具有可重构、安装迅速、拆卸便利、即插即用的突出优点<sup>[4~7]</sup>. 由于构型可方便的快速改变, 高冗余问题就可以通过构型的不断变化而转化为低冗余问题. 模块化机

器人在给我们带来便利的同时, 它也存在新的问题, 那就是如何自动建模. 和常规的有固定构型的机器人不同, 模块化机器人应该可以被认为是具有任意的自由度和任意的构型. 在这样的情况下, 手工建模的方法既不现实也不可能<sup>[8]</sup>.

基于李群和李代数理论的指数积(POE)方法最早由美国学者 Brockett 将其应用于机器人系统的研究<sup>[9]</sup>, 韩国学者 Park 提出矩阵对数的概念,

其相应的计算方法完善了指数量方法在机器人的应用<sup>[10, 11]</sup>. 指数积方法没有公式奇异, 不论机器人的构型如何、自由度多少, 它均以初始位姿、螺旋轴、和绕该轴转动的角度(位移)为参数和变量, 借助螺旋理论形象生动地公式化成一个全局解, 因此特别适用于构型常需改变的模块化机器人的应用<sup>[4, 7]</sup>.

本文首先基于螺旋理论对模块化冗余度机器人的运动学逆解进行了分析; 然后介绍了具有自动建模功能的模块化机器人仿真系统的研究, 最后通过一个 7-DOF 模块化机器人抓放工件的演示实例验证了建议的运动学算法的实用性和仿真系统的功能.

## 1 模块化机器人的运动学方程

### 1.1 指数积公式

如果连杆  $i-1$  和连杆  $i$  是两个通过关节  $i$  相连的相邻连杆, 它们的运动学关系可由图 1 表示<sup>[4]</sup>.

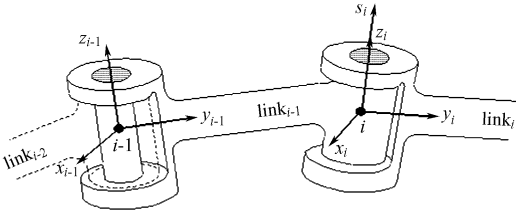


图 1 相邻连杆的运动学关系

这里连杆  $i$  和关节  $i$  被称做运动副  $i$ . 如果用框  $i$  来表示建立在运动副  $i$  上的坐标系, 那么, 在关节位移  $q_i$  下框  $i$  相对于框  $i-1$  的运动学关系可由下面的  $4 \times 4$  齐次矩阵描述:

$$T_{i-1,i}(q_i) = T_{i-1,i}(0) e^{\hat{s}_i q_i} \quad (1)$$

式中,  $T_{i-1,i}(0) \in S_E(3)$  是框  $i$  相对于框  $i-1$  的初始位姿;  $q_i \in R$  是关节角变量;  $\hat{s}_i \in s_e(3)$  是表达在框  $i$  的关节轴  $i$  的运动旋量, 这个旋量可表示为

$$\hat{s}_i = \begin{bmatrix} \hat{\omega}_i & \mathbf{v}_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中,

$$\hat{\omega}_i = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{iz} & \omega_{iy} \\ \omega_{iz} & 0 & -\omega_{ix} \\ -\omega_{iy} & \omega_{ix} & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

这里,  $\hat{\omega}_i \in s_o(3)$  是和表达在框  $i$  的关节轴  $i$  的单位方向矢量  $\omega_i \in \mathfrak{N}_{3 \times 1}$  有关的螺旋反对称矩阵,  $\mathbf{v}_i \in \mathfrak{N}_{3 \times 1}$  是表达在框  $i$  的关节轴  $i$  的位置矢量. 通过一个映射变换  $\hat{s}_i \mapsto \mathbf{s}_i = (\omega_i, \mathbf{v}_i) \in \mathfrak{N}_{6 \times 1}$ , 可用一个 6 维列矢量  $\mathbf{s}_i$  来表示运动旋量. 这里,  $\mathbf{s}_i$  是关节轴  $i$  的旋量坐标. 这样, 基于方程(1), 具有  $n$  个关

节的串联机器人的前向运动学可以表示为<sup>[4]</sup>

$$\begin{aligned} T_{0,n}(q_1, q_2, \dots, q_n) &= \\ T_{0,1}(q_1) T_{1,2}(q_2) \dots T_{n-1,n}(q_n) &= \\ T_{0,1}(0) e^{\hat{s}_{1q_1}} T_{1,2}(0) e^{\hat{s}_{2q_2}} \dots T_{n-1,n}(0) e^{\hat{s}_{nq_n}} \end{aligned} \quad (4)$$

### 1.2 速度级逆解算法

设  $T_{0,n}$  是机器人末端的位姿, 可写为

$$T_{0,n} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{0,n} & \mathbf{p}_{0,n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

其中,  $\mathbf{R}_{0,n} \in S_O(3)$ ,  $\mathbf{p}_{0,n} \in \mathfrak{N}_{3 \times 1}$ , 分别是姿态矩阵和位置矢量. 于是可得

$$\begin{aligned} \dot{T}_{0,n} T_{0,n}^{-1} &= \\ \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{R}}_{0,n} \mathbf{R}_{0,n}^T & -\dot{\mathbf{R}}_{0,n} \mathbf{R}_{0,n}^T \mathbf{p}_{0,n} + \dot{\mathbf{p}}_{0,n} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

$\dot{T}_{0,n} T_{0,n}^{-1} \in s_e(3)$  称为机器人末端相对于基坐标系的空速, 可以表示为<sup>[12]</sup>

$$\hat{\mathbf{V}}_{0,n}^s = \begin{bmatrix} \hat{\omega}_{0,n}^s & \mathbf{v}_{0,n}^s \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

这样, 空速的旋量坐标便可写为

$$\mathbf{V}_{0,n}^s = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{0,n}^s \\ \omega_{0,n}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_{0,n}^s \times \mathbf{p}_{0,n} + \dot{\mathbf{p}}_{0,n} \\ (\dot{\mathbf{R}}_{0,n} \mathbf{R}_{0,n}^T)^\vee \end{bmatrix} \quad (8)$$

于是机器人的关节速度与其末端速度之间的关系可以表示成如下方程的形式<sup>[12]</sup>

$$\mathbf{V}_{0,n}^s = \mathbf{J}_{0,n}^s(\theta) \dot{\theta} \quad (9)$$

这里,

$$\mathbf{J}_{0,n}^s(q) = \left[ \left( \frac{\partial T_{0,n} T_{0,n}^{-1}}{\partial q_1} \right)^\vee \dots \left( \frac{\partial T_{0,n} T_{0,n}^{-1}}{\partial q_n} \right)^\vee \right] \quad (10)$$

$\mathbf{J}_{0,n}^s(q) \in \mathfrak{N}_{6 \times n}$  是机器人的空间雅可比矩阵<sup>[12]</sup>, 它的第  $i$  列能被写做

$$\frac{\partial T_{0,n} T_{0,n}^{-1}}{\partial q_i} T_{0,n}^{-1} = T_{0,i} \hat{s}_i T_{i,n} T_{0,n}^{-1} = T_{0,i} \hat{s}_i T_{0,i}^{-1} \quad (11)$$

通过映射  $\hat{s}_i \mapsto \mathbf{s}_i = (\omega_i, \mathbf{v}_i) \in \mathfrak{N}_{6 \times 1}$ , 将上式中的螺旋坐标转换成矢量, 于是有

$$\left( \frac{\partial T_{0,n} T_{0,n}^{-1}}{\partial q_i} \right)^\vee = Ad_{T_{0,i}} \mathbf{s}_i \quad (12)$$

$Ad_{T_{0,i}} \mathbf{s}_i$  被称为  $T_{0,n}$  的伴随表达<sup>[10, 11]</sup>.

空速  $\mathbf{V}_{0,n}^s$  并不合乎使用习惯, 习惯使用的速度可称为混合速度, 它表示为<sup>[11]</sup>

$$\mathbf{V}_{0,n}^h = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_{0,n} \\ \omega_{0,n}^s \end{bmatrix} \quad (13)$$

其中  $\dot{\mathbf{p}}_{0,n} \in \mathfrak{N}_{3 \times 1}$  是机器人末端的瞬间平动速度, 它的三个分量分别表示末端沿基坐标系的  $x, y, z$  轴移动的速度.  $\omega_{0,n}^s \in \mathfrak{N}_{3 \times 1}$  是末端的瞬间转动矢量,

表示末端相对于基坐标系以角速度  $\|\omega_{0,n}^s\|_2$  绕着直线  $\omega_{0,n}^s$  旋转. 由式(4)、(5)和(9)可得

$$\mathbf{V}_{0,n}^h = \mathbf{J}_{0,n}^h(\theta)\dot{\theta} \tag{14}$$

其中  $\mathbf{J}_{0,n}^h = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3\times 3} & \hat{\mathbf{p}}_{0,n} \\ 0 & \mathbf{I}_{3\times 3} \end{bmatrix}^{-1}$   $\mathbf{J}_{0,n}^s \in \Re_{6\times n}$ . 于是有

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= (\mathbf{J}_{0,n}^h)^+ \mathbf{V}_{0,n}^h + \\ &K_{\text{mom}}(\mathbf{I} - (\mathbf{J}_{0,n}^h)^+ \mathbf{J}_{0,n}^h)[\nabla \mathbf{H}(\theta)] \end{aligned} \tag{15}$$

其中,  $(\mathbf{J}_{0,n}^h)^+$  是  $\mathbf{J}_{0,n}^h$  的 M-P 伪逆;  $\nabla \mathbf{H}(\theta)$  是欲优化的运动学性能指标  $\mathbf{H}(\theta)$  的梯度矢量;  $K_{\text{mom}}$  是基于运动可优化度的齐次解系数<sup>[12]</sup>.

1.3 位移增量级逆解算法

速度级控制不具有理想的定位精度,因此当机器人运行到接近它的目标点时将控制方式切换到位移增量控制将十分必要. 对于位置精度要求较高的应用,甚至整个轨迹跟踪都应采用位置控制来进行. 设机器人末端的混合位移增量矢量为

$$\mathbf{d}\mathbf{T}_{0,n}^h = \begin{bmatrix} \mathbf{d}\mathbf{p}_{0,n} \\ \mathbf{d}\boldsymbol{\theta}_{0,n}^s \end{bmatrix} \tag{16}$$

上述方程中矢量  $\mathbf{d}\mathbf{p}_{0,n} = [\mathbf{d}\mathbf{p}_{(0,n)_x}, \mathbf{d}\mathbf{p}_{(0,n)_y}, \mathbf{d}\mathbf{p}_{(0,n)_z}]^T \in \Re_{3\times 1}$  和矢量  $\mathbf{d}\boldsymbol{\theta}_{0,n}^s = [\mathbf{d}\boldsymbol{\theta}_{(0,n)_x}, \mathbf{d}\boldsymbol{\theta}_{(0,n)_y}, \mathbf{d}\boldsymbol{\theta}_{(0,n)_z}]^T \in \Re_{3\times 1}$  分别代表机器人末端相对于基坐标的位置增量矢量和方向增量矢量. 根据混合速度和混合位移增量的概念,关节角增量矢量和混合位移增量矢量间的关系可表示为

$$\mathbf{d}\mathbf{q} = (\mathbf{J}_{0,n}^h)^+ \mathbf{d}\mathbf{T}_{0,n}^h \tag{17}$$

这里  $\mathbf{d}\mathbf{q} = [\mathbf{d}q_1, \mathbf{d}q_2, \cdots, \mathbf{d}q_n]^T \in \Re_{n\times 1}$  是关节角增量矢量.

2 模块化机器人仿真系统

仿真系统由模块构造器、机器人建造器、图形示教仿真器和运动规划仿真器等组成.

2.1 模块构造器

模块构造器的功能是要为模块化机器人构造各种标准化的部件,诸如各种功能模块和用于模块间相互连接的标准化连接器. 它由以下 4 个部分组成:

- 1) 载入 CAD 模块;
- 2) 定义运动轴和连接口;
- 3) 输入运动轴和连接口特性参数;
- 4) 形成功能模块.

首先由 CAD 软件设计模块外形,然后将此载入后对运动轴和每个连接口的位置、方向、运动范围和输入输出特性等进行定义,从而形成已经定义了局部位姿的标准化功能模块.

2.2 机器人建造器

机器人建造器的功能是通过调用模块构造器生成的模块组装机器人系统,它由以下 4 个部分组成:

- 1) 载入标准化模块库;
- 2) 从标准化模块库中选择要被使用的特定模块;
- 3) 顺序安装模块形成特定的机器人构型;
- 4) 自动生成运动学、动力学和标定模型.

根据设计的特定的机器人构型,按照从机器人机座到末端的顺序,从标准化模块库中选择特定模块和连接块,通过选定、旋转、移动等功能按钮的组合使用,模块化机器人就可快速地组装完毕.

机器人建造器的一个重要特色是它具有自动建模功能,由于模块构造器已经为每一个标准化模块定义了它的螺旋轴和局部位姿,机器人建造器在顺序安装模块的过程中,便可根据连接关系修改原螺旋轴的定义使之符合运动关系,然后由方程(4)写出串联机器人前向运动学. 如果关节  $i$  和关节  $i+1$  相对于机座的全局位姿分别由  $\mathbf{T}_i$  和  $\mathbf{T}_{i+1}$  表示,则有

$$\mathbf{T}_{i+1} = \mathbf{T}_i \cdot \mathbf{T}_{i,i+1} \tag{18}$$

这里,

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_i & \mathbf{P}_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{19}$$

于是

$$\mathbf{T}_{i,i+1} = \mathbf{T}_i^{-1} \cdot \mathbf{T}_{i+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_i^T \mathbf{R}_{i+1} & \mathbf{R}_i^T (\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{20}$$

这样,自动建模中就可求解相邻两关节的初始位姿.

2.3 图形示教仿真器

图形示教仿真器包含关节空间和任务空间示教. 在示教完成以后,可将末端所有示教点所对应的关节角保存下来供实际机器人的运动控制使用.

2.3.1 关节空间示教

关节空间示教是指可对每个关节配合图形进行关节角、关节速度和关节加速度的示教. 示教数据可以在显示框被实时显示.

2.3.2 任务空间示教

任务空间示教有三部分内容:一是输入任务空间的六维数据,二是通过调用逆运动学按照任务空间的轨迹要求控制机器人运动,三是通过实

时检测关节角度和调用前向运动学将机器人的各关节角和末端的实际位姿在相应的显示框里实时进行显示。

## 2.4 运动规划仿真器

运动规划分为直线运动和圆弧运动规划。仿真器通过调用插补算法、逆运动学算法和前向运动学算法,控制机器人运动并将机器人末端和关节角数据实时显示在相应的显示框里。对于直线运动,应输入首末两点末端所对应的位姿。对于圆弧运动,有两种选择方式:一是三点输入方式,二是圆心、半径、初始角输入方式。为了对机器人的运动进行理想控制,运动控制所需的步长、采样周期、运动速度、加速度等参数均可从界面输入。

## 3 仿真实验研究

用一个 7-DOF 模块化串联机器人在生产线上执行抓放工件的演示实例来验证模块化冗余度机器人运动学控制算法和仿真系统的实用性。通过避关节角极限来显示冗余控制特性,验证模块化冗余度机器人逆运动学求解方程(15)的实用性。

假定直线运动速度和加速度分别为  $100 \text{ mm/s}$  和  $300 \text{ mm/s}^2$ ;圆弧运动的速度和加速度分别为  $40(^{\circ})/\text{s}$  和  $100(^{\circ})/\text{s}^2$ ;末端要通过的一系列点的位置(mm)和方向分别为

$$P_1 = [-190, -270, 220]^T$$

$$P_2 = [-190, -270, 120]^T$$

$$P_3 = [0, -270, 220]^T$$

$$P_4 = [0, -270, 120]^T$$

$$P_5 = [190, -270, 220]^T$$

$$P_6 = [190, -270, 120]^T$$

$$P_7 = [-335, 198, 280]^T$$

$$P_8 = [0, 395, 370]^T$$

$$P_9 = [0, 395, 270]^T$$

$$P_{10} = [102, -356, 220]^T$$

$$R_1 = [1, 0, 0; 0, -1, 0; 0, 0, -1]$$

$$R_7 = [0, -1, 0; 0, 0, 1; -1, 0, 0]$$

$$R_8 = [0, -1, 0; -1, 0, 0; 0, 0, -1]$$

$$R_0 = R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6$$

$$R_9 = R_8$$

机器人的运动轨迹是:

$L(1,2), L(2,1), C(1,7,8), L(8,9), L(9,8), C(8,7,3), L(3,4), L(4,3), L(3,1), L(1,2), L(2,1), L(1,5), L(5,6), L(6,5), L(5,3), L(3,4), L(4,3), C(3,7,8), L(8,9), L(9,8), C(8,7,5), L$

$(5,6), L(6,5), C(5,0,1)$

这里  $L(1,2)$  代表从  $P_1$  点往  $P_2$  点的直线运动,  $C(1,7,8)$  代表从  $P_1$  点开始经过  $P_7$  点到达  $P_8$  的圆弧运动。

## 3.1 运动学自动建模

机器人的运动学建模包含自由度、运动螺旋轴和各关节相对于前一关节的初始角位移数据。

## 3.2 抓放工件直线和圆弧运动演示

机器人运动轨迹如前所述是直线和空间螺旋圆弧的组合。图 2 给出了前三段轨迹跟踪  $L(P_1, P_2), L(P_2, P_1), C(P_1, P_7, P_8)$  完成后的机器人位姿图形,图中也显示了各段运动终止点对应的机器人末端位姿和相应的机器人各个关节角分布的数据。图 3 给出了全部末端轨迹跟踪时对应的各关节角的运动轨迹。通常腕关节的硬极限不超过  $95^{\circ}$ ,从图 2c 和图 3 都可以看出腕关节  $q_6$  在运动中已经超出了硬极限达到  $99.08^{\circ}$ 。利用冗余控制特性可进行避关节角极限的优化,图 2d 是和图 2c 对有无避关节角极限优化所对应不同的关节角度分布情况相比较。结果显示冗余控制增加了机器人的灵活性和实用性。

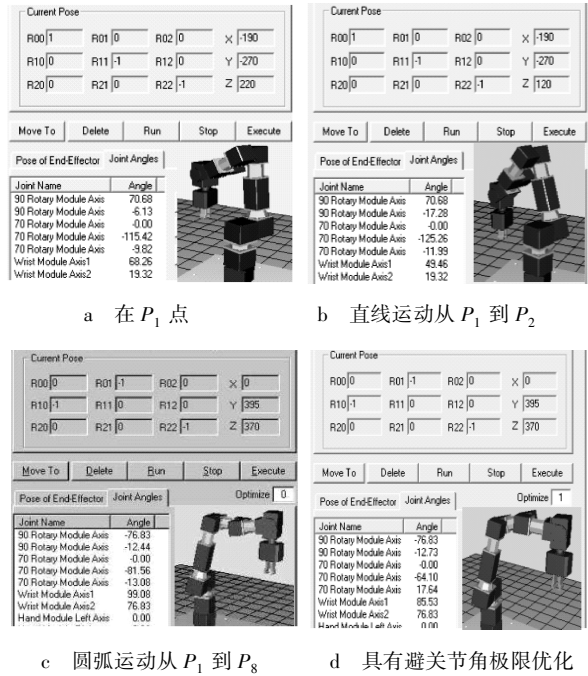


图2 直线和圆弧运动及冗余控制演示



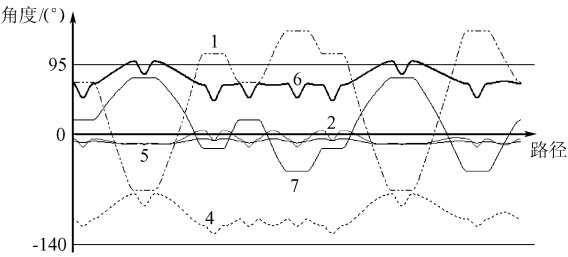


图3 在运动演示中机器人各关节角运动轨迹

图4给出了在避关节角极限的优化下完成预定的抓放工件作业时,机器人末端的轨迹跟踪所对应的各关节角和关节速度分布情况.图中关节角分布曲线表明避关节角极限的冗余控制是成功的,关节角速度曲线分布情况说明这样的运动速度在实际中是可行的.在运动仿真完成以后,这些运动数据可以被存在数据文件里去控制实际的机器人运动.

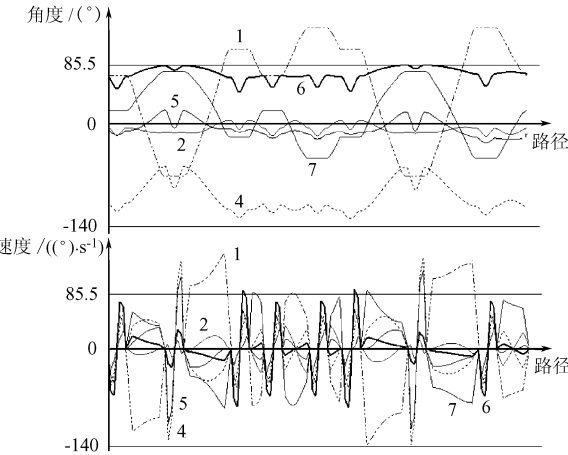


图4 冗余控制下的机器人关节角和关节速度分布

4 结束语

本文开发了基于螺旋理论的模块化冗余度机器人的逆运动学控制算法.速度控制虽然运行平稳但定位精度较差,因此将它和位移增量控制结合起来,根据机器人在运行中是否接近目标点而选择不同的控制方式将较为适宜.由于模块化机器人构型多变且可重构,仿真控制在模块化机器人研究中具有重要的意义,因此开发一个具有自动建模功能的模块化机器人仿真系统将十分必要.文中详细介绍了这个仿真系统的研制工作,且通过演示实例表明了该仿真系统及所建议算法的应用价值.

参考文献 (References)

[1] Dubey R V, Euler J A, Babcock S M. Real-time implementation of an optimization scheme for seven-degree-freedom redundant manipulators [J]. IEEE Trans on Robotics & Automation,

1991, 7(5): 579 ~ 588

[2] 陈伟海, 武 桢, 丁希伦, 等. 冗余度机器人动力学容错控制技术研究[J]. 北京航空航天大学学报, 2002, 26(6): 726 ~ 730

Chen Weihai, Wu Zhen, Ding Xilun, *et al.* Research on fault-tolerant control of dynamically redundant manipulators[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2002, 26(6): 726 ~ 730 (in Chinese)

[3] 李 健, 李剑锋, 武 桢, 等. 基于可操作度的单冗余度机器人容错性指标[J]. 北京航空航天大学学报, 2002, 28(1): 54 ~ 57

Li Jian, Li Jianfeng, Wu Zhen, *et al.* Fault tolerance of redundant manipulators with multi-joint failed and its optimization[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2002, 28(1): 54 ~ 57 (in Chinese)

[4] Chen I M, Yang G L. Inverse kinematics for modular reconfigurable robots[A]. In: Proc of IEEE Inter Conf on Robotics and Automation[C], 1998. 1647 ~ 1652

[5] Chen W H, Yang G L, Goh K M. Kinematic control for fault-tolerant modular robots based on joint angle increment redistribution [A]. In: Proc of 7th Inter Conf on Control, Automation, Robotics and Vision[C], 2002. 396 ~ 401

[6] Chen W H, Yang G L, Edwin Ho H L, *et al.* Interactive motion control of modular reconfigurable manipulators [A]. In: 2003 IEEE/RSJ Inter Conf on Intelligent Robots and Systems[C], 2003. 1620 ~ 1625

[7] Yang G L, Chen W H, Edwin Ho H L. Design and kinematic analysis of a modular and hybrid parallel serial manipulator[A]. In: Proc of 7th Inter Conf on Control, Automation, Robotic and Vision[C]. Singapore, 2002. 45 ~ 50

[8] Chen I M, Yeo S H, Chen G, *et al.* Kernel for modular robot applications - automatic modelling techniques [J]. Inter Journal of Robotics Research, 1999, 18(2): 225 ~ 242

[9] Brockett R. Robotic manipulators and the product of exponential formula[A]. In: Inter Symposium in Math Theory of Network and Systems[C]. Israel: Beer Sheba, 1983. 120 ~ 129

[10] Park F C. Computational aspect of manipulators via product of exponential formula for robot kinematics[J]. IEEE Trans Automatic Control, 1994, 39(9): 643 ~ 647

[11] Murray R M, Li Z X S. A mathematical introduction to robotic manipulation[M]. London: CRC Press, 1994

[12] Li L Y, Gruver W A, Zhang Q X, *et al.* Real-time control of redundant robots subject to multiple criteria[A]. In: Proc of the 1998 IEEE Inter Conf on Robotics and Automation[C]. Detroit, 1998. 115 ~ 120