

半波长余弦形超声聚能器

陆庆扬

(中国科学院东海研究站 上海 209032)

1997 年 9 月 2 日收到

摘要 本文导出了半波长余弦形聚能器的频率方程以及参数的计算式和曲线。根据理论公式设计制作了这种聚能器。通过对谐振频率及放大系数的测量发现实测值与理论值吻合。

关键词 超声聚能器, 纵振动, 半波长余弦形

A longitudinal ultrasonic horn of the half-wavelength cosine type

Lu Qingyang

(Shanghai Acoustics Laboratory, The Chinese Academy of Sciences, Shanghai 200032)

Abstract A longitudinal ultrasonic horn of half-wavelength longitudinal cosine type is studied. The frequency equation and formulae for calculating the performance parameters are given. Based on the theoretical formulae, the cumulator are designed and manufactured. The resonant frequency and amplification factor are measured. The experimental results agreed with the theoretical values.

Key words Ultrasonic horn, Longitudinal, Half-wavelength cosine type

1 引言

阶梯形、圆锥形、指数形、悬链线形、高斯形、傅立叶形超声聚能器已为人们所熟知^[1]。除了高斯形、傅立叶形聚能器外, 其余四种聚能器都是以其外形母线函数命名的。余弦形聚能器也以母线函数为外形。笔者推导出其理论公式, 并对这种聚能器进行了实验研究。

式为:

$$R(x) = R_1 \cos \alpha x \quad (1)$$

截面积的表达式为:

$$S(x) = \pi R_1^2 \cos^2 \alpha x \quad (2)$$

式中: $\alpha = \frac{1}{l} \cos^{-1} \left(\frac{R_2}{R_1} \right)$, R_1, R_2, l 分别为余弦形聚能器大小端面半径以及聚能器的长度。余弦形聚能器象其他变截面聚能器一样, 应满足弹性振动方程:

2 理论推导

2.1 弹性振动方程的通解

如图 1 所示。聚能器任意位置半径的表达式为:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{S(x)} \frac{\partial S(x)}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + k^2 v = 0 \quad (3)$$

式中 v 为振速, k 为波数。将 $S(x)$ 及 $\frac{\partial S(x)}{\partial x}$ 代入 (3) 得

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2\alpha \tan \alpha x \frac{\partial v}{\partial x} + k^2 v = 0 \quad (4)$$

令 $v(x) = \frac{u(x)}{\cos \alpha x}$ 代入 (3) 得:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (k^2 + \alpha^2)u = 0 \quad (5)$$

令 $k' = \sqrt{k^2 + \alpha^2}$ 可得;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k'^2 u = 0 \quad (6)$$

其通解为 $u(x) = A \cos k'x + B \sin k'x$

$$v(x) = \frac{1}{\cos \alpha x} [A \cos k'x + B \sin k'x] \quad (7)$$

因此, 聚能器在 x 点的弹性力为:

$$F(x) = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (8)$$

式中 Y 为杨氏模量, 将 (7) 代入 (8) 得:

$$F(x) = -\frac{j\rho c S(x)}{k} \left\{ \frac{k'}{\cos \alpha x} [-A \sin k'x + B \cos k'x] + \alpha \frac{\sin \alpha x}{\cos^2 \alpha} \cdot [A \cos k'x + B \sin k'x] \right\} \quad (9)$$

式中 ρc 为聚能器材料的声阻抗率。

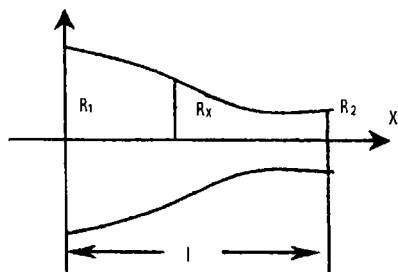


图1 余弦形聚能器

2.2 振速分布、应力分布和频率方程

根据半波长超声聚能器的边界条件

$$v(0) = v_f \quad (10a)$$

$$v(l) = v_e \quad (10b)$$

$$F(0) = 0 \quad (10c)$$

$$F(l) = -v_e z_e \quad (10d)$$

可求得 $A = v_f, B = 0$ 于是振速分布为:

$$v(x) = \frac{v_f}{\cos \alpha x} \cos k'x \quad (11)$$

弹性力分布为:

$$F(x) = -\frac{j\rho c v_f}{k} \left[\frac{-k'}{\cos \alpha x} \sin k'x + \alpha \frac{\sin \alpha x}{\cos^2 \alpha} \cos k'x \right] \quad (12)$$

应力分布为:

$$T(x) = -j\rho c v_f \left[\frac{-k'}{\cos \alpha x} \sin k'x + \alpha \frac{\sin \alpha x}{\cos^2 \alpha} \cos k'x \right] \quad (13)$$

由 (10d) 得

$$-v_e z_e = -j\rho c \frac{S(l)}{k} \left[\frac{-k'}{\cos \alpha l} \sin k'l + \alpha \frac{\sin \alpha l}{\cos^2 \alpha l} \cos k'l \right]$$

因为 $S(l) = S_1 \cos^2 \alpha l, S_1 = \pi R_1^2$ 所以

$$-v_e z_e = -\rho c \frac{S(l)}{k} [-k' \cos \alpha l \cdot \sin k'l + \alpha \sin \alpha l \cdot \cos k'l] \quad (14)$$

(14) 式为频率方程的一般表达式。式中 z_e 为聚能器输出端阻抗。当 $z_e = 0$ 时便可以求出无负载条件下的频率方程为:

$$k' \lg k'l = \alpha \lg \alpha l \quad (15)$$

式中 $k' = \sqrt{k^2 + \alpha^2} \quad \alpha = \frac{1}{l} \cos^{-1}(\frac{R_2}{R_1})$ 。

由式 (15) 式可以得到余弦形聚能器在谐振时的 kl 与 R_1/R_2 的关系, 只要知道聚能器大端面和小端面的半径比 R_1/R_2 , 就可以求得谐振条件下的 kl 值, 由 kl 求得谐振长度 l_x , 经过计算机得到振速分布和应力分布曲线分别如图 2、图 3 所示。

2.3 振幅放大系数

由 (11) 和 (10a)(10b) 可得

$$\frac{v_e}{v_f} = \frac{\cos k'l}{\cos \alpha l}$$

式中

$$\cos \alpha l = \frac{R_1}{R_2}$$
$$\cos k'l = \cos \sqrt{k^2 l^2 + \left[\cos^{-1} \left(\frac{R_2}{R_1} \right) \right]^2}$$

于是

$$\frac{v_e}{v_f} = \frac{R_1}{R_2} \cos \sqrt{k^2 l^2 + \left[\cos^{-1} \left(\frac{R_2}{R_1} \right) \right]^2} \tag{16}$$

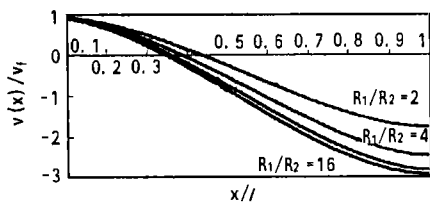


图 2 振速分布曲线

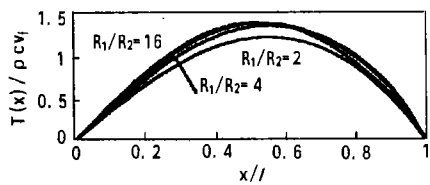


图 3 应力分布曲线

由 (16) 式可知，余弦形聚能器的放大系数与两端面的半径之比的一次方成正比，并且总是小于 R_1/R_2 。它们的关系曲线如图 5 所示，由图可见， v_e/v_f 随 R_1/R_2 增大而增大。当 R_1/R_2 达到 10 以上时， v_e/v_f 增大速度变慢，逐步趋于平稳，极限值约为 3。而锥型聚能器极限值约为 4.5^[2]。由此可见余弦形聚能器比锥形聚能器振幅放大系数更小。

2.4 节面位置

由 (11) 式令 $v(x)=0$ 可得：

$$x_0 = \frac{\pi l}{2 \sqrt{k^2 l^2 + \left[\cos^{-1} \frac{R_2}{R_1} \right]^2}} \tag{17}$$

由 (17) 式可得节面位置与 R_1/R_2 的关系曲线，如图 6 所示。节面位置 x_0 是从大端面算起的。

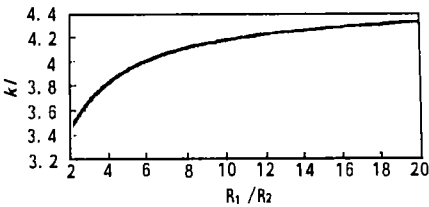


图 4 kl 与 R_1/R_2 的关系曲线

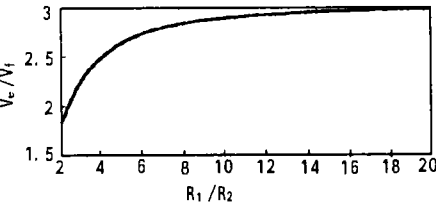


图 5 振幅放大系数与 R_1/R_2 关系曲线

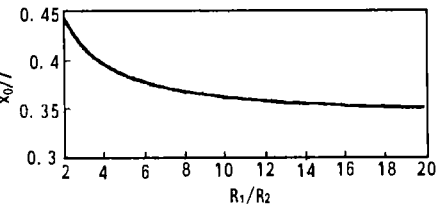


图 6 节面位置与 R_1/R_2 的关系曲线

3 实验及结果

如图 7 所示，采用小信号正弦波激励由 45# 钢制成的余弦形聚能器，测量它的谐振频率 f_0 及振幅放大系数 v_e/v_f ，以验证理论推导结果。

余弦形聚能器用减振橡皮及泡沫塑料与测量台隔振。自制的压电式微型激励器通过导声胶在聚能器的大端面中心位置对其进行激励。同时在聚能器的中心位置附近安装一个自制的拾振器，也通过导声胶耦合到大端面。在小端面中心线位置也安装一个同种拾振器。用这两个拾振器测量聚能器的放大倍数。测量前先将两路拾振器测量系统校正，使它们的灵敏度

相等。

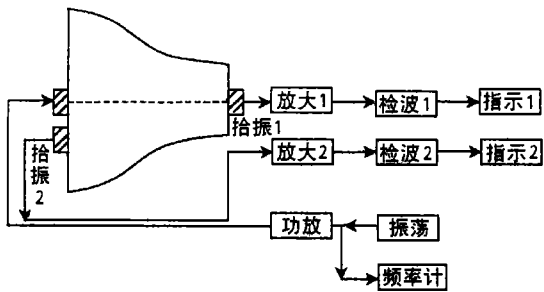


图 7 谐振参数的测量

测量时，调节振荡频率，使指示器 1 的读数最大。这时频率计的读数即为聚能器的谐振频率。指示器 1 与指示器 2 的的读数比即为聚能器的振幅放大系数。

表 1 与表 2 为单一余弦型聚能器的试样尺寸和实验结果。测量结果与理论计算值相当吻合。

合。

表 1 被测试样尺寸

序号	$R_1(\text{mm})$	$R_2(\text{mm})$	N	$L(\text{mm})$
1	21	10.5	2.0	142.3
2	21	7.0	3.0	151.4
3	21	5.25	4.0	157.5
4	21	5.0	5.0	161.8

笔者还对余弦型聚能器作为过渡段与其它类型聚能器组成的复合聚能器进行了实验研究。理论计算值与实测值也非常接近。实验证明，这对某些需要由几级聚能器组合成复合聚能器的情况是非常适用的。因为在复合聚能器的激励端采用振幅放大系数小而半径比又大的余弦形聚能器有利于振速及应力的平稳过渡。这类复合聚能器特别适用于超声焊接硬塑料等场合。

表 2 测量结果

序号	谐振频率 (Hz)			放大系数		
	理论值 f_t	实测值 f_e	误差 (%)	理论值 v_e/v_f	实测值 v_e/v_f	误差 (%)
1	19500	19420	-0.4	1.79	1.75	-2.2
2	19500	19450	-0.3	2.23	2.16	-3.1
3	19500	19383	-0.6	2.48	2.40	-3.2
4	19500	19360	-0.7	2.63	2.58	-1.9

4 结论

余弦形聚能器振幅放大系数是随 R_1/R_2 增大而增大的。当 R_1/R_2 达到 10 以上时，其增大速度变得缓慢并趋于平稳，极限值仅为 3 左右。因此作为单一聚能器使用是不合适的，但由于其直径变化范围大，作为过渡段与其它

类型聚能器组成复合聚能器是有用的。

参 考 文 献

1 林仲茂. 超声变幅杆的原理和设计. 北京: 科学出版社, 1987.
2 陈桂生. 超声换能器设计. 北京: 海洋出版社, 1984, 158-159.