中国科学

1989 年 10 月　　A 辑　　第 10 期

Schur 函数的一个展式及其在计数几何中的应用

钟家庆

(中国科学院数学研究所,北京)

摘　　要

本文给出对称多项式的幂的 Schur 函数展式

$$(x_1^k+\cdots+x_n^k)^m=\sum C_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)}S_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)}(x_1,\cdots,x_n)$$

中系数 $C_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)}$ 的计算方法,并把它和文献[1]应用于计数几何的若干问题.

关键词: Schur 函数,平面配置,展开公式,相交数

著名的 Newton 公式讨论了 $(x_1^k+\cdots+x_n^k)$ 如何用初等对称多项式表示. 本文要讨论函数 $(x_1^k+\cdots+x_n^k)^m$ 用 Schur 函数的线性组合表示的问题,即研究展开式

$$(x_1^k+\cdots+x_n^k)^m=\sum C_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)}S_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)}(x_1,\cdots,x_n). \qquad (\nabla)$$

从 Schur 函数理论本身来看, 公式 (▽) 也有着明显的独立意义. 基于作者的工作[2], 在第一节中我们将给出系数 $C_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)}$ 的一个计算方法. 在第二节中,我们把这一结果和作者[1]的一些结果应用于研究计数几何的若干问题. 其中包括组合数学中的一个平面配置的计数问题.

一、一个展开式

本节将讨论如何展开 $(x_1^k+\cdots+x_n^k)^m$ 成 Schur 函数的线性和,即计算

$$(x_1^k+\cdots+x_n^k)^m=\sum C_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)}S_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)}(x_1,\cdots,x_n) \qquad (\nabla)$$

的系数 $C_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)}$. 因为方法相似, 我们对 $k=2$ 给出细节, 而一般的 k 将给出结果和证明的步骤.

当 $k=1$ 时,结果是经典的. 由恒等式(文献[3], p. 17,定理 1.3.5)

$$\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{n}x_i}=\sum_{f_1\geq\cdots\geq f_n\geq 0}\frac{(\sum f_i)!D(\tilde{f}_1,\cdots,\tilde{f}_n)}{\tilde{f}_1!\cdots\tilde{f}_n!}S_{(f_1,\cdots,f_n)}(x_1,\cdots,x_n), \qquad (1.1)$$

其中 $\tilde{f}_i=f_i+n-i(i=1,2,\cdots n)$, $D(\tilde{f}_1,\cdots\tilde{f}_n)=\prod_{i<j}(\tilde{f}_i-\tilde{f}_j)$. 今后我们约定

1988 年 11 月 21 日收到修改稿

$$\frac{D(\tilde{f}_1,\cdots,\tilde{f}_n)}{\tilde{f}_1!\cdots\tilde{f}_n!}=N(f_1,\cdots,f_n), \tag{1.2}$$

另一方面，因为 $(1-\sum x_i)^{-1}=\sum\limits_{m=0}^{\infty}(\Sigma x_i)^m$，因此，

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^m=\sum_{\substack{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0\\ \Sigma f_i=m}}m!N(f_1,\cdots,f_n)S_{(f_1,\cdots,f_n)}(x_1,\cdots,x_n), \tag{1.3}$$

(1.3) 式给出了 (▽) 式当 $k=1$ 时的解答.

给出(1.3)式的另一方法是应用作者文献[1]中的公式(0.4)，即

$$\varphi(t_1),\cdots,\varphi(t_n)=\sum_{a_1\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant 0}S_{(a_1,\cdots,a_n)}(t_1,\cdots,t_n)G_{(a_1,\cdots,a_n)}. \tag{*}$$

令 $\varphi(x)=e^x$，则由(*)式我们有

$$\begin{aligned}\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)&=e^{x_1+\cdots+x_n}\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}(\Sigma x_i)^m\\&=\sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0}\begin{vmatrix}\frac{1}{f_1!} & \frac{1}{(f_1+1)!} & \cdots & \frac{1}{(f_1+n-1)!}\\ \frac{1}{(f_2-1)!} & \frac{1}{f_2!} & \cdots & \frac{1}{(f_2+n-2)!}\\ & & \ddots & \\ \frac{1}{(f_n-n+1)!} & & \cdots & \frac{1}{f_n}\end{vmatrix}\\&\quad\cdot S_{(f_1,\cdots,f_n)}(x_1,\cdots,x_n),\end{aligned} \tag{1.4}$$

比较(1.3)和(1.4)式，我们就证明了

引理. 如 $f_1\geqslant f_2\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0$ 是整数序列，则

$$\det\left(\frac{1}{(f_i+j-i)!}\right)=N(f_1,\cdots,f_n), \tag{1.5}$$

这里 $N(f_1,\cdots,f_n)$ 由(1.2)定义.

现在看 $k=2$. 令

$$\varphi(x)=e^{x^2}=\sum_{\lambda=0}^{\infty}b_\lambda x^\lambda,\quad b_\lambda=\begin{cases}0, & \lambda\text{ 奇},\\ \left[\left(\frac{\lambda}{2}\right)!\right]^{-1}, & \lambda\text{ 偶},\end{cases}$$

仍由(*)式，

$$\begin{aligned}\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)&=e^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}\\&=\sum_{\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n\geqslant 0}b_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)}S_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)}(x_1,\cdots,x_n),\end{aligned}$$

$$b_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)}=\begin{vmatrix} b_{\lambda_1}, & b_{\lambda_1+1}, & \cdots & b_{\lambda_1+n-1} \\ b_{\lambda_2-1}, & b_{\lambda_2}, & \cdots & b_{\lambda_2+n-2} \\ & & \ddots & \\ b_{\lambda_n-n+1}, & & \cdots & b_{\lambda_n} \end{vmatrix}. \tag{1.6}$$

对下标 $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ 中的每一个 λ_i 给予标记:

$$\begin{aligned} \lambda_i\in\Lambda^+ &\Longleftrightarrow \lambda_i-i=\text{奇数}, \\ \lambda_i\in\Lambda^- &\Longleftrightarrow \lambda_i-i=\text{偶数}, \end{aligned} \tag{1.7}$$

记 $\Lambda^+=\{\lambda_{i_1},\cdots,\lambda_{i_l}\mid i_1<i_2<\cdots<i_l\}$, $l=\#(\Lambda^+)$; $\Lambda^-=\{\lambda_{i_{l+1}},\cdots,\lambda_{i_n}\}$, $n-l=\#(\Lambda^-)$. 例如, $\lambda=(5,4,4,2)$,则 $\Lambda=\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_4\}$, $\Lambda^+=\{\lambda_3\}$. 易见,在行列式 $b_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)}$ 中,属于 Λ^+, Λ^- 的 λ_i 所在行为下列形式:

$$\Lambda^+\left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right.\begin{vmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ *\ 0\ *\ 0\ *\ 0\cdots \\ 0\ *\ 0\ *\ 0\ *\cdots \\ *\ 0\ *\ 0\ *\ 0\cdots \\ *\ 0\ *\ 0\ *\ 0\cdots \\ 0\ *\ 0\ *\ 0\ *\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{vmatrix}\left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right]\Lambda^-.$$

将 Λ^+, Λ^- 中所对应的行集中在一起,经过行列的移动,行列式成为

$$\left[\begin{array}{c} \\ \\ l \\ \\ \end{array}\right.\begin{vmatrix} \overbrace{\begin{matrix} * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * \end{matrix}}^{\frac{n+1}{2}} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} * & \cdots & * \\ \vdots & & \\ * & \cdots & * \end{matrix} \end{vmatrix}\left.\begin{array}{c} \\ \\ n-l \\ \\ \end{array}\right] \tag{1.8}$$

因此, $b_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)}\neq 0$,当且仅当 $l=\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$.

当 $l=\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$时,(1.8)式中对应于 Λ^+ 的子式为

$$\begin{vmatrix} b_{\lambda_{i_1}-i_1+1}, & b_{\lambda_{i_1}-i_1+3}, & \cdots, & b_{\lambda_{i_1}-i_1+2l-1} \\ b_{\lambda_{i_2}-i_2+1}, & b_{\lambda_{i_2}-i_2+3}, & \cdots, & b_{\lambda_{i_2}-i_2+2l-1} \\ & & \ddots & \\ b_{\lambda_{i_l}-i_l+1} & & \cdots\cdots\cdots & b_{\lambda_{i_l}-i_l+2l-1} \end{vmatrix}. \tag{1.9}$$

因为 $\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_l}\in\Lambda^+$,上式中每一元素的下标都是偶数,例如第一行实际为

$$b_{\lambda_{i_1}-i_1+1}=\frac{1}{\left(\frac{\lambda_{i_1}-i_1+1}{2}\right)!},\cdots,\ b_{\lambda_{i_1}-i_1+2l-1}=\frac{1}{\left(\frac{\lambda_{i_1}-i_1+2l-1}{2}\right)!},$$

因此，子式(1.9)也是(1.5)类型的行列式．根据(1.5)式，子式(1.9)的值为

$$N\left(\frac{\lambda_{i_1}-i_1+1}{2},\cdots,\ \frac{\lambda_{i_l}-i_l+2l-1}{2}\right),\tag{1.10}$$

同理，对 $\Lambda^-=\{\lambda_{i_{l+1}},\cdots\lambda_{i_n}\}$ 作类似处理，它在(1.8)式中所对应的右下角的子式的值为

$$N\left(\frac{\lambda_{i_{l+1}}-i_{l+1}+2}{2},\cdots,\ \frac{\lambda_{i_n}-i_n+2(n-l)}{2}\right),\tag{1.11}$$

同时，易于验证，由行列式(1.6)经行列变换成行列式(1.8)时，符号相差$(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_l-l}$．再注意 $e^{\Sigma x_i^k}=\sum\frac{1}{m!}(\sum x_i^k)^m$．将以上全部讨论综合起来，我们就得到 $k=2$ 时的 (▽)，如下：

定理 1.1. 记 $\Lambda^+=\{\lambda_{i_1},\cdots,\lambda_{i_l}\}$，$\Lambda^-=\{\lambda_{i_{l+1}},\cdots,\lambda_{i_n}\}$，

$$(x_1^2+\cdots+x_n^2)^m=m!\sum_{\substack{\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_n\geq 0\\ \Sigma\lambda_i=2m}}b_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)}S_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)}(x_1,\cdots,x_n),$$

则有

$$b_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)}=\begin{cases}0, & \text{当 } l\neq\left[\frac{n+1}{2}\right],\\ (-1)^{\sum_{k=1}^{l}i_k-l}N\left(\frac{\lambda_{i_1}-i_1+1}{2},\cdots,\frac{\lambda_{i_l}-i_l+2l-1}{2}\right) & \\ \quad\cdot N\left(\frac{\lambda_{i_{l+1}}-i_{l+1}+2}{2},\cdots,\frac{\lambda_{i_n}-i_n+2(n-l)}{2}\right), & \text{当 } l=\left[\frac{n+1}{2}\right],\end{cases}\tag{1.12}$$

其中 $N(\cdot,\cdots,\cdot)$ 由 (1.2) 式定义．

现在来讨论一般的 k．令

$$\varphi(x)=e^{x^k}=\sum_{\lambda=0}^{\infty}b_\lambda x^\lambda,\quad b_\lambda=\begin{cases}0, & \lambda\not\equiv 0\pmod k,\\ \frac{1}{\left(\frac{\lambda}{k}\right)!}, & \lambda\equiv 0\pmod k,\end{cases}$$

仍由 (*) 式

$$\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)=e^{\Sigma x_i^k}$$
$$=\sum_{\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_n\geq 0}b_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)}S_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)}(x_1,\cdots,x_n),$$

因此

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^k\right)^m=m!\sum_{\substack{\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_n\geq 0\\ \Sigma\lambda_i=mk}}b_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)}S_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)}(x_1,\cdots,x_n),\tag{1.13}$$

其中 $b_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)}$ 仍如 (1.6) 式所示．对 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ 的每一 λ_i 进行分类．任给正整数 s，

$1 \leqslant s \leqslant k$,定义

$$\lambda_i \in \Lambda^{(s)} \Longleftrightarrow \lambda_i - i \equiv -s(\bmod k), \tag{1.14}$$

易见,属于同一 $\Lambda^{(s)}$ 的 λ_i 的对应行在行列式 $b_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)}$ 中有相同的形式. 例如,

$$\lambda_i \in \Lambda^{(1)},\ \text{所在行} = (\overbrace{*,\ 0,\ \cdots 0}^{k},\ \overbrace{*,\ 0,\ \cdots 0}^{k},\ \overbrace{*,\ 0,}\cdots),$$

$$\lambda_i \in \Lambda^{(2)},\ \text{所在行} = (\overbrace{0,\ *,\ \cdots 0}^{k},\ \overbrace{0,\ *,\ \cdots 0}^{k},\ 0,\ *,\cdots),$$

因此,经过行列的移动, $b_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)}$ 成为(相差一符号因子)

$$\begin{array}{c} \left[\frac{n+k-1}{k}\right] \quad \left[\frac{n+k-2}{k}\right] \quad \cdots \quad \left[\frac{n}{k}\right] \\ \begin{array}{c} \\ l_1 \\ \\ \\ l_2 \\ \\ \\ l_k \end{array} \begin{vmatrix} * & \cdots & * & & & & & & \\ \vdots & & \vdots & & & & & & \\ * & \cdots & * & & & & & & \\ & & & * & \cdots & * & & & \\ & & & \vdots & & \vdots & & & \\ & & & * & \cdots & * & & & \\ & & & & & & (*) & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & (*) \end{vmatrix} \end{array}, \tag{1.15}$$

其中 $l_i = \#(\Lambda^{(i)})\ (i = 1, \cdots, k)$. 因此,

$$b_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)} \neq 0 \Longleftrightarrow l_1 = \left[\frac{n+k-1}{k}\right],\ \cdots,\ l_k = \left[\frac{n}{k}\right]. \tag{1.16}$$

记

$$\Lambda^{(1)} = \{\lambda_{i_{11}}, \cdots, \lambda_{i_{1l_1}}\}, \cdots, \Lambda^{(k)} = \{\lambda_{i_{k1}}, \cdots \lambda_{i_{kl_k}}\},$$

则(1.15)式中每一 $\Lambda^{(s)}(1 \leqslant s \leqslant k)$ 所对应的子式的值,例如 $\Lambda^{(1)}$ 的值为(由引理(3.5))

$$\begin{vmatrix} b_{\lambda_{i_{11}} - i_{11} + 1}, & b_{\lambda_{i_{11}} - i_{11} + 1 + k}, \cdots \\ b_{\lambda_{i_{12}} - i_{12} + 1}, & b_{\lambda_{i_{12}} - i_{12} + 1 + k}, \cdots \\ \cdots & \cdots \qquad \cdots \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\left(\dfrac{\lambda_{i_{11}} - i_{11} + 1}{k}\right)!}, & \dfrac{1}{\left(\dfrac{\lambda_{i_{11}} - i_{11} + 1}{k} + 1\right)!} \cdots \\ \dfrac{1}{\left(\dfrac{\lambda_{i_{12}} - i_{12} + 1}{k}\right)!}, & \dfrac{1}{\left(\dfrac{\lambda_{i_{12}} - i_{12} + 1}{k} + 1\right)!} \cdots \\ \cdots & \cdots \qquad \cdots \end{vmatrix}$$

$$= N\left(\frac{\lambda_{i_{11}} - i_{11} + 1}{k}, \frac{\lambda_{i_{12}} - i_{12} + k + 1}{k}, \cdots, \frac{\lambda_{i_{1l_1}} - i_{1l_1} + (l_1 - 1)k + 1}{k}\right),$$

同理，$\Lambda^{(s)}$ 在(1.15)式中所对应的子式的值为

$$N\left(\frac{\lambda_{i_{s1}}-i_{s1}+s}{k},\ \frac{\lambda_{i_{s2}}-i_{s2}+s+k}{k},\cdots,\ \frac{\lambda_{i_{sl_s}}-i_{sl_s}+(l_s-1)k+s}{k}\right),$$

因此

$$b_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)}=(\pm 1)\prod_{s=1}^{k}N\left(\frac{\lambda_{i_{s1}}-i_{s1}+s}{k},\cdots,\ \frac{\lambda_{i_{sl_s}}-i_{sl_s}+(l_s-1)k+s}{k}\right),\tag{1.17}$$

剩下的问题是决定符号．经过初等的运算，不难验知：如 $n=kp+q$，$0<q\leqslant k$，则 $b_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)}\neq 0$ 必须

$$l_i=\#(\Lambda^{(i)})=\left[\frac{n+k-i}{k}\right]$$

$$=\begin{cases}p+1, & 1\leqslant i\leqslant q,\\ p, & q<i\leqslant k,\end{cases}\tag{1.18}$$

此时，

$$\Lambda^{(j)}=\{\lambda_{i_{j1}},\cdots,\lambda_{i_{jp+1}}\},\ 1\leqslant j\leqslant q,$$
$$\Lambda^{(j)}=\{\lambda_{i_{j1}},\cdots,\lambda_{i_{jp}}\},\ q<j\leqslant k,$$

而(1.17)式中相应的符号为

$$\delta(i_{11},\cdots,i_{k1},i_{12},\cdots,i_{k2},\cdots,i_{1p}\cdots,i_{kp},i_{1p+1},\cdots,i_{qp+1}),\tag{1.19}$$

这里 $\delta(\cdots,i_{kl},\cdots)$ 是 $(\cdots,i_{kl},\cdots)$ 作为 $(1,2,\cdots n)$ 的一个排列的奇偶号．

将(1.13)，(1.17)，(1.18)和(1.19)式结合起来，就是下面的定理，它给出了 (∇) 的完整解答．

定理 1.2. 有展开式

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^k\right)^m=m!\sum_{\substack{\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n\geqslant 0\\ \sum\lambda_i=mk}}b_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)}S_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)}(x_1,\cdots,x_n),$$

记 $n=kp+q$，$0<q\leqslant k$．按 $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ 的每一元素 λ_i 作分类 $\Lambda^{(s)}(s=1,\cdots,k)$．记 $l_s=\#(\Lambda^{(s)})$．则

当 $l_1=\cdots=l_q=p+1$，$l_{q+1}=\cdots=l_k=p$ 时，

$$b_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)}=\delta(i_{11},\cdots,i_{qp+1})\prod_{s=1}^{q}N\left(\frac{\lambda_{i_{s1}}-i_{s1}+s}{k},\cdots,\ \frac{\lambda_{i_{sp+1}}-i_{sp+1}+pk+s}{k}\right)$$

$$\cdot\prod_{s=q+1}^{k}N\left(\frac{\lambda_{i_{s1}}-i_{s1}+s}{k},\cdots\frac{\lambda_{i_{sp}}-i_{sp}+(p-1)k+s}{k}\right),\tag{1.20}$$

而其它情况下，$b_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)}=0$．

二、计数几何的一些问题

Schubert 计算是由计数几何问题发展起来的．古典的计数几何及其近代形式可见于文献[4]．与线性子空间有关的一个典型的计数几何问题是这样（见文献[5]）：在 $\mathbf{P}^n$ 中和 $h=(d+1)(n-d)$ 个处于一般位置（general position）的 $\mathbf{P}^{n-d-1}$ 相交的 $\mathbf{P}^d$ 有多少？

$\mathbf{P}^n$ 中全体 $\mathbf{P}^d$ 的集合也就是 $\mathbf{C}^{n+1}$ 中全体 $d+1$ 维子空间所成集合，即 Grasomann 流

形 $G(n+1,\ d+1)$。取定一 flag，$V=\{V_1\subset V_2\subset\cdots\subset V_{n+1}=\mathbf{C}^{n+1}\mid \dim V_i=i\}$，则由 Schubert 链的定义

$$\sigma_{(\underbrace{1,0,\cdots,0}_{d+1})}(V)=\left[\mathbf{C}^{n+1}\text{ 中 }d+1\text{ 维子空间 }\Lambda\,\middle|\,\begin{matrix}\dim(\Lambda\cap V_{n-d})\geqslant 1,\\ \dim(\Lambda\cap V_{n-d+i})\geqslant i,\ \forall i\geqslant 1\end{matrix}\right]$$
$$=[\Lambda\mid\dim(\Lambda\cap V_{n-d})\geqslant 1]$$
$$=\mathbf{P}^n\text{ 中和 }\mathbf{P}(V_{n-d})=\mathbf{P}^{n-d-1}\text{ 相交的全体 }\mathbf{P}^d,$$

这是因为 $\dim\Lambda=d+1$，所以

$$\dim(\Lambda\cap V_{n-d+i})=\dim\Lambda+\dim V_{n-d+i}-\dim\{\Lambda,\ V_{n-d+i}\}$$
$$\geqslant n+i-n$$
$$=i$$

自然成立，这里 $\{\Lambda,\ V_{n-d+i}\}$ 表由 Λ 和 V_{n-d+i} 所张成的线性空间。因此，和 $h=(n-d)(d+1)$ $(=\dim\ G(n+1,\ d+1))$ 个处于一般位置的 $\mathbf{P}^{n-d-1}$ 相交的 $\mathbf{P}^d$ 的个数正好是 $\sigma^h_{(1,0,\cdots,0)}$ 和 $G(n+1,\ d+1)$ 本身(视作 Schubert 链 $\sigma_{(0,\cdots,0)}$) 的相交数，这一相交数在代数几何中的术语称为 $\deg\sigma^h_1$。

按 Schubert 算法，

$$\sigma^h_1=\sum_{\substack{n-d\geqslant\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_{d+1}\geqslant 0\\ \sum\lambda_i=h}}C_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_{d+1})}\sigma_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_{d+1})},\tag{2.1}$$

则由文献[2]的(0.1)式，$\#(\sigma_a\cdot\sigma_b)=\delta^{n-d-b_d}_{a_1}\cdots\delta^{n-d-b_1}_{a_d}$，故

$$\deg\sigma^h_1=\#(\sigma^h_1\cdot\sigma_{(0,\cdots,0)})$$
$$=C_{(n-d,\cdots,n-d)},\tag{2.2}$$

即为将 σ^h_1 按(2.1)式展开后 $\sigma_{(n-d,\cdots,n-d)}$ 的系数。

在文献[1]中，我们指出对 Schur 函数，有关系式

$$S_{(a_1,\cdots,a_n)}(x_1,\cdots,x_n)S_{(b_1,\cdots,b_n)}(x_1,\cdots,x_n)=\sum_c\delta(a,\ b;\ c)S_{(c_1,\cdots,c_n)}(x_1,\cdots,x_n),\qquad(**)$$

按照(**)式，$\deg\sigma^h_1$ 也就是 $S^h_{(1,0,0,\cdots,0)}(x_1,\cdots,x_{d+1})$ 展开后 $S_{(n-d,\cdots,n-d)}(x_1,\cdots,x_{d+1})$ 的系数。但是

$$S_{(1,\cdots,0)}(x_1,\cdots,x_{d+1})=\sum_{i=1}^{d+1}x_i,$$

因此实际上是将 $(x_1+\cdots+x_{d+1})^h$ 展开成 Schur 函数的线性和的问题。根据(1.3)式，

$$\deg\sigma^h_1=h!N(n-d,\cdots,n-d,)$$
$$=\frac{h!1!2!\cdots d!}{(n-d)!(n-d+1)!\cdots n!},\tag{2.3}$$

式中 $h=(n-d)(d+1)$。根据同一事实，σ^h_1 中 $\sigma_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_{d+1})}$ 的个数(它也可以解释为满足一定 Schubert 相交条件的 d-空间的个数)为

$$(\sum\lambda_i)!N(\lambda_1,\cdots,\lambda_{d+1})=\frac{(\sum\lambda_i)!\prod\limits_{i<j}(\tilde\lambda_i-\tilde\lambda_j)}{\tilde\lambda_1!\cdots\tilde\lambda_{d+1}!}.\tag{2.4}$$

式中 $\tilde{\lambda}_1 = \lambda_1 + d, \cdots, \tilde{\lambda}_{d+1} = \lambda_d$. (2.3) 式和 (2.4)式都是经典的结果，其传统的证明方法是应用 Pieri 公式并利用归纳法(见文献[5], p. 364—p. 366;亦可见文献[6]).

大多数计数几何的问题都涉及类似上述的计算. 但据作者所知，文献上尚未见到例如 $\deg \sigma_k^m$, $\deg \sigma_{k_1} \cdots \sigma_{k_j}$ 等的一般计算方法. 显而易见，这绝不是一个简单的问题. 本节将利用第一节的展开式给出部分的解答.

设 $2l = dm$，我们欲在 $G(m+d, d)$ 中计算 $\deg \sigma_2^l$. 根据上面的说明，如

$$\sigma_2^l = \sum_{\substack{\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_d \geq 0 \\ \sum \lambda_i = 2l}} C_{(\lambda_1, \cdots, \lambda_d)} \sigma_{(\lambda_1, \cdots, \lambda_d)}, \tag{2.5}$$

则

$$\deg \sigma_2^l = C_{(m, \cdots, m)}. \tag{2.6}$$

定理 2.1. 设 $2l = md$，则在 $G(d+m, d)$ 中

$$\deg \sigma_2^l = \frac{1}{2^l} \sum_{k=0}^{l} C_l^k (2k)!(2l-2k)! \left(\sum_{\substack{m > \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_d \geq 0 \\ \sum \lambda_i = 2k}} a_\lambda \cdot b_\lambda \right), \tag{2.7}$$

其中 $a_\lambda = N(m-\lambda_d, \cdots, m-\lambda_1)$，由(1.2)式定义; $b_\lambda = b_{(\lambda_1, \cdots, \lambda_d)}$ 由(1.12)式所示.

证. 由 (**) 式，$\deg \sigma_2^l$ 就是将 $S^l_{(2,0,\cdots,0)}(x_1, \cdots, x_d)$ 展开成 Schur 函数的线性和时，$S_{(m,\cdots,m)}(x_1, \cdots, x_d)$ 的系数.

因为

$$\begin{aligned} S_{(2,0,\cdots,0)}(x_1, \cdots, x_d) &= \sum_{i=1}^{d} x_i^2 + \sum_{i<j} x_i x_j \\ &= \sum x_i^2 + S_{(1,1,0,\cdots,0)}(x_1, \cdots, x_d), \end{aligned}$$

以及

$$S^2_{(1,0,\cdots,0)}(x_1, \cdots, x_d) = S_{(2,0,\cdots,0)}(x_1, \cdots, x_d) + S_{(1,1,0,\cdots,0)}(x_1, \cdots, x_d),$$

所以

$$2S_{(2,0,\cdots,0)} = S^2_{(1,0,\cdots,0)} + \sum x_i^2,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-2S_2} &= (1-S_1^2)^{-1} \left(1 - \frac{\sum x_i^2}{1-S_1^2}\right)^{-1} \\ &= \sum_{k=0} \frac{(\sum x_i^2)^k}{(1-S_1^2)^{k+1}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (\sum x_i^2)^k \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+k}^n S_1^{2n} \right) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{l} C_l^k (\sum x_i^2)^k S_1^{2l-2k}, \end{aligned}$$

因此，

$$S_2^l = \frac{1}{2^l} \sum_{k=0}^{l} C_l^k (\sum x_i^2)^k S_1^{2(l-k)}. \tag{2.8}$$

由(1.3)和(1.12)式，

$$S^{2(l-k)}_{(1,0,\cdots,0)}(x_1,\cdots,x_d)=(2(l-k))!\sum_{\Sigma\lambda_i=2l-2k}a_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_d)}S_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_d)}(x_1,\cdots,x_d),$$

$$\left(\sum_{i=1}^{d}x_i^2\right)^k=(2k)!\sum_{\Sigma\mu_i=2k}b_{(\mu_1,\cdots,\mu_d)}S_{(\mu_1,\cdots,\mu_d)}(x_1,\cdots,x_d),$$

$$S_1^{2(l-k)}\cdot\left(\sum_{i=1}^{d}x_i^2\right)^k=\sum_{\substack{\Sigma\lambda=2(l-k)\\ \Sigma\mu=2k}}a_\lambda b_\mu S_\lambda S_\mu,$$

再将 $S_\lambda(x_1,\cdots,x_d)\cdot S_\mu(x_1,\cdots,x_d)$ 展开,展开后 $S_{(m,\cdots,m)}(x_1,\cdots,x_d)$ 的系数等于

$$\delta(\lambda,\mu;(m,\cdots,m))=\#(\sigma_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_d)}\cdot\sigma_{(\mu_1,\cdots,\mu_d)})$$
$$=\begin{cases}1, & \text{如 } \mu=\tilde{\lambda}=(m-\lambda_d,\cdots,m-\lambda_1),\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

由此即得, $S_1^{2(l-k)}\cdot\left(\sum_{i=1}^{d}x_i^2\right)^k$ 中 $S_{(m,\cdots,m)}(x_1,\cdots,x_d)$ 的系数为

$$\left(\sum_{\substack{m\geqslant\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_d\geqslant0\\ \Sigma\lambda_i=2k}}b_\lambda a_{\tilde{\lambda}}\right)\cdot(2k)!(2l-2k)!$$

代入到(2.8)式中去,就证明了定理.

定理 2.2. 设 $l\geqslant n$, $l\geqslant k_1\geqslant k_2\geqslant\cdots\geqslant k_l\geqslant0$, $\sum_{i=1}^{l}k_i=nl$,则在 $G(l+n,n)$ 中

$$\deg(\sigma_{k_1}\cdots\sigma_{k_l})=S_{(\underbrace{1,\cdots,1}_{n},0,\cdots,0)}(x_1,\cdots,x_l)\text{ 按单项式展开中 }x_1^{k_1}\cdots x_l^{k_l}\text{ 的系数}. \tag{2.9}$$

证. 由恒等式(见文献[3]),

$$\prod_{i,j=1}^{l}(1+x_iy_j)=\sum_{l\geqslant\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_l\geqslant0}S_\lambda(x)S_{\lambda^*}(y), \tag{2.10}$$

其中 λ^* 表示 λ 的对偶下标. 但另一方面,

$$\prod_{i=1}^{l}(1+x_it)=\sum_{k=0}^{l}e_k(x)t^k,$$

其中 $e_k(x)=S_{(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{k},0,\cdots,0)}(x_1,\cdots,x_l)$. 因此,

$$\prod_{i,j=1}^{l}(1+x_it_j)=\left(\sum_{k_1=0}^{l}e_{k_1}(x)t_1^{k_1}\right)\cdots\left(\sum_{k_l=0}^{l}e_{k_l}(x)t_l^{k_l}\right)$$
$$=\sum_{k_1,\cdots,k_l=0}^{l}e_{k_1}(x)\cdots e_{k_l}(x)t_1^{k_1}\cdots t_l^{k_l}. \tag{2.11}$$

记 $a(\lambda;k_1,\cdots,k_l)$ 为 $S_\lambda(t_1,\cdots,t_l)$ 展开时单项式 $t_1^{k_1},\cdots,t_l^{k_l}$ 的系数,由(2.10)及(2.11)式

$$\sum_{k_1,\cdots,k_l=0}^{l}e_{k_1}(x)\cdots e_{k_l}(x)t_1^{k_1}\cdots t_l^{k_l}=\sum_{l\geqslant\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_l\geqslant0}S_\lambda(t)S_{\lambda^*}(x),$$

比较 $t_1^{k_1},\cdots,t_l^{k_l}$ 的系数,得

$$e_{k_1}(x),\cdots,e_{k_l}(x)=\sum_{l\geqslant\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_l\geqslant0}a(\lambda;k_1,\cdots,k_l)S_{\lambda^*}(x). \tag{2.12}$$

在文献[1]中我们曾指出对合算子 T 满足的关系式

$$Te_i = h_i,\ T^2 = I \tag{***}$$

及

$$TS_\lambda = S_{\lambda^*}, \tag{****}$$

现在我们对(2.12)式的两端取对合 T。利用上面的关系式(***),(****),我们有

$$h_{k_1}(x),\cdots,h_{k_l}(x) = \sum_{l\geq\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_l\geq 0} a(\lambda;\ k_1,\cdots,k_l)S_\lambda(x), \tag{2.13}$$

其中 $h_{k_j}(x) = S_{(k_j;0,\cdots,0)}(x_1,\cdots,x_l)$。由 Schubert 计算和 Schur 函数运算的相似性(见文献[1])

$$\sigma_a\cdot\sigma_b = \sum_c \delta(a,\ b;\ c)\sigma_c$$

以及(**)式,(2.13)式亦就是

$$\sigma_{k_1},\cdots,\sigma_{k_l} = \sum_{l\geq\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_l\geq 0} a(\lambda;\ k_1,\cdots,k_l)\sigma_\lambda.$$

因此

$$\deg(\sigma_{k_1},\cdots,\sigma_{k_l}) = a((\underbrace{l_1,\cdots,l}_{n},\ 0,\cdots,\ 0);\ k_1,\cdots,\ k_l). \tag{2.14}$$

定理证完。

系：在 $G(l+n,\ n)$ 中，

$$\deg\sigma_n^l = S_{(\underbrace{l,\cdots,l}_{n},0,\cdots,0)}\ \text{展开式中}\ (x_1,\cdots,x_l)^n\ \text{的系数。} \tag{2.15}$$

现在我们给出定理 2.1 中当 $d=2$, $m=l$ 时的特例,再经过定理 2.2, 它正对应着组合分析中一个问题的解答。

定理 2.3. 在 $G(2+l,\ 2)$ 中令 $p_l = \deg\sigma_l^l$, 记形式幂级数 $F(t) = \sum_{l=0}^{\infty} p_l t^l\ (p_0 = 1)$, 则

$$F(t) = \varphi\left(\frac{t}{1+t}\right), \tag{2.16}$$

$$\varphi(s) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{3C_k^{k-1}}{k+2}s^{k+1},$$

$F(t)$ 的头几项是

$$F(t) = 1 + t^2 + t^3 + 3t^4 + 6t^5 + 16t^6 + 36t^7 + \cdots, \tag{2.17}$$

证。根据定理 2.1, p_l 等于将 $S^l_{(2,0)}(x,\ y)$ 展开成 Schur 函数线性和时 $S_{(l,l)}(x,\ y) = (xy)^l$ 的系数。由 $S_{(2,0)}(x,\ y) = x^2 + y^2 + xy$,易得

$$1 - S_2(x,\ y) = (1+xy)\left(1 - \frac{(x+y)^2}{1+xy}\right),$$

因而

$$\sum_{k=0}^{\infty} S_2^k(x,\ y) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(x+y)^{2j}}{(1+xy)^{j+1}},$$

但由(1.3)式

$$(x+y)^{2j}=\sum_{\substack{f_1\geq f_2\geq 0\\ f_1+f_2=2j}}\frac{(2j)!}{(f_1+1)!(f_2)!}D(f_1+1,f_2)S_{(f_1,f_2)}(x,y)$$

以及

$$\frac{1}{(1+xy)^{j+1}}=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m C_{j+m}^m(xy)^m$$

得到

$$S_j^k(x,y)=\sum_{\substack{j+m=k\\ f_1+f_2=2j}}(-1)^m C_{j+m}^m\frac{(2j)!}{(f_1+1)!f_2!}D(f_1+1,f_2)S_{(f_1+m,f_2+m)}(x,y),$$

上式中 $S_{(k,k)}(x,y)$ 项相当于 $f_1=f_2=j$,因此,

$$\begin{aligned}p_k&=\sum_{j+m=k}(-1)^m C_k^m\frac{(2j)!}{(j+1)!j!}\\&=\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}C_k^jC_{2j}^j\cdot\frac{1}{j+1},\end{aligned}$$

因此(令 $p_0=1$)

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}p_nt^n&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k\frac{C_{2k}^k}{k+1}\right)t^n\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n\geq k}(-1)^{n-k}C_n^kt^n\right)\frac{C_{2k}^k}{k+1}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_{2k}^k}{k+1}\frac{t^k}{(1+t)^{k+1}},\\&=\left(1-\frac{t}{1+t}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_{2k}^k}{k+1}\left(\frac{t}{1+t}\right)^k\\&=1+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{C_{2k+2}^{k+1}}{k+2}-\frac{C_{2k}^k}{k+1}\right)\left(\frac{t}{1+t}\right)^{k+1}\\&=1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3C_{2k}^{k-1}}{k+2}\left(\frac{t}{1+t}\right)^{k+1}\\&=\varphi\left(\frac{t}{1+t}\right).\end{aligned}$$

这一定理在组合数学的平面配置 (plane partion) 计数问题中有自己的意义. 所谓一个 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_d)$, $\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_d>0$ 型的平面配置,是指下述形式的一个排列 (n_{ij} 为正整数):

$$\begin{matrix}n_{11},\ n_{12},\cdots,\ n_{1\lambda_1}\\ n_{21},\ n_{22},\cdots n_{2\lambda_2}\\ \vdots\\ n_{d1},\cdots,\ n_{d\lambda_d}\end{matrix}$$

满足每行、每列都是非降的: $n_{ij}\geq n_{i\,j+1}$, $n_{ij}\geq n_{i+1\,j}$. 如果 $n_{ij}>n_{i+1\,j}$, $\forall i$, 则称为严格列降

的 (Column-Strictly)．平面配置的主要问题是，满足一定条件的全体平面配置的总数是多少？通常所加的条件是给定型号 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_d)$ 和元素 n_{ij} 的总和 $N=\sum n_{ij}$，或给定元素的集合 S，使 $n_{ij}\in S$ 等．关于平面配置的一般理论见文献[7]．

现在我们提出如下的平面配置问题：给定型号 $\lambda=(l,l)$ 和元素集合 $S=\{1,1,2,2,\cdots,l,l\}$．有多少满足严格列降条件的平面配置？

定理 2.4. 记型号 $\lambda=(l,l)$，元素集 $S=\{1,1,2,2,\cdots,l,l\}$ 的严格列降的平面配置的总数为 p_l，则 p_l 就是定理 2.3 中的 p_l．

证．这里我们要引用关于 Schur 函数的组合定义(见文献[7])．按 Schur 函数的组合定义，如果 π 是 $(\lambda_1,\cdots,\lambda_r)$ 型，以 $\{1,2,\cdots,l\}$ 为元素集，严格列降的平面配置，π 中等于 i 的元素个数记作 a_i，定义相应的单项式及其次数：

$$M(\pi)=x_1^{a_1},\cdots,x_l^{a_l},$$

$$d(\pi)=\text{degree}\,M(\pi)=a_1+a_2+\cdots+a_l,$$

则 Schur 函数 $S_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_r)}(x_1,\cdots,x_l)$ 可定义为(见文献[7])

$$S_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_r)}(x_1,\cdots,x_l)=\sum_{\substack{\pi\text{是}(\lambda_1,\cdots,\lambda_r)\text{型}\\ d(\pi)=\sum\lambda_i}}M(\pi),\tag{2.18}$$

由此易见

$$\begin{aligned}p_l&=\#\left\{M(\pi)\ \middle|\ \begin{array}{l}\pi\text{ 是 }(l,l)\text{ 型},\\ \pi\text{ 中 }a_i=2,\forall i=1,2,\cdots l,\end{array}\right\}\\ &=S_{(l,l,0,\cdots,0)}(x_1,\cdots,x_l)\text{ 中 }(x_1,\cdots,x_l)^2\text{ 的系数}\\ &=\deg\sigma_2^l\,(\text{在 }G(l+2,2)\text{ 中})\quad(\text{由(2.15)式})\\ &=\text{定理 2.3 中的 }p_l.\end{aligned}$$

当 l 较小时，它的值是 $p_1=0$，$p_2=p_3=1$，$p_4=3$，$p_5=6$，$p_6=16$，$p_7=36$ 等(见(2.17)式)．

参　考　文　献

[1] 钟家庆，中国科学A辑，1989，8：819—827．

[2] Zhong, J. Q., *Procedings of the 1980 Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equations*, Vol. III, 1697—1708.

[3] 华罗庚，多复变函数论中典型域的调和分析，科学出版社，1965，北京．

[4] Griffiths, P. & Harris, J., *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley and Sons, Inc., 1978.

[5] Hodge. W. V. D. & Pedoe, D., *Methods of Algebraic Geometry*, Vol. II, Cambridge, Univ. Press, 1952.

[6] Kleiman, S., *Problem 15, Rigorous Foundation of Schubert Enumerative Calculus*, Proc. Sympos. in pure Math., XXVII, AMS, 1976.

[7] Stanley, R., *Studies in Applied Maths.*, 1(1971), 2: 167—188.