

高速轮轨系统动力学研究体系及其系统建模

张曙光* 金学松*

(铁道部运输局, 北京 100844; 西南交通大学牵引动力国家重点实验室, 成都 610031.

* 联系人, E-mail: lsg180@sohu.com, tpl@home.swjtu.edu.cn)

摘要 随着列车运行速度的提高, 列车与线路、接触网等固定设备的相互作用加剧, 而且受到气流的强烈作用, 传统的车辆系统动力学研究方法已经无法精确描述高速列车的运动特征. 提出开展高速轮轨系统动力学研究, 总结分析了高速轮轨系统动力学研究体系, 建立了考虑线路、列车、弓网和气流耦合的高速轮轨系统动力学模型, 并具体给出了各子系统的运动方程和各子系统之间的耦合关系式. 在此基础上, 建立考虑广义失效模型的高速轮轨系统动力学模型和服役仿真体系, 从而拓展了现有车辆系统动力学研究的范围和作用.

关键词 列车 线路 接触网 系统 动力学 服役模拟

铁路系统作为目前轨道交通的主体有其运行的特殊性, 即移动设备(列车)在固定设备(线路、接触网)上作可控运行, 而移动设备又要受到固定设备状态和空间介质的影响与制约(见图 1). 随着列车运行速度的提高, 车辆、弓网、轮轨以及和空气的动力作用加剧, 不仅对动车组和线桥隧的设计、制造(建设)和运行管理提出了更高要求, 同时需要有与高速列车运行相适应的车辆系统、轮轨关系、弓网关系和列车气动特性. 然而, 这一切始于高速和结构振动, 动力学问题是根本. 铁路以轮轨支撑和滚动接触为特点, 机车车辆上的所有振动几乎都来自线路的扰动和轮轨相互作用以及气流的作用. 因此, 对高速铁路而言, 将传统的车辆系统动力学(vehicle system dynamics)研究拓展到与列车运行相关的因素和领域, 全面深入地开展高速轮轨系统动力学研究, 已势在必行.

传统的车辆系统动力学没有考虑参数的时变特性和结构失效对轮轨系统响应的影响. 因此, 本文提出基于轮轨系统动力学仿真的服役模拟理念, 把广义失效模型(含材料失效、结构损伤和参数蜕化模型)建立于轮轨系统动力学仿真模型中, 形成高速轮轨系统的广义动力学模型, 实现高速轮轨系统的服役仿真.

本文首先提出高速轮轨系统动力学的概念和研究体系, 重点建立考虑线路、动车组、弓网和气流耦合的高速轮轨系统动力学模型. 在此基础上, 建立囊括广义失效模型的高速轮轨系统广义动力学模型和服役仿真体系.

1 高速轮轨系统动力学研究体系

高速轮轨系统动力学, 其研究特点是要充分考虑高速列车与线路、接触网和气流的相互作用. 因

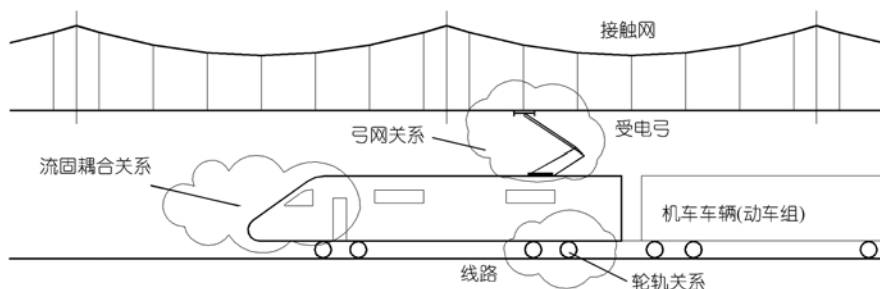


图 1 高速轮轨系统

2007-03-01 收稿, 2007-03-15 接受

国家自然科学基金(批准号: 50375127, 50521503)、国家杰出青年科学基金(批准号: 50525518)和教育部博士点基金(批准号: 20040613006)资助项目

此,这个大系统动力学研究以轮轨相互作用模型为基础,以传统的车辆系统动力学为核心,向上考虑牵引供电的接触网系统,以及与机车上受电弓的匹配关系;向下研究线路,研究车-线的耦合振动问题.轮轨相互作用研究的理论基础是轮轨接触力学和轮轨蠕滑理论,而且要考虑车-线耦合状态下的轮轨动态相互作用.轮轨相互作用的研究应涉及与轮轨服役行为相关的脱轨、黏着、滚动接触疲劳和摩擦磨损的机理研究.由于路基线路与桥上线路的结构不同,则模型、研究方法和研究内容不同,因此,车-线耦合动力学就分别形成列车-线路耦合动力学和车-桥耦合动力学,研究列车-线-桥的耦合振动,特别是耦合效应和高速运行条件下的高频动态行为.

对于高速轮轨系统动力学的核心内容——车辆系统动力学,它主要考虑的三要素为运动稳定性、运行平稳性和安全性.为了提高车辆的动力学性能,要考虑车辆性能的主动控制,主动控制的过程模拟和性能研究需以车辆系统动力学为基础.对车辆系统承受较大载荷而产生较大变形的结构件,还要考虑它们的刚柔耦合作用效果;伴随动力学仿真,还可以进行结构动应力的仿真,这一研究使传统的机车车辆多体动力学研究拓展为刚柔动力学问题的研究.在车辆系统动力学研究中,考虑车辆数的增加,就发展成为列车系统动力学研究.列车系统动力学的研究不仅要研究列车编组状态下车辆动力学三要素,更要在列车牵引/制动控制中考虑列车的纵向动力学

行为,包括基于轮轨黏着的列车运行控制和轮轨黏滑振动.只有实现基于轮轨系统动力学的列车牵引/制动控制过程,最终才能实现列车运行的自动化控制.另外,由于高速列车的气动作用强烈,在列车系统动力学和弓网系统动力学的研究中,应考虑空气动力学的作用,也就是要研究以高速列车和空气气流为对象的流固耦合动力学问题.

因此,高速轮轨系统动力学不仅要研究移动设备的运动,还要考虑与固定设备和空气介质的相互作用,形成具有高速特征的线路-车辆-受电弓-接触网-气流耦合系统动力学.具体的高速轮轨系统动力学体系结构和相互关系如图2所示.

2 高速轮轨系统动力学模型

对于高速轮轨铁路大系统来说,它是由柔性体(接触网)、多刚体(主要指机车车辆结构)、连续弹性体(钢轨)、离散体(枕木)、非规则碎散堆积体(石碴道床)和土结构(路基)组成的混合结构系统,而且它要与流体(空气介质)相互作用.因此,它的研究首先需要突破传统的建模方式,应考虑由多体和多态组成的混合结构的系统建模问题.

由于列车是通过轮轨滚滑接触和弓网滑动接触与线路和接触网实现耦合作用.所以,在这样的大系统建模时,可以采用子结构方法,分别列出接触网、受电弓、动车组、钢轨、线路以及气流的运动微分方程,然后考虑各子系统之间的运动和边界条件,构建成完整的轮轨系统动力学模型.模型框架如图3所示.

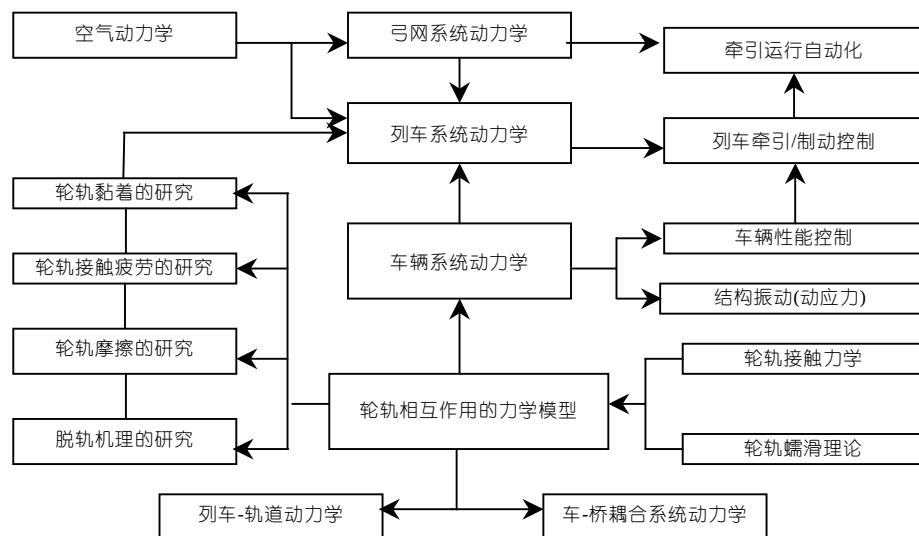


图2 高速轮轨系统动力学体系

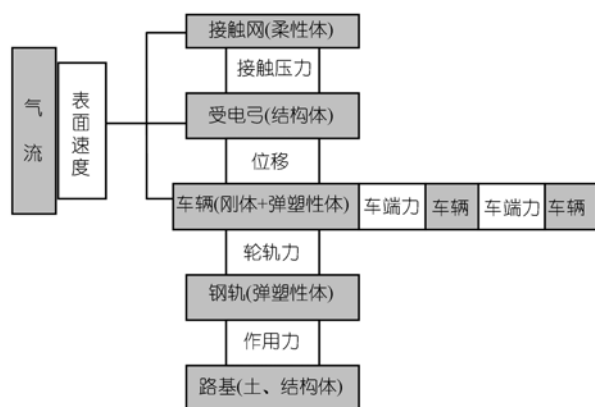


图 3 轮轨系统的动力学模型框图

这里接触网模型采用弹性体结构模型，受电弓本身是结构体，但一般可采用等效化的多刚体模型^[1,2]，弓网之间通过接触压力实现耦合作用；列车模型首先是以车辆模型为单元(或子结构)，尽管轮对、构架和车体等主要结构件均可以采用弹性体模型，但从过去实际问题情况看，车辆模型一般采用多刚体模型，当然可以借助模态迭加原理考虑结构的弹性变形的影响。由于高速动车组往往在车与车之间有耦合减振系统，因此在建立车辆模型的基础上，应用基于循环变量递推积分方法，通过车间力的耦合作用，形成列车系统的运动方程。由于受电弓的质量很小，在车辆振动计算中可以忽略受电弓作用的影响，但是受电弓基座固结在车体上，车体的振动状态在很大程度上影响到弓的行为，通过受电弓基座的位移和车体位移的协调性实现了它们之间的耦合作用；车辆与钢轨之间是通过轮轨相互作用力实现耦合的，切向力一般采用具有非线性特征和考虑自旋影响的沈氏模型^[3]，考虑轮轨接触面的材料损伤，在轮轨垂向力作用模型中，可以考虑轮轨材料的局部摩擦磨损和局部变形等特征；钢轨一般采用弹性梁模型，目前一般采用欧拉梁模型^[4]，但随着列车速度的提高，尤其是高速列车，高频振动强烈，应该采用更加合理的铁木辛柯梁模型；轨道建模从目前的研究层面上看，除钢轨以外，一般简化成为多刚体系统^[4]；实际上，高速铁路经常采用高架方式，即线路是桥梁结构，线路模型应改为考虑桥梁弹性结构的计算模型，同时由于接触网架设在桥上，在接触网模型中还将考虑与桥振动的耦合作用；空气模型采用三维Navier-Stokes方程描述，它与受电弓以及动车组的耦合作用采用流体边界层和列车表面的运动速度

相互作用关系来实现。

从以上对建模的讨论可以看到，高速轮轨系统动力学建模的关键是建立线路、车辆、弓网等各子系统的精确模型，以及确定各子系统的耦合关系模型。下面给出相关子系统的数学模型。

接触网模型采用弹性梁模型，由于弓网振动属于低频振动，因此，接触网中的承力索和接触线可以采用欧拉梁模型。由于接触网的垂向振动对弓网受流影响较大，因此，考虑接触网的垂向振动，其垂向运动方程可描述成四阶偏微分方程：

承力索

$$EI_M \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} - T_M \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \rho_M \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \eta_M \frac{\partial z}{\partial t} = -\sum P_i \delta(x - x_i), \quad (1)$$

接触线

$$EI_C \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} - T_C \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \rho_C \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \eta_C \frac{\partial z}{\partial t} = \sum F_i \delta(x - x_i) + \sum P_i \delta(x - x_i), \quad (2)$$

式中下标M和C分别表示承力索和接触线，EI为抗弯刚度，T为张力， ρ 为线密度， η 为阻尼系数， P_i 为承力索和接触线之间吊弦作用力， F_i 为接触线和受电弓弓头之间的接触压力，正是通过 F_i 实现接触网与受电弓的耦合。

受电弓的模型可以采用杆系结构模型，但过去一般采用多质量块的受电弓垂向模型，如

弓头

$$M_h \ddot{Z}_H - U_h \dot{Z}_F - K_h Z_F + U_h \dot{Z}_H + K_h Z_H + B_h \text{sign}(\dot{Z}_H - \dot{Z}_F) + F_i = 0, \quad (3)$$

框架

$$M_f \ddot{Z}_F + (U_f + U_h) \dot{Z}_F + (K_f + K_h) Z_F - U_h \dot{Z}_H - K_h Z_H + B_f \text{sign}(\dot{Z}_f) - B_h \text{sign}(\dot{Z}_H - \dot{Z}_F) = K_f Z_C + C_f x \dot{Z}_C + B_f \text{sign}(\dot{Z}_C), \quad (4)$$

式中下标H(或h)和F(或f)分别表示受电弓弓头和框架，M、C、K和B分别表示质量、阻尼、刚度和干摩擦， F_i 为接触线和受电弓弓头之间的动态接触压力， Z_C 为受电弓安装基座处车体的振动位移，正是通过它实现受电弓与车辆运动的耦合。

传统的车辆模型一般采用多体系统动力学模型，如果采用基于循环变量法的列车系统动力学仿真方法，其中第*i*节车的车辆数学模型可写成

$$[M_i] \{\ddot{Z}_i\} + [C_i] \{\dot{Z}_i\} + [K_i] \{Z_i\} = \{p_i\} + \{f_i\}, \quad (5)$$

式中 $[M_i]$, $[C_i]$ 和 $[K_i]$ 和分别表示第*i*节车的系统质量、阻尼和刚度矩阵, P_i 是作用在车辆上的外部力, 如与轨道耦合作用的轮轨力等, f_i 是车辆间的耦合力, 不同位置车辆间耦合力可统一表示成

$$\{f_i\} = \begin{cases} \{f_{1 \leftarrow 2}\}, & i=1, \\ \{f_{i-1 \rightarrow i} + f_{i \leftarrow i+1}\}, & 1 < i < n, \\ \{f_{n-1 \rightarrow n}\}, & i=n. \end{cases} \quad (6)$$

如果要考虑车体结构的弹性, 可先计算出其结构振动模态 ϕ_i , 借助模态迭加原理将弹性体振动方程化减为一组单自由度微分方程:

$$m_i \ddot{q}_i + 2m_i \omega_{ni} \zeta_i \dot{q}_i + m_i \omega_{ni}^2 q_i = Q_i(t), \quad (7)$$

式中下标*i*表示第*i*阶模态, q_i 是广义坐标变量, m_i 是模态质量, ω_{ni} 是模态频率, ζ_i 是模态阻尼比, $Q_i(t)$ 为作用在弹性体上的广义力。

车辆与轨道之间通过轮轨力作用耦合, 轮轨力在接触斑的切向分量为蠕滑力, 采用沈氏模型, 而法向分量则采用等效刚度模型。

法向力

$$P_{\text{wnk}}(t) = \begin{cases} C_H [Z_{\text{wnk}} - Z_{\text{rnk}} + \delta_0 - U_k]^{3/2}, & Z_{\text{wnk}} - Z_{\text{rnk}} + \delta_0 - U_k > 0, \\ 0, & Z_{\text{wnk}} - Z_{\text{rnk}} + \delta_0 - U_k \leq 0, \end{cases} \quad (8)$$

切向力

$$F_R' = \begin{cases} f P_{\text{wnk}} \left[\left(\frac{F_R}{f P_{\text{wnk}}} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{F_R}{f P_{\text{wnk}}} \right)^2 + \frac{1}{27} \left(\frac{F_R}{f P_{\text{wnk}}} \right)^3 \right], & \frac{F_R}{3 f P_{\text{wnk}}} \leq 1, \\ f P_{\text{wnk}}, & \frac{F_R}{3 f P_{\text{wnk}}} > 1, \end{cases} \quad (9)$$

式中 C_H 为与轮轨接触界面几何形状有关的参数, Z_{wnk} 和 Z_{rnk} 分别是车轮和钢轨的垂向位移量, δ_0 是静轮重作用下轮轨接触点处法向挤压力, U_k 是轮轨界面累积磨损和塑性累积变形量, f 是库仑摩擦系数, F_R 是由Kalker线性理论确定的轮轨间的切向合力, 脚标*k*表示车辆的第*k*个车轮。

当考虑高速气流对列车和受电弓的作用时, 就要建立反映车体结构和空气之间相互作用的流固耦合模型。如果将列车当成刚体, 则空气作用在车辆表面的压强为

$$P = (\gamma - 1) \rho \left[e - \frac{1}{2} u^2 \right], \quad (10)$$

式中 P 为压强, γ 为热比, ρ 为密度, e 为气体的能量密度, u 为速度向量。

空气流动的三维 Navier-Stokes 方程为连续方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0, \quad (11)$$

动量方程

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j u_i) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_{ij}}. \quad (12)$$

利用有限元方法对方程(11)和(12)进行离散, 由 Taylor-Galerkin 方法得到关于空气速度和压强的近似表达式。假设在垂直于车辆与空气界面处车辆运动速度与空气运动速度在边界的法向相等, 并将车辆与空气交界面处的气压转换为作用在车辆上的力和力矩, 从而得到车辆与空气的耦合动力学方程:

$$\dot{x} = G(x). \quad (13)$$

通过求解方程(13), 得到车辆在空气耦合作用下的运动过程。

为了研究高速列车的高频振动, 钢轨采用铁木辛柯梁模型:

垂向

$$\begin{cases} m \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial t^2} + \kappa_z GA \left[\frac{\partial \psi_z(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial x^2} \right] \\ = - \sum_{i=1}^{N_s} R_{zi}(t) \delta(x - x_{si}) + \sum_{j=1}^{N_w} P_{\text{wnj}}(t) \delta(x - x_{wj}), \\ \rho I_y \frac{\partial^2 \psi_z(x, t)}{\partial t^2} + \kappa_z GA \left[\psi_z(x, t) - \frac{\partial z(x, t)}{\partial x} \right] \\ - EI_y \frac{\partial^2 \psi_z(x, t)}{\partial x^2} = 0, \\ x_{si} = 2l_s - vt \quad (0 \leq t \leq il_s / v), \end{cases} \quad (14)$$

扭转

$$\begin{cases} \rho I_0 \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} - GK \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} \\ = - \sum_{i=1}^{N_s} M_{si}(t) \delta(x - x_{si}) + \sum_{j=1}^{N_w} M_{Gj}(t) \delta(x - x_{wj}). \end{cases} \quad (15)$$

式中 m 为钢轨单位长度质量; κ_z 是钢轨截面的剪切形状因子, G 是剪切弹性模量, A 是钢轨的截面积, $\kappa_z GA$ 为钢轨截面对*y*轴的剪切刚度; E 是弹性模量, I_y 是钢轨截面对*y*轴的惯性矩, EI_y 是钢轨截面对*y*轴的弯曲刚度; ρ 是钢轨材料的密度, $\mu_{tz} = \rho I_y$ 为钢轨截面对*y*轴的单位长度转动惯量; I_0 是钢轨截面的极惯性矩, ρI_0

是钢轨单位长度的绕轴向扭转转动惯量; ψ_z 是由弯矩引起梁轴线绕 y 轴方向的转角, R_{zi} 是第 i 个轨枕的垂向作用力, M_{si} 和 M_{Gi} 分别是由扣件对钢轨的约束力和车轮对钢轨作用力引起的对钢轨扭转中心等效扭转力矩, 具体表达式见文献[4]. $\delta(x)$ 是 Dirac delta 函数, N_s 和 N_w 分别是计算模型中所考虑的轨枕数量和车轮数量. x_{si} 表示轨枕在所考虑的一定长度计算梁上的坐标位置, 在梁的运动方程中是时间的函数, 体现了确定的有限长度轨道计算模型是时变系统, 能反映轨道由于轨枕离散支撑对列车轨道耦合动力学行为的影响. l_s 为轨枕间距, v 是行车速度[5].

对于轨枕、道床和路基, 现有模型多数处理方法也是等效成多刚体模型, 即弹簧、阻尼、梁和质量块模型[4], 但是随着计算科学的发展, 完全有可能采用更加符合实际的模型, 如非线性弹簧、非线性阻尼、非等截面梁、离散粒子堆积体和连续支撑模型.

3 高速轮轨系统动力学服役模拟研究

任何铁路机车车辆的性能都会随着运用时间的增加而发生变化. 在实际运用中, 机车车辆通过一段时间的运行, 就会出现性能下降, 材料和结构的损伤破坏, 严重的情况将直接影响到行车安全. 性能下降主要是参数的不稳定性及参数时变性引起的, 如液压减振器的失效, 橡胶弹簧元件的老化等; 也可能是由材料变化和结构失效导致的. 车轮表面的擦伤直接导致轮轨间振动的加剧, 降低轮轨系统的性能. 性能的下降意味着振动的进一步加剧, 加速了原有的失效或导致新的失效发生, 最终导致高速列车无法安全运行.

以往的车辆系统动力学研究, 包括已经广泛应用的车-线、弓-网系统动力学研究, 主要是作为机车车辆计算机辅助设计的工具, 以指导结构设计, 或预测结构参数的设计理论值. 然而现代仿真技术不仅仅是计算机辅助设计的工具, 更是进行运用分析和故障分析的工具. 因此, 高速轮轨系统动力学研究应该从设计分析延拓到服役模拟. 为了实现服役模拟, 就必须在高速轮轨系统动力学模型中加入描述参数时变模型、结构及材料失效的计算模型, 其中, 时变参数包括车辆悬挂参数、几何尺寸和轮轨踏面磨损等. 高速动车组服役模拟的计算和模型框图如图 4 所示, 模型中不仅描述了轮轨大系统模型, 并把来自于固定设备及运行介质的扰动作为系统输入, 系统模型中把时变参数模型考虑在其中, 对该系统模型进

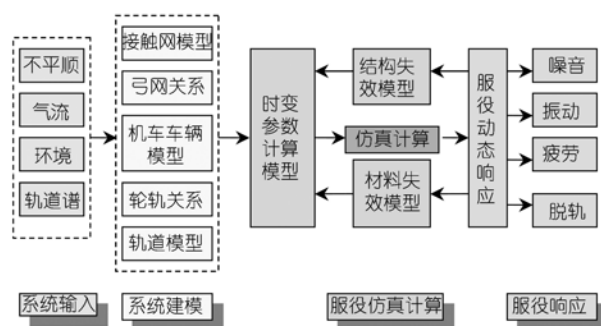


图 4 高速轮轨系统服役模拟计算和模型框图

行仿真计算, 得到轮轨系统的服役响应, 而系统响应反过来影响到材料和结构的服役性能, 引发材料和结构的失效和破坏, 同时影响到参数的变化, 进而导致轮轨系统动力学性能的恶化, 出现诸如激烈的振动、噪音、疲劳等, 最终导致材料失效、结构破坏, 甚至导致列车脱轨事故的发生.

基于轮轨系统动力学的服役模拟, 不仅可以在设计阶段进行参数选择和性能优化, 也可以进行服役过程中的模拟, 进行材料、结构、参数和性能等广义失效的分析和预测, 研究结构失效、参数变化和动态响应的相互影响关系, 揭示高速铁路广义失效(材料、结构、参数和性能失效)的相互作用机制, 为高速列车安全服役研究提供理论基础. 同时, 可以研究设计、生产和维护的标准, 如左右轮轮重和轮径差的允许值, 前后轮对的对角线、踏面磨损等制造和运行导致的误差允许范围.

高速轮轨系统的服役模拟, 并不是要考虑所有参数、材料和结构的广义失效模型, 而是仅仅关注关键失效因素. 对于悬挂参数, 主要考虑敏感系数高的参数. 图 5 为一高速车辆的悬挂参数对运动稳定性的灵敏度系数曲线[6], 这里一系纵向刚度 K_{px} 和二系横向刚度 K_{sy} 和抗蛇行减振器阻尼系数 C_{sx} , 就是需要关注的对象. 对于悬挂参数, 还应该研究参数值不稳定的悬挂元件, 如液压阻尼器、橡胶悬挂元件等, 这些参数会随着服役时间的增加而发生变化, 也就是时变性. 这些悬挂参数的参数变化模型必须通过实验来获得. 注意图中参数 K 和 C 分别表示刚度系数和阻尼系数, 足标 p 表示一系悬挂, s 表示二系悬挂, x 和 y 分别表示轨道纵向和轨道横向. 图中 5 中的结果是借助车辆系统状态方程对悬挂参数求导得到.

结构失效是高速动车组服役模拟中十分关键和

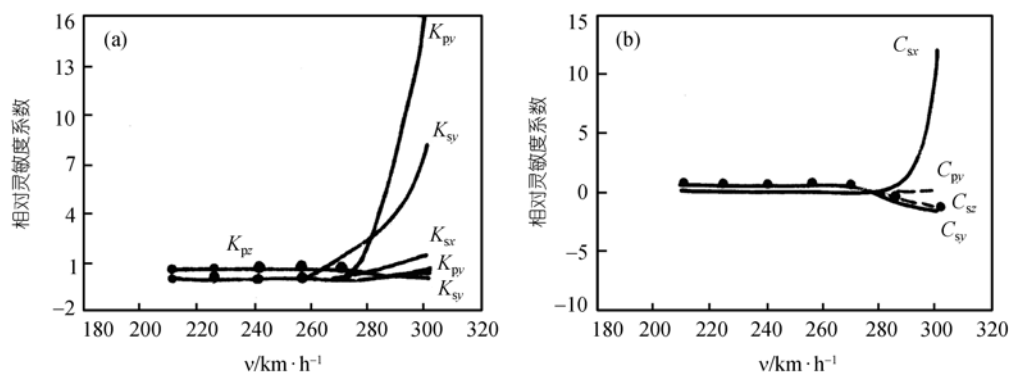


图5 悬挂参数对车辆运动稳定性的灵敏度

(a) 悬挂刚度; (b) 悬挂阻尼

复杂的研究工作, 失效形式除了结构疲劳失效外, 还有摩擦磨损的失效, 尤其是影响车辆性能和安全的轮轨和弓网材料摩擦磨损模型. 而这些失效模型往往必须通过大量的实验分析, 进行数据的回归分析得到量化的失效模型. 如对于轮轨的摩擦磨损模型, 采用与单位面积上摩擦功成正比的材料磨损模型, 考虑车轮一次通过后钢轨接触表面在单元面积 J 上的磨损深度可表示为^[2]

$$w_J^{(1)} = C_w |S_{J\tau} p_{J\tau}| / \rho, \quad (16)$$

式中 C_w 为与轮轨材料、硬度和型面有关的磨损系数(通过实验获得), ρ 为钢轨材料密度, $S_{J\tau}$ 为轮轨相对滑动量, $p_{J\tau}$ 为轮轨接触压力. 在服役仿真时, 计算得到车轮每次滚过后磨损深度, 通过累加得到总磨损深度.

4 结束语

本文以高速轮轨列车的动力学研究为背景, 考虑到高速列车运行时振动和气流耦合作用的加剧, 提出高速轮轨系统动力学的概念, 以考虑高速列车运行时与固定设备(线路、接触网)耦合作用, 以及和气流的作用, 总结分析相关的研究内容体系. 采用子结构方法, 分析和确定各子系统运动方程和子系统间的耦合关系, 通过耦合关系式, 建立了考虑线路、动车组、弓网和气流耦合的高速轮轨系统动力学模型框架. 同时提出了服役模拟的新概念, 并建立了考虑广义失效模型的高速轮轨系统广义动力学模型和服役仿真的思想体系.

由于本文的研究立足于系统和体系的建立, 是

传统车辆系统动力学研究的提高和深化, 这不仅是学术研究的需要, 更是高速铁路发展的需要. 本文的研究还十分粗浅, 但为今后的高速轮轨系统动力学研究提供了方向, 而且在我国高速动车组的技术引进消化吸收和再创新中, 就应该遵循这样的研究方法, 进行有益的尝试. 随着我国高速轮轨铁路系统的建设和创新性研究的进行, 后续专项研究成果将逐一介绍.

参 考 文 献

- 1 Eppinger S D, O'Connor D N, Seering W P, et al. Modeling and experimental evaluation of asymmetric pantograph dynamics. *ASME J Dyn Syst Meas Control*, 1988, 110(2): 168—174
- 2 刘红娇, 张卫华, 梅桂明. 基于状态空间法的受电弓主动控制的研究. *中国铁道科学*, 2006, 27(3): 79—83
- 3 Shen Z Y, Hedrick J K, Elkins J A. A comparison of alternative creep-force models for rail vehicle dynamic analysis. In: *Proceedings of the 8th IAVSD Symposium*, Cambridge, USA, 1984. 591 - 605
- 4 翟婉明. 车辆-轨道耦合系统动力学(第二版). 北京: 中国铁道出版社, 2003
- 5 Zhang S G, Xiao X B, Zhang W H, et al. Effect of unsupported sleepers on wheel/rail normal load (Part 1). In: *Proceedings of the 6th International Exhibition & Seminars on Rail Technology*, Utrecht, the Netherlands, 2007. 369—383
- 6 曾京, 邬平波. 高速客车动力学性能的参数灵敏度分析. *西南交通大学学报*, 1996, 31(增刊): 186—198
- 7 Jin X S, Wen Z F, Wang K Y, et al. Three-dimensional train-track model for study of rail corrugation. *J Sound Vib*, 2006, 293(3-5): 830—855[DOI]