

集中荷载作用下三维裂纹问题的 动态应力强度因子

赵晓华

(汕头大学建筑工程系, 汕头 515063)

摘要 讨论裂纹面受一对突加集中荷载作用时的三维半无限裂纹问题. 应用对称性和叠加原理, 将其化为 Lamb 问题和有位移约束条件的半无限大空间问题分别进行求解. 在此基础上, 利用积分变换、Wiener-Hopf 技术和 Cagniard-de Hoop 方法, 成功地得到了动态应力强度因子的精确解. 所得到的解有明确的物理意义.

关键词 三维动态荷载 半无限裂纹 应力强度因子

由于数学上的困难, 三维断裂动力学问题的研究一直很少见. Freund 首先研究了 Rayleigh 表面波与半平面裂纹相互作用问题^[1]. Achenbach 等研究了三维简谐荷载作用下的半无限裂纹应力强度因子历史^[2]. 随后 Freund 提出了一个一般的方法来解决一类三维弹性动态裂纹问题^[3]. 文献[4~7]分别对运动荷载和复合荷载情形进行了讨论.

上述文献所讨论的问题均不含有特征长度, 因而可直接用积分变换方法和 Wiener-Hopf 技术求解. 当含有特征长度时, Wiener-Hopf 技术不能直接应用. 一个特别典型的问题是: 一半无限平面裂纹突然受一对垂直于裂纹面的集中荷载作用, 荷载作用在裂纹面上距裂纹尖端为 l 的位置, 即

$$\sigma_-(x, z, t) = -F\delta(x+l)\delta(z)H(t). \quad (1)$$

文献[8]基于文献[9]中的方法, 即直接应用 Wiener-Hopf 技术, 对这一问题进行了讨论. 但遗憾的是, 这种分析是错误的. 从文献[8]中的分析可以看到, 经过 Laplace 变换后, 问题最终归结为求解一个含有两个未知函数的方程. 由于特征长度的存在, 此方程中含有指数函数 $V(\eta) = F_+(\eta)\exp(s\eta)$, 其中 $F_+(\eta)$ 在 $\text{Re}(\eta) > d$ 内解析, s 为正的实数而 d 为常数. 当 $\eta \rightarrow \infty$ 时, $V(\eta) \rightarrow \infty$. 根据解析延拓的概念和 Liouville 定理确定的整函数是一次数为无穷大的多项式. 显然我们不能根据物理条件确定多项式的所有系数. 为了能应用解析延拓的概念和 Liouville 定理得到方程的解, 文献[8]中附加了带状域的限制条件, 对这一指数函数进行了分解. 这实质上是去掉了函数在无穷远点的特性. 以后将会看到, 这种特性正是我们需要的.

检查文献[8]的结果可以发现, 当 Rayleigh 波到达时, 动态应力强度因子为有限值(未出现间断). 这从物理意义上是解释不通的, 因为物理量出现间断是 Rayleigh 波到达时所固有的特性. 事实上, 对于含有特征长度的情形, 直接用 Wiener-Hopf 技术是不能得到正确解的.

综上所述, 裂纹面受 1 对突加集中荷载作用时的三维半无限裂纹问题仍然没有得到解决. 本文继续对这一问题进行讨论. 利用对称性和叠加原理, 将问题分解为 Lamb 问题和有位移约束条件的半无限大空间问题分别进行求解, 成功地得到了动态应力强度因子的精确解. 所得到的结果有明确的物理意义.

1 基本方程

如图 1 所示, 设无界弹性体含有一半无限大平面裂纹. 材料的弹性常数为剪切模量 μ , Poisson 比 ν , 质量密度 ρ , 膨胀波速、剪切波速和 Rayleigh 波速分别为 c_d , c_s 和 c_r . 在零初始时刻, 裂纹面突然受 1 对法向集中荷载作用, 其大小相等, 方向相反, 作用在距裂纹尖端为 l 的位置. 从而弹性体产生一三维应力波场. 由于问题的对称性, 只需考虑 $y \geq 0$ 的区域.

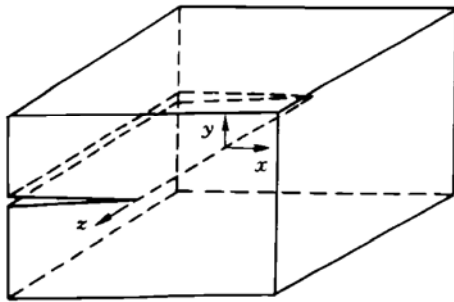


图 1 含半平面裂纹无限弹性体

在如图所示的坐标系中, 边界条件表示为

$$\sigma_{yy}(x, 0, z, t) = \sigma^-(x, z, t) + \sigma^+(x, z, t), \quad (2a)$$

$$\sigma_{xy}(x, 0, z, t) = 0, \quad (2b)$$

$$\sigma_{yz}(x, 0, z, t) = 0, \quad (2c)$$

$$u_y(x, 0, z, t) = u^-(x, z, t), \quad (2d)$$

其中 $-\infty < x, z < +\infty, t \geq 0$, 且

$$\sigma^-(x, z, t) = -F\delta(x+l)\delta(z)H(t), \quad (3)$$

式中下标负号定义在 $x < 0$ 的区域, 而在 $x > 0$ 的区域恒为零; 下标正号定义在 $x > 0$ 的区域, 而在 $x < 0$ 的区域恒为零; F 和 l 为正的实常数. $H(t)$ 为 Heaviside 函数.

弹性体的位移矢量用势函数 φ 和 Ψ 表示为

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi + \nabla \times \Psi, \quad \nabla \cdot \Psi = 0. \quad (4)$$

势函数 φ 和 Ψ 满足下述波动方程:

$$\nabla^2 \varphi = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \Psi = b^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}, \quad (5)$$

其中 $a = c_d^{-1}$, $b = c_s^{-1}$.

设 $t \leq 0$ 时弹性体处于无应力和静止状态, 用势函数表示为

$$\varphi(x, y, z, 0) = \frac{\partial \varphi(x, y, z, 0)}{\partial t} = \Psi(x, y, z, 0) = \frac{\partial \Psi(x, y, z, 0)}{\partial t} = 0. \quad (7)$$

边界条件(2)可以进一步分解为下述两个问题进行求解.

问题 I:

$$\sigma_{yy}^I(x, 0, z, t) = \sigma^-(x, z, t), \quad (8a)$$

$$\sigma_{xy}^I(x, 0, z, t) = 0, \quad (8b)$$

$$\sigma_{yz}^I(x, 0, z, t) = 0. \quad (8c)$$

问题 II:

$$\sigma_{yy}^{II}(x, 0, z, t) = \sigma_+(x, z, t), \quad (9a)$$

$$\sigma_{xy}^{II}(x, 0, z, t) = 0, \quad (9b)$$

$$\sigma_{yz}^{II}(x, 0, z, t) = 0, \quad (9c)$$

$$u_y^{II}(x, 0, z, t) = u_-^{II}(x, z, t) - u_+^I(x, z, t). \quad (9d)$$

问题 I 即为众所周知的 Lamb 问题, 其对裂纹尖端的应力奇异性没有任何贡献. 已求得其表面垂直方向的位移为^[10](改变了形式):

$$u_y^I(x, z, t) = -\frac{Fb}{\pi^2\mu} \int_{a/b}^{\infty} \frac{H(\tau_0 - \nu)}{br(\tau_0^2 - \nu^2)^{1/2}} \cdot f(\nu) d\nu, \quad (10)$$

式中

$$r = \sqrt{(x+l)^2 + z^2}, \quad (11)$$

$$\tau_0 = \frac{t}{br}, \quad (12)$$

$$f(\nu) = \begin{cases} \frac{\nu(1-2\nu^2)^2 \sqrt{\nu^2 - a^2/b^2}}{(1-2\nu^2)^4 + 16\nu^4(1-\nu^2)(\nu^2 - a^2/b^2)}, & a/b \leq \nu < 1, \\ \frac{\nu \sqrt{\nu^2 - a^2/b^2}}{(1-2\nu^2)^2 - 4\nu^2 \sqrt{\nu^2 - 1} \cdot \sqrt{\nu^2 - a^2/b^2}}, & \nu \geq 1. \end{cases} \quad (13)$$

这样

$$u_+^I(x, z, t) = u_y^I(x, z, t)H(x). \quad (14)$$

2 基本解

为得到问题 II 的解, 本文先考虑下述边界条件作为基本解:

$$\sigma_{yy}(x, 0, z, t) = \sigma_+(x, z, t), \quad (15a)$$

$$\sigma_{xy}(x, 0, z, t) = 0, \quad (15b)$$

$$\sigma_{yz}(x, 0, z, t) = 0, \quad (15c)$$

$$u_y(x, 0, z, t) = u_-(x, z, t) - \frac{H(\tau_0 - \nu)H(x)}{br(\tau_0^2 - \nu^2)^{1/2}}. \quad (15d)$$

为简单起见, 这里省略了上标的记法. 引入单边 Laplace 变换

$$\widehat{\varphi}(x, y, z, s) = \int_0^{\infty} \varphi(x, y, z, t) \exp(-st) dt \quad (16)$$

对 z 取双边 Laplace 变换消去变量 z , 其变换量为 $s\xi$

$$\overline{\widehat{\varphi}}(x, y, \xi, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(x, y, z, s) \exp(-s\xi z) dz \quad (17)$$

对 x 取双边 Laplace 变换消去变量 x , 其变换量为 $s\eta$

$$\varphi^*(\eta, y, \xi, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\widehat{\varphi}}(x, y, \xi, s) \exp(-s\eta x) dx. \quad (18)$$

波动方程经过三重 Laplace 变换后, 其变换域中的适当解为

$$\varphi^*(\eta, y, \xi, s) = \frac{A}{s^3} \exp(-asy), \quad (19a)$$

$$\Psi^*(\eta, y, \xi, s) = \frac{Q}{s^3} \exp(-\beta sy), \quad (19b)$$

$$Q = (Q_x, Q_y, Q_z), \quad (19c)$$

且 $\alpha = (a^2 - \eta^2 - \xi^2)^{1/2}$, $\beta = (b^2 - \eta^2 - \xi^2)^{1/2}$.

复平面 η 沿割线 $\sqrt{a^2 - \xi^2} < |\operatorname{Re}(\eta)| < \infty$, $\operatorname{Im}(\eta) = 0$ 切开, 使 $\operatorname{Re}(\alpha) \geq 0$. 同样定义 $\operatorname{Re}(\beta) \geq 0$.

对 $\nabla \cdot \Psi = 0$ 进行三重 Laplace 变换, 并将(19)式代入后, 有

$$\eta Q_x - \beta Q_y + \xi Q_z = 0. \quad (20)$$

对边界条件(15)进行三重 Laplace 变换, 并利用下述等式^[10, 11]:

$$\int_0^\infty \frac{H(\tau_0 - \nu)}{br(\tau_0^2 - \nu^2)^{1/2}} \exp(-st) dt = K_0(k_1 r \nu), \quad (21)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_0(k_1 r \nu) \exp(-s\xi z) dz = \frac{\pi}{s\lambda} \exp[-s\lambda(x+l)], \quad (22)$$

式中 $K_0(k_1 r \nu)$ 为第 2 类修正 Bessel 函数,

$$k_1 = bs, \quad \lambda = \lambda(\xi) = \sqrt{b^2 \nu^2 - \xi^2}. \quad (23)$$

然后将应力和位移的表达式代入, 有

$$(b^2 - 2\xi^2 - 2\eta^2)A - 2\xi\beta Q_x + 2\eta\beta Q_z = \mu^{-1} \Sigma_+, \quad (24a)$$

$$-2\eta\alpha A + \xi\eta Q_x + \xi\beta Q_y + (\beta^2 - \eta^2)Q_z = 0, \quad (24b)$$

$$2\xi\alpha A + (\beta^2 - \xi^2)Q_x + \eta\beta Q_y + \xi\eta Q_z = 0, \quad (24c)$$

$$-\alpha A + \xi Q_x - \eta Q_z = U_- - \frac{\pi}{\lambda(\lambda + \eta)} \exp(-s\lambda), \quad (24d)$$

$$\text{式中} \quad \Sigma_+ = s \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\sigma}_+(x, z, s) \exp[-s(\xi z + \eta x)] dz dx, \quad (25)$$

$$U_- = s^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}_-(x, z, s) \exp[-s(\xi z + \eta x)] dz dx. \quad (26)$$

联立求解(20)和(24)式, 得

$$-\frac{\mu}{b^2} \cdot \frac{R(\xi, \eta)}{\alpha(\xi, \eta)} \left[U_- - \frac{\pi}{\lambda(\lambda + \eta)} \exp(-s\lambda) \right] = \Sigma_+, \quad (27)$$

$$\text{其中} \quad R(\xi, \eta) = 4(\xi^2 + \eta^2)\alpha(\xi, \eta)\beta(\xi, \eta) + (b^2 - 2\xi^2 - 2\eta^2)^2 \quad (28)$$

为 Rayleigh 波函数. 当 $\eta = \pm \sqrt{c^2 - \xi^2}$ 且 $c = 1/c_r$ 时, $R(\xi, \eta) = 0$. 根据文献[3]的渐近分析, 知 Σ_+ 在 $\operatorname{Re}(\eta) > -\sqrt{a^2 - \xi^2}$ 的区域内解析, U_- 在 $\operatorname{Re}(\eta) < 0$ 时解析. 因而(27)式在 $-\sqrt{a^2 - \xi^2} < \operatorname{Re}(\eta) < 0$ 内成立, 可以用 Wiener-Hopf 技术求解.

引入一新函数

$$S(\xi, \eta) = \frac{R(\xi, \eta)}{k(c^2 - \xi^2 - \eta^2)}, \quad k = 2(b^2 - a^2), \quad (29)$$

则其可以分解为^[3]

$$S(\xi, \eta) = S_+(\xi, \eta)S_-(\xi, \eta), \quad (30)$$

$$S_{\pm}(\xi, \eta) = \exp\left\{-\frac{1}{\pi} \int_a^b \tan^{-1} \left[\frac{4\xi^2 \sqrt{(b^2 - \zeta^2)(\zeta^2 - a^2)}}{(b^2 - 2\zeta^2)^2} \right] \frac{\zeta d\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - \xi^2}(\sqrt{\zeta^2 - \xi^2} \pm \eta)}\right\}, \quad (31)$$

$S_+(\xi, \eta)$ 在 $\text{Re}(\eta) > -\sqrt{a^2 - \xi^2}$ 内解析, $S_-(\xi, \eta)$ 在 $\text{Re}(\eta) < \sqrt{a^2 - \xi^2}$ 内解析. 同时有

$$\alpha(\xi, \eta) = \alpha_+(\xi, \eta)\alpha_-(\xi, \eta), \quad (32)$$

$$\alpha_+(\xi, \eta) = \sqrt{\sqrt{a^2 - \xi^2} + \eta}, \quad \alpha_-(\xi, \eta) = \sqrt{\sqrt{a^2 - \xi^2} - \eta}, \quad (33)$$

$$c^2 - \xi^2 - \eta^2 = (\sqrt{c^2 - \xi^2} + \eta)(\sqrt{c^2 - \xi^2} - \eta). \quad (34)$$

$$\text{令} \quad F_{\pm}(\xi, \eta) = \frac{(\sqrt{a^2 - \xi^2} \pm \eta)^{1/2}}{(\sqrt{c^2 - \xi^2} \pm \eta)S_{\pm}(\xi, \eta)}, \quad (35)$$

则(27)式成为

$$-\frac{\mu k}{b^2} \cdot \frac{1}{F_-(\xi, \eta)} \left[U_- - \frac{\pi}{\lambda(\lambda + \eta)} \exp(-s\lambda) \right] = F_+(\xi, \eta)\Sigma_+, \quad (36)$$

等式左边第 2 项含有极点 $\eta = -\lambda$. 移去极点, 得到

$$-\frac{\mu k}{b^2 F_-(\xi, \eta)} U_- + \frac{\pi \mu k \exp(-s\lambda)}{b^2 \lambda(\lambda + \eta)} \left[\frac{1}{F_-(\xi, \eta)} - \frac{1}{F_+(\xi, \lambda)} \right] = F_+(\xi, \eta)\Sigma_+ - \frac{\pi \mu k \exp(-s\lambda)}{b^2 \lambda(\lambda + \eta) F_+(\xi, \lambda)}, \quad (37)$$

上式在条形域 $-\sqrt{a^2 - \xi^2} < \text{Re}(\eta) < 0$ 内成立. 由解析延拓的概念, 知上述等式的左边和右边代表同一解析函数 $E(\xi, \eta, s)$. 当 $|\eta| \rightarrow \infty$ 时, $E(\xi, \eta, s) \rightarrow 0$. 根据 Liouville 定理, $E(\xi, \eta, s) \equiv 0$. 由此得到

$$\Sigma_+ = \frac{\mu k}{b^2} \cdot \frac{\pi \exp(-s\lambda)}{\lambda(\lambda + \eta) F_+(\xi, \lambda) F_+(\xi, \eta)}, \quad (38)$$

$$U_- = \frac{\pi \exp(-s\lambda)}{\lambda(\lambda + \eta)} \left[1 - \frac{F_-(\xi, \eta)}{F_+(\xi, \lambda)} \right]. \quad (39)$$

3 动态应力强度因子

我们先求基本解的动态应力强度因子. 变换后的应力强度因子可表示为

$$\widehat{K}_I^F(\xi, s) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [(2\pi x)^{1/2} \widehat{\sigma}_+(x, \xi, s)]. \quad (40)$$

利用关于变换渐近特性的 Abel 定理和(25)、(38)式给出

$$\widehat{K}_I^F(\xi, s) = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} [(2s\eta)^{1/2} \Sigma_+(\xi, \eta, s) \cdot s^{-1}] = \sqrt{\frac{2}{s}} \cdot \frac{\pi \mu k \exp(-s\lambda)}{b^2 \lambda F_+(\xi, \lambda)}. \quad (41)$$

下面用 Cagniard-de Hoop 方法求反演.

$$\widehat{K}_I^F(z, s) = \frac{\pi \mu k}{b^2} \cdot \sqrt{\frac{2}{s}} \cdot \frac{s}{2\pi i} \int_{a_0 - i\infty}^{a_0 + i\infty} \frac{\exp[-s\{\lambda(\xi) - \xi z\}]}{\lambda(\xi) F_+[\xi, \lambda(\xi)]} d\xi. \quad (42)$$

令 $\lambda(\xi) - \xi z = t$, 则

$$\xi_{\pm} = -\frac{zt}{z^2 + l^2} \pm \frac{il}{z^2 + l^2} \sqrt{t^2 - b^2 v^2 (z^2 + l^2)}, \quad (43)$$

上式所表示的是 ξ 平面内的一条双曲线 Γ_{\pm} . 其对 t 的导数为

$$\frac{\partial \xi_{\pm}}{\partial t} = -\frac{z}{z^2 + l^2} \pm \frac{ilt}{(z^2 + l^2) \sqrt{t^2 - b^2 v^2 (z^2 + l^2)}}. \quad (44)$$

当 $t = t_0 = bv \sqrt{z^2 + l^2}$ 时, 得到这条双曲线 Γ_{\pm} 与实轴的交点

$$\xi_0 = -\frac{bvz}{\sqrt{z^2 + l^2}}. \quad (45)$$

选取如图 2 所示的围道. 当 $|\xi_0| < a$ 时, 围道内不含有 $\lambda(\xi)F_+[\xi, \lambda(\xi)]$ 的分支点, $\lambda(\xi)F_+[\xi, \lambda(\xi)]$ 单值解析, 且没有零点. 选择 $\lambda(\xi)$ 的适当分支, 使得当 $\xi = 0$ 时, $\lambda(0) = bv$. 这样应用 Jordan 引理的条件也得到了满足. 利用围道积分和 Jordan 引理, 给出

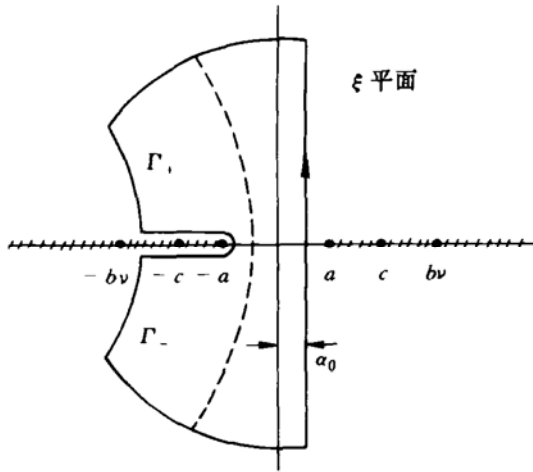


图 2 积分围道

$$\widehat{K}_I^F(z, s) = \frac{\pi \mu k}{b^2} \cdot \sqrt{\frac{2}{s}} \cdot \frac{s}{\pi} \cdot \operatorname{Im} \int_{t_0}^{\infty} \frac{\exp(-st)}{\lambda(\xi_+) F_+[\xi_+, \lambda(\xi_+)]} \frac{\partial \xi_+}{\partial t} dt. \quad (46)$$

令

$$G(\nu, t) = \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{\lambda(\xi_+) F_+[\xi_+, \lambda(\xi_+)]} \cdot \frac{\partial \xi_+}{\partial t} \right\}, \quad (47)$$

利用卷积的 Laplace 变换公式, 得到

$$K_I^F(z, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\mu k}{b^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_{t_0}^t \frac{G(\nu, \tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau. \quad (48)$$

当 $|\xi_0| > a$ 时, 围道内有 $\lambda(\xi)F_+[\xi, \lambda(\xi)]$ 的分支点. 此时, 围道积分应包括沿支割线积分.

$$\widehat{K}_I^F(z, s) = \frac{\pi \mu k}{b^2} \cdot \sqrt{\frac{2}{s}} \cdot \frac{s}{\pi} \left\{ \operatorname{Im} \int_{t_0}^{\infty} \frac{\exp(-st)}{\lambda(\xi_+) F_+[\xi_+, \lambda(\xi_+)]} \cdot \frac{\partial \xi_+}{\partial t} dt - \operatorname{Im} \int_a^{|\xi_0|} \frac{\exp\{-s[\lambda(\xi) + \xi z]\}}{\lambda(\xi) F_+[\xi, \lambda(\xi)]} d\xi \right\}, \quad (49)$$

令上式中 $\widehat{I} = s \cdot \sqrt{\frac{1}{s}} \operatorname{Im} \int_a^{|\xi_0|} \frac{\exp\{-s[\lambda(\xi) + \xi z]\}}{\lambda(\xi) F_+[\xi, \lambda(\xi)]} d\xi, \quad (50)$

利用 $\int_0^{\infty} \delta(t - \tau) \exp(-st) dt = \exp(-s\tau) \quad (51)$

得到 \widehat{I} 的反演为

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t - \tau}} \cdot \operatorname{Im} \int_a^{|\xi_0|} \frac{\delta\{\tau - [\lambda(\xi) + \xi z]\}}{\lambda(\xi) F_+[\xi, \lambda(\xi)]} d\xi d\tau. \quad (52)$$

$$\text{令} \quad \lambda(\xi) + \xi z = \tau. \quad (53)$$

由于 $a \leq \xi \leq |\xi_0|$, 则 $t_H \leq \tau \leq t_0$, 其中 $t_H = az + l \sqrt{b^2 \nu^2 - a^2}$.

满足这样的条件下, 式(53)的解为

$$\xi_1 = \frac{z\tau}{z^2 + l^2} - \frac{l}{z^2 + l^2} \sqrt{b^2 \nu^2 (z^2 + l^2) - \tau^2}. \quad (54)$$

$$\text{令} \quad G_1(\nu, \tau) = \text{Im} \left\{ \frac{1}{\lambda(\xi_1) F_+ [\xi_1, \lambda(\xi_1)]} \right\}, \quad (55)$$

$$\text{则} \quad I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial}{\partial t} \int_{t_H}^{t_0} \frac{G_1(\nu, \tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau. \quad (56)$$

基本解的动态应力强度因子为

$$K_I^F(z, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\mu k}{b^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{t_0}^t \frac{G(\nu, \tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau - \int_{t_H}^{t_0} \frac{G_1(\nu, \tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau \right]. \quad (57)$$

(48)和(57)式可合并写为

$$K_I^F(z, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\mu k}{b^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{t_0}^t \frac{G(\nu, \tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau - \int_{t_H}^{t_0} \frac{G_1(\nu, \tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau H\left(\nu z - \frac{a}{b} \sqrt{z^2 + l^2}\right) \right]. \quad (58)$$

利用(8)~(15)和(58)式, 得所求问题的动态应力强度因子为

$$K_I = -\frac{Fb}{\pi^2 \mu} \int_{a/b}^{\infty} K_I^F(z, t) \cdot f(\nu) d\nu = \\ -\frac{\sqrt{2}kF}{\pi^{5/2}b} \int_{a/b}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{t_0}^t \frac{G(\nu, \tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau - \int_{t_H}^{t_0} \frac{G_1(\nu, \tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau H\left(\nu z - \frac{a}{b} \sqrt{z^2 + l^2}\right) \right] f(\nu) d\nu, \quad (59)$$

由于 $t_H \leq t_0 \leq t$, 因而最后得到

$$K_I = -\frac{\sqrt{2}kF}{\pi^{5/2}b} \frac{\partial}{\partial t} \int_{a/b}^{\nu_0} \left[\int_{t_0}^t \frac{G(\nu, \tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau - \int_{t_H}^{t_0} \frac{G_1(\nu, \tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau H\left(\nu z - \frac{a}{b} \sqrt{z^2 + l^2}\right) \right] f(\nu) d\nu, \quad (60)$$

式中 $\nu_0 = \frac{t}{b \sqrt{z^2 + l^2}}$.

(60)式为本文的主要结果. 与文献[8]相比, 可知两者是完全不同的.

4 结果与讨论

(60)式有明确的物理意义, 第1项表示入射波场引起的动态应力强度因子, 第2项由先期到达的波产生的、沿裂纹尖端传播的波所引起. Rayleigh波到达时, $f(\nu)$ 有一极点 c/b . 此时, 应力强度因子趋于无限大. 之后, $f(\nu)$ 逐渐衰减. 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 应力强度因子趋于静态值.

为使物理意义更加清晰起见, 我们对 Poisson 材料进行了数值计算. 有关的参数为: $\nu = 0.25$, $b = \sqrt{3}a$, $c = 1.88a$. $z = l$ 时的结果如图3所示. 图中的应力强度因子已按 $\bar{K}_I = K_I \times \frac{(\pi l)^{3/2}}{\sqrt{2}F}$ 无量纲化.

从图中可以看到, 在P波到达以前, 应力强度因子为零. P波到达后, 应力强度因子为负值, 说明裂纹面有相互靠拢的趋势. 然后, S波到达, 引起应力强度因子产生剧烈的变化. 这

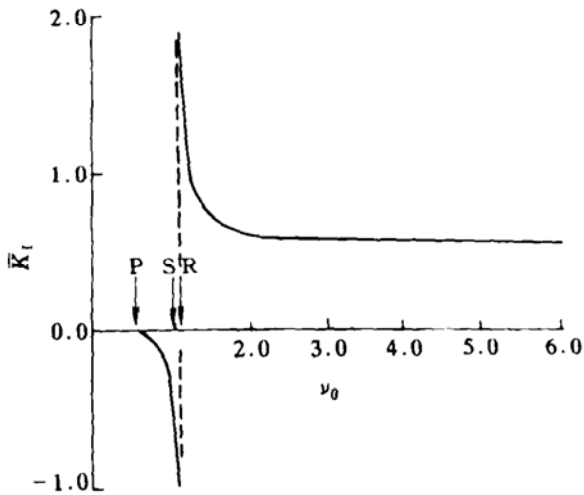


图 3 应力强度因子历史

种现象和文献[3]中讨论的线荷载作用的情况相似. 当 $t = (l^2 + z^2)^{1/2} \cdot c_r^{-1}$ 时, Rayleigh 面波到达. 这一瞬间, 应力强度因子具有 $(\nu_0 - c/b)^{-1}$ 阶的奇异性. 这与线荷载作用的情况又是完全不同的^[3]. 裂纹面受线荷载作用时, 应力强度因子具有对数奇异性. 由此可见, 应力强度因子具有何种奇异性取决于荷载作用的形式. Rayleigh 面波到达之后, 应力强度因子便逐渐衰减而趋于静态值. 当 $\nu_0 = 2$ 时, 动态值与静态值之比为 1.3; $\nu_0 = 4$ 时为 1.14; $\nu_0 = 6$ 时为 1.1.

至此, 我们完成了三维动态应力强度因子的全部计算. 本文在未附加任何条件的情况下, 应用叠加原理和积分变换方法, 成功地得到了三维半无限裂纹在垂直裂纹面方向突加一对集中荷载作用时的动态应力强度因子精确解.

致谢 本文承蒙导师孙钧院士仔细审阅并提出很多宝贵的意见, 对此深表谢意.

参 考 文 献

- 1 Freund L B. The oblique reflection of a Rayleigh wave from a crack tip. *Int J Solids Strut*, 1971, 7:1 199~1 210
- 2 Achenbach J D, Gutesen A K. Elastodynamic stress intensity factors for a semi-infinite crack under 3-D loading. *J Appl Mech*, 1977, 44:243~249
- 3 Freund L B. The stress intensity factor due to three dimensional transient loading on the faces of a crack. *J Mech Phys Solids*, 1987, 35:61~72
- 4 Ramirez J C. The three dimensional stress intensity factor due to the motion of a load on the faces of a crack. *Q Appl Math XLV*, 1987:361~376
- 5 Champion C R. The stress intensity factor history for an advancing crack under three-dimensional loading. *Int J Solids Strut*, 1988, 24:285~300
- 6 Liu Chuntu, Li Xiangping. A half plane crack under three-dimensional combined mode impact loading. *Acta Mechanica Sinica*, 1994, 10:40~48
- 7 Li Xiangping, Liu Chuntu. The three-dimensional dynamic stress intensity factor under the moving loads on the faces of a crack. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 1994, 15:95~103
- 8 Li Xiangping, Liu Chuntu. Elastodynamic stress intensity factor history for a semi-infinite crack under three-dimensional transient loading. *Science in China, Series A*, 1994, 37(9):1 053~1 061
- 9 Kuo M K, Cheng S H. Elastodynamic response due to anti-plane point impact loadings on the faces of interface crack along dissimilar anisotropic materials. *Int J Solids Strut*, 1991, 28:751~768
- 10 Eringen A C, Suhubi E S. *Elastodynamics*. Vol 2. New York: Academic Press, 1975
- 11 Freund L B. *Dynamic Fracture Mechanics*. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1990