

# 复杂截面同轴传输线特性阻抗 计算的一种新方法

潘 生 根

(上海科学技术大学波科学研究室)

## 摘 要

本文提出一种求解复杂截面同轴传输线的特性阻抗准确值的上、下限的方法,同时建立了计算复杂截面同轴传输线特性阻抗值的新的处理方法。由于方法计及了复杂边界的几何形状和间距  $l$  变化的影响,所以算出的特性阻抗值具有很高的精确度。文中还研究了复杂边界的等效圆半径  $r_e$  随间距  $l$  变化的一般规律,从理论上解决了随着  $l$  的减小,复杂截面同轴传输线的特性阻抗的数值差别逐渐增大的问题。

## 一、引 言

近四十年来,对复杂截面同轴传输线的特性阻抗的计算进行了大量工作<sup>[1]</sup>。准确的保角变换法,虽然能在有限范围内解决一些特种截面边界问题,但对一般的复杂截面边界问题却受到限制<sup>[2,3]</sup>。变分法可求出特性阻抗准确值的上、下限<sup>[4]</sup>,但是要求出相应边界问题的 Green 函数。近似的数值算法,由于导体角处的电位梯度是奇异的, Taylor 定理不成立,数值计算公式不能严格应用于导体角<sup>[5]</sup>。

另一方面,林为干等<sup>[6-11]</sup>提出用函数变换和图形逼近求出复杂截面同轴传输线特性阻抗的准确值的上限和下限,由算术平均或几何平均估计出特性阻抗的近似值,且求解了多种具有实用价值的复杂截面同轴传输线的特性阻抗,其中许多结果是迄今已有同类结果中最准确的。但随着内切(或内接)和外切(或外接)逼近图形半径的差值增大或者内、外导体间距  $l$  (最小值)的减小,算出的特性阻抗的上限和下限的相对差值增大,给精确估计复杂截面同轴传输线的特性阻抗带来困难。

本文提出一种求解复杂截面同轴传输线的特性阻抗准确值的上限和下限的方法,给出了计算复杂截面同轴传输线特性阻抗值的新的处理方法,并研究了等效圆半径  $r_e$  随内、外导体间距  $l$  变化的一般规律。为了说明方法的具体应用,计算了两类典型的复杂截面传输线:矩形外导体——圆形内导体和圆形外导体——正多边形内导体同轴传输线的特性阻抗值,通过与目前文献中报道的最准确值比较和理论分析,证实了其准确性。

## 二、求解传输线特性阻抗上限和下限的一种方法

在一般情况下,可通过保角变换,将复杂截面同轴传输线的一个边界变换为规则图形,另一边界面则往往为复杂图形。为了叙述方便,考虑一边界面为圆,另一边界面为不规则图形的情况(图1)。

将图1中的复杂边界看作是由许多段(或无穷段)圆弧和径线构成的阶梯形曲线组成,忽略边缘和径线边界的电容,传输线总电容是各圆弧段边界的电容的并联,由此求得的电容值是准确值的下限值,即特性阻抗值的上限值。在数值计算

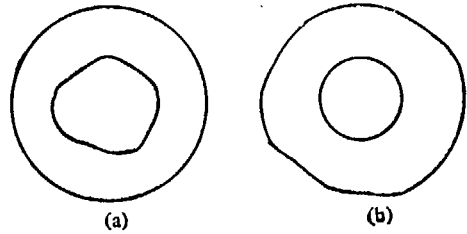


图1 问题的一般模型

时,当传输线的内导体是复杂图形(图1(a)),取内接边界的阶梯形曲线;当外导体是复杂图形(图1(b)),取外接边界的阶梯形曲线,以保证解得的特性阻抗值是理论上严格的上限值。

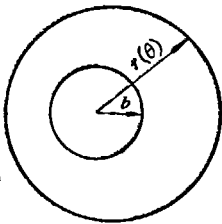


图2 偏心同轴传输线截面图

上述方法的一个特性是求出的特性阻抗上限值的归一化等效半径  $r_e$  (按复杂边界内切圆的半径归一) 与准确值的误差(即特性阻抗值的绝对误差),随着内、外导体间距  $l$  的减小而减小。这是因为随着  $l$  的减小,边缘和径线边界的影响减小,由圆弧边界计算出的电容值更趋于准确值。下面以偏心同轴传输线(图2)为例来验证上述性质。

利用计算同轴线电容的公式,偏心同轴传输线单位长度电容的下限值是

$$C_{\min} = 2\epsilon \int_0^\pi \frac{1}{\ln \left[ \frac{r(\theta)}{b} \right]} d\theta, \quad (1)$$

式中  $\epsilon$  是媒质的介电常数,  $b$  是内导体半径,  $E$  是偏心率,

$$r(\theta) = \sqrt{1 - E^2(1 - \cos^2 \theta)} + E \cos \theta, \quad (2)$$

则偏心同轴线的特性阻抗的上限值是

$$Z_{\max} = \frac{\sqrt{\epsilon \mu}}{C_{\min}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{\int_0^\pi \frac{1}{\ln \left[ \frac{r(\theta)}{b} \right]} d\theta}. \quad (3)$$

图3给出了由(3)式算出的特性阻抗上限值的归一化等效半径  $r_e$  与准确值的误差曲线。

由图3可知,特性阻抗上限值的归一化等效半径  $r_e$  与准确值的误差是随着间距  $l$  的减小而单调减小。由这一特性可得到复杂截面同轴传输线特性阻抗的下限值,即如果已知间距为  $l_1$  时用本文方法计算出的上限值与精确值的误差,只要  $l < l_1$ ,用此误差值校正计算出的上限值,就可得到特性阻抗的下限值。一般讲,当间距  $l$  足够大,通常可由保角变换得到具有很高精确度的特性阻抗值。

从传输线的电容是由各段边界的电容并联组成的观点出发来看,则有如下结论:

图1所示的复杂截面同轴传输线的归一化等效间距 $l_e$  (圆导体和等效圆的间距)是随着间距 $l$ 的减小而减小,即当外导体是复杂边界(图1(b)),其归一化等效半径 $r_e$ 是随着 $l$ 的减小而减小;当内导体是复杂边界(图1(a)),其归一化等效半径 $r_e$ 是随着 $l$ 的减小而增大。

上述特性从物理概念来看是很明显的,由场形分布可知,随着 $r/R$ 的增大,导体上间距较远处边界上的电荷与间距较远处的电荷量的比值增大,而它们的距离比值减小,所以间距较远处边界的电容值对传输线的总电容的贡献显著增大,则归一化等效间距 $l_e$ 减小。偏心同轴传输线的数值验算符合上述结论。

一般讲,如选择复杂截面同轴传输线的内、外导体之一作为参考边界,则另一导体与参考边界共形的等效边界的归一化间距 $l_e$ 是 $l$ 的单调减函数。

在文献[8, 10],复杂边界的等效半径 $r_e$ 是由共形图形逼近,取尺寸上、下限几何平均求得, $r_e$ 是一常数,不随间距 $l$ 变化。由上述结论可知,随着 $l$ 的减小,算出的归一化等效间距 $l_e$ 比准确值逐渐偏大,即给出的特性阻抗值偏大,从而解决了随着 $l$ 的减小,文献中给出的复杂截面同轴传输线特性阻抗值的差别逐渐增大的遗留问题。

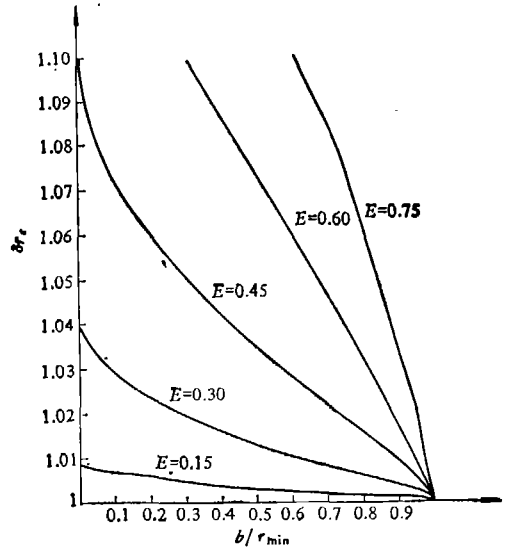


图3 偏心同轴传输线归一化等效圆半径的误差曲线

### 三、计算传输线特性阻抗的一种方法

文献[6]首先建议采用函数变换,取特性阻抗上、下限的算术平均作为复杂截面同轴传输线特性阻抗的近似值(保角变换——算术平均法),文献[1]认为采用此上、下限的几何平均会给出更好的结果(保角变换——几何平均法)。近年来,文献[8, 10]提出取复杂截面边界尺寸上、下限的几何平均作为等效边界的半径(共形逼近——几何平均法)。但由于没有考虑内、外逼近图形之间的复杂边界的几何形状及间距 $l$ 的变化对等效半径 $r_e$ 的影响,上述方法的相对误差随着上、下限的差值增大或者间距 $l$ 的减小而增大。虽然文献[10]通过修正外接圆半径考虑了角形外导体边界的电荷角效应的影响,但修正值是基于大量的经验计算,仅对特定的图形有意义,且没有考虑间距 $l$ 的变化对等效半径 $r_e$ 的影响。

本文提出一个新的处理方法(比较-修正法),即选择一个与复杂截面具有相近偏差性质的准规则图形(由保角变换可得到准确解)作为比较图形,用上节的方法算出它的上限值,由它与准确值的差值来修正复杂截面传输线的上限值,从而得到特性阻抗的近似解。并可通过比较图形的偏离程度,进一步改进理论上的上、下限值,减少方法的最大误差,得到更精确的近似解。下面以矩形外导体——圆形内导体和圆形外导体——多边形内导体同轴传输线为例,选择偏心同轴线作为比较图形,具体阐述本文方法及其应用。

## 四、矩形外导体——圆形内导体同轴传输线

具有矩形外导体——圆形内导体的传输线,是在微波工程技术中有较大用途的传输线,由于截面边界的复杂性,至今难以进行精确求解,现有最准确的结果是由保角变换——几何平均法给出<sup>[1,6]</sup>。随着内、外导体直径比  $r/R$  的增大,所求出的特性阻抗上、下限值的相对差值增大,计算精度下降。

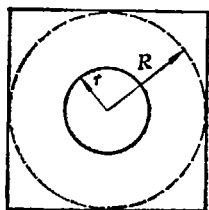


图4 方形外导体——圆形内导体同轴传输线截面图

### 1. 方形外导体——圆形内导体同轴传输线(图4)

由第二节的方法,利用计算同轴线电容的公式,得方形外导体——圆形内导体同轴传输线的特性阻抗的上限值

$$Z_{\max} = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{\int_0^{\pi/4} \left[ \frac{1}{\ln \left( \frac{R}{r \cos \theta} \right)} \right] d\theta} \quad (4)$$

选择偏心同轴线作为比较图形,为了求出相应的偏心率,由变换函数<sup>[6]</sup>

$$x + jy = \sqrt{\frac{1 - cn \left( \frac{2Kw}{b}, k \right)}{1 + cn \left( \frac{2Kw}{b}, k \right)}}$$

(其中  $cn \left( \frac{2Kw}{b}, k \right)$  是 Jacobian 椭圆函数),将矩形外导体变换为单位圆,当内、外导体直径比  $r/b \ll 1$ , 内导体经变换后仍可认为是圆。由此求得  $r/R = 0.05$  时, (4) 式计算出的等效半径  $r_e$  与准确值的相对误差是 1.03152, 由(3)式求出具有相同误差值的偏心同轴线的偏心率是 0.29286。

由几何图形分析可知,随着  $r/R$  的增大, (4) 式所忽略的径向边界的电容值要比(3)式所忽略的大,即由(4)式算出的特性阻抗的上限值的误差要比(3)式算出的大,所以经过修正后的

表1 本文方法和文献中的方形外导体——圆形内导体同轴传输线特性阻抗值的比较

| $r/R$                             | 0.05   | 0.1    | 0.2    | 0.3   | 0.4   | 0.5   | 0.6   | 0.7   | 0.8   | 0.9   | 0.93 | 0.95 | 0.97 | 0.99 | 0.998 |
|-----------------------------------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|------|------|------|-------|
| $Z_{\max}$ (本文(4)式,上限值)           | 186.00 | 144.39 | 102.74 | 78.33 | 60.96 | 47.44 | 36.31 | 26.80 | 18.37 | 10.51 | 8.12 | 6.45 | 4.64 | 2.42 | 1.00  |
| $Z_0$ (本文方法)                      | 184.14 | 142.73 | 101.37 | 77.19 | 60.02 | 46.67 | 35.70 | 26.33 | 18.04 | 10.32 | 7.98 | 6.34 | 4.57 | 2.39 | 0.998 |
| $Z_0$ (文献[1,6],保角变换——几何平均法)       | 184.14 | 142.59 | 101.03 | 76.72 | 59.48 | 46.10 | 35.16 | 25.90 | 17.81 | 10.41 | 8.19 | 6.63 | 4.91 | 2.70 |       |
| $Z_0$ (文献[11],保角变换——点匹配法)         | 184.15 | 142.59 | 101.03 | 76.72 | 59.48 | 46.10 | 35.15 | 25.85 | 17.65 |       | 7.44 |      |      |      |       |
| $Z_0$ (文献[10],共形逼近——角电容修正——几何平均法) | 184.04 | 142.49 | 100.93 | 76.62 | 59.37 | 46.00 | 35.07 | 25.82 | 17.82 | 10.76 | 8.29 | 7.52 | 6.27 | 5.04 | 2.28  |
| $Z_0$ (文献[12], Green 函数法)         |        |        |        |       |       | 46.09 | 35.15 | 25.85 | 17.68 | 10.13 |      | 6.25 |      |      | 0.995 |

特性阻抗值仍是准确值的上限值。

由(4)式算出的特性阻抗上限值和经修正后的值列于表 1。从表 1 可知,用本文方法算出的这种传输线的特性阻抗值与文献[11, 12]给出的最准确结果基本一致,方形外导体的等效圆半径  $r_e$  由  $1.07870(r/R = 0.05)$  下降到  $1.01465(r/R = 0.998)$ 。

## 2. 矩形外导体——圆形内导体同轴传输线(图 5)

利用计算同轴线电容的公式,矩形外导体——圆形内导体同轴传输线的特性阻抗的上限值

$$Z_{\max} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left/ \left\{ \int_0^{\lg^{-1}(a/b)} \left[ \frac{1}{\ln\left(\frac{b}{r \cos \theta}\right)} \right] d\theta + \int_0^{\lg^{-1}(b/a)} \left[ \frac{1}{\ln\left(\frac{a}{r \cos \theta}\right)} \right] d\theta \right\} \right. \quad (5)$$

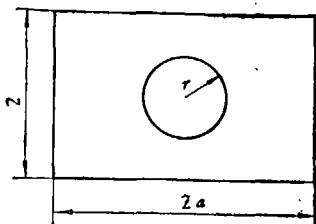


图 5 矩形外导体——圆形内导体同轴传输线截面图

当  $r/b = 0.05$  时,由保角变换的结果<sup>[1,6]</sup>得(5)式算出的等效半径  $r_e$  与准确值的相对误差,然后由(3)式求出具有相同误差值的偏心同轴线的偏心率  $E$ ,结果例于表 2。

表 2 (5)式算出的等效半径的相对误差和具有相同误差值的偏心同轴线的偏心率

| $a/b$                                | 1.25    | 1.5     | 1.75    | 2       | 2.5     | 3       |
|--------------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| (5)式算出的等效半径的相对误差<br>( $r/b = 0.05$ ) | 1.0445  | 1.07167 | 1.10215 | 1.13093 | 1.17789 | 1.21148 |
| 相应的偏心同轴线的偏心率 $E$                     | 0.34326 | 0.42462 | 0.49345 | 0.5454  | 0.61268 | 0.65153 |

由几何图形分析可知,随着  $r/b$  的增大,经修正后的特性阻抗值仍是准确值的上限值。为了得到更精确的特性阻抗值,下面求解矩形外导体——圆形内导体同轴传输线特性阻抗的下限值。

对正方形外导体——圆形内导体同轴传输线,利用文献[12]的结果可得到(4)式求出的等效半径的绝对误差  $\delta r_e$ 。定义修正偏差系数为

$$c = \frac{\delta r_e}{\delta r_d} = \frac{r_e - 1}{r_d - 1} \quad (6)$$

式中  $\delta r_d$  是由(3)式求出的偏心同轴线 ( $E = 0.29286$ ) 的等效半径  $r_d$  的绝对误差。

从几何图形分析可知,随着  $a/b$  的增大,表 2 中偏心同轴线外导体与内切圆的偏差比矩形外导体与内切圆的偏差进一步增大,因而随着内、外导体直径比的增加,矩形外导体等效圆的修正偏差系数应比方形外导体的情况要小。如果先由(3)式求出表 2 中偏心同轴线的等效半径的绝对误差  $\delta r_d$ , 然后用  $\delta r_d * c + 1$  来修正由(5)式求出的矩形外导体等效圆的半径,由此得到特性阻抗的下限值。表 3 列出了计算结果,其中将上、下限值的算术平均作为该种传输线的特性阻抗值。

从表 3 可知,当  $r/b < 0.5$  时,本文方法算出的结果与文献[1]给出的结果相符,当  $r/b > 0.5 \sim 0.7$  时,文献[1]的结果在我们给出的特性阻抗的上、下限值之外。这是因为随着  $r/b$  的

表 3 本文方法和文献中的矩形外导体——圆形内导体同轴传输线特性阻抗值的比较

|                                       |        |        |        |       |       |       |       |       |       |       |       |       |      |      |
|---------------------------------------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|------|
| $a/b = 1.25$                          |        |        |        |       |       |       |       |       |       |       |       |       |      |      |
| $r/b$                                 | 0.05   | 0.1    | 0.2    | 0.3   | 0.4   | 0.5   | 0.6   | 0.7   | 0.8   | 0.9   | 0.93  | 0.95  | 0.97 | 0.99 |
| $Z_{\max}$                            | 189.45 | 148.07 | 106.74 | 82.57 | 65.37 | 51.97 | 40.91 | 31.30 | 22.79 | 14.44 | 11.73 | 9.74  | 7.43 | 4.24 |
| $Z_{\min}$                            | 189.45 | 147.86 | 106.26 | 81.90 | 64.59 | 51.15 | 40.11 | 30.69 | 22.27 | 14.16 | 11.52 | 9.58  | 7.32 | 4.20 |
| $Z_0 = \frac{Z_{\max} + Z_{\min}}{2}$ | 189.45 | 147.96 | 106.50 | 82.24 | 64.98 | 51.56 | 40.51 | 31.04 | 22.53 | 14.30 | 11.63 | 9.66  | 7.38 | 4.22 |
| $Z_0$ (文献[1])                         | 189.45 | 147.89 | 106.33 | 82.00 | 64.70 | 51.19 | 40.02 | 30.34 | 21.58 | 13.10 | 10.42 | 8.49  | 6.33 | 3.51 |
| $a/b = 1.5$                           |        |        |        |       |       |       |       |       |       |       |       |       |      |      |
| $r/b$                                 | 0.05   | 0.1    | 0.2    | 0.3   | 0.4   | 0.5   | 0.6   | 0.7   | 0.8   | 0.9   | 0.93  | 0.95  | 0.97 | 0.99 |
| $Z_{\max}$                            | 191.95 | 150.62 | 109.35 | 85.18 | 67.96 | 54.47 | 43.27 | 33.50 | 24.55 | 15.58 | 12.60 | 10.40 | 7.85 | 4.39 |
| $Z_{\min}$                            | 191.95 | 150.30 | 108.58 | 84.11 | 66.70 | 53.14 | 41.97 | 32.37 | 23.70 | 15.12 | 12.26 | 10.14 | 7.68 | 4.33 |
| $Z_0 = \frac{Z_{\max} + Z_{\min}}{2}$ | 191.95 | 150.46 | 108.97 | 84.65 | 67.33 | 53.81 | 42.62 | 32.94 | 24.13 | 15.35 | 12.43 | 10.27 | 7.77 | 4.36 |
| $Z_0$ (文献[1])                         | 191.95 | 150.39 | 108.83 | 84.50 | 67.20 | 53.70 | 42.53 | 32.82 | 23.96 | 15.14 | 12.23 | 10.10 | 7.64 | 4.31 |
| $a/b = 1.75$                          |        |        |        |       |       |       |       |       |       |       |       |       |      |      |
| $r/b$                                 | 0.05   | 0.1    | 0.2    | 0.3   | 0.4   | 0.5   | 0.6   | 0.7   | 0.8   | 0.9   | 0.93  | 0.95  | 0.97 | 0.99 |
| $Z_{\max}$                            | 193.10 | 151.83 | 110.62 | 86.46 | 69.22 | 55.68 | 44.37 | 34.45 | 25.28 | 15.99 | 12.89 | 10.61 | 7.98 | 4.43 |
| $Z_{\min}$                            | 193.10 | 151.38 | 109.54 | 84.96 | 67.44 | 53.79 | 42.53 | 32.84 | 24.07 | 15.34 | 12.41 | 10.25 | 7.74 | 4.34 |
| $Z_0 = \frac{Z_{\max} + Z_{\min}}{2}$ | 193.10 | 151.61 | 110.08 | 85.71 | 68.33 | 54.74 | 43.45 | 33.65 | 24.68 | 15.67 | 12.65 | 10.43 | 7.86 | 4.39 |
| $Z_0$ (文献[1])                         | 193.10 | 151.55 | 109.99 | 85.66 | 68.36 | 54.86 | 43.68 | 33.96 | 25.03 | 16.03 | 13.02 | 10.80 | 8.20 | 4.64 |
| $a/b = 2$                             |        |        |        |       |       |       |       |       |       |       |       |       |      |      |
| $r/b$                                 | 0.05   | 0.1    | 0.2    | 0.3   | 0.4   | 0.5   | 0.6   | 0.7   | 0.8   | 0.9   | 0.93  | 0.95  | 0.97 | 0.99 |
| $Z_{\max}$                            | 193.64 | 152.41 | 111.23 | 87.10 | 69.84 | 56.26 | 44.89 | 34.89 | 25.59 | 16.14 | 13.00 | 10.68 | 8.02 | 4.44 |
| $Z_{\min}$                            | 193.64 | 151.84 | 109.88 | 85.20 | 67.59 | 53.87 | 42.55 | 32.82 | 24.04 | 15.32 | 12.39 | 10.23 | 7.72 | 4.33 |
| $Z_0 = \frac{Z_{\max} + Z_{\min}}{2}$ | 193.64 | 152.13 | 110.56 | 86.15 | 68.72 | 55.07 | 43.72 | 33.86 | 24.82 | 15.73 | 12.70 | 10.46 | 7.87 | 4.39 |
| $Z_0$ (文献[1])                         | 193.64 | 152.08 | 110.52 | 86.19 | 68.89 | 55.39 | 44.21 | 34.48 | 25.52 | 16.44 | 13.38 | 11.11 | 8.45 | 4.80 |

表 3 (续)

| $a/b = 2.5$                           |        |        |        |       |       |       |       |       |       |       |       |       |      |      |
|---------------------------------------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|------|
| $r/b$                                 | 0.05   | 0.1    | 0.2    | 0.3   | 0.4   | 0.5   | 0.6   | 0.7   | 0.8   | 0.9   | 0.93  | 0.95  | 0.97 | 0.99 |
| $Z_{\max}$                            | 193.99 | 152.81 | 111.68 | 87.56 | 70.29 | 56.67 | 45.25 | 35.16 | 25.75 | 16.20 | 13.03 | 10.70 | 8.02 | 4.44 |
| $Z_{\min}$                            | 193.99 | 152.07 | 109.91 | 85.07 | 67.32 | 53.50 | 42.13 | 32.40 | 23.70 | 15.11 | 12.22 | 10.09 | 7.63 | 4.30 |
| $Z_0 = \frac{Z_{\max} + Z_{\min}}{2}$ | 193.99 | 152.44 | 110.80 | 86.32 | 68.81 | 55.09 | 43.69 | 33.78 | 24.73 | 15.66 | 12.63 | 10.40 | 7.83 | 4.37 |
| $Z_0$ (文献[1])                         | 193.99 | 152.43 | 110.87 | 86.55 | 69.25 | 55.75 | 44.64 | 34.82 | 25.84 | 16.71 | 13.62 | 11.32 | 8.62 | 4.90 |
| $a/b = 3$                             |        |        |        |       |       |       |       |       |       |       |       |       |      |      |
| $r/b$                                 | 0.05   | 0.1    | 0.2    | 0.3   | 0.4   | 0.5   | 0.6   | 0.7   | 0.8   | 0.9   | 0.93  | 0.95  | 0.97 | 0.99 |
| $Z_{\max}$                            | 194.06 | 152.90 | 111.78 | 87.66 | 70.38 | 56.75 | 45.29 | 35.17 | 25.74 | 16.18 | 13.00 | 10.67 | 8.00 | 4.43 |
| $Z_{\min}$                            | 194.06 | 152.04 | 109.73 | 84.77 | 66.93 | 53.05 | 41.66 | 31.96 | 23.34 | 14.90 | 12.06 | 9.97  | 7.55 | 4.27 |
| $Z_0 = \frac{Z_{\max} + Z_{\min}}{2}$ | 194.06 | 152.47 | 110.76 | 86.22 | 68.66 | 54.90 | 43.48 | 33.57 | 24.54 | 15.54 | 12.53 | 10.32 | 7.78 | 4.30 |
| $Z_0$ (文献[1])                         | 194.06 | 152.51 | 110.95 | 86.62 | 69.32 | 55.82 | 44.64 | 34.89 | 25.91 | 16.76 | 13.67 | 11.36 | 8.65 | 4.91 |

增大,文献[1]求出的特性阻抗的上、下限的相对差值显著增大,因而算出的特性阻抗的误差增大。

## 五、圆形外导体——正多边形内导体同轴传输线

利用计算同轴线电容的公式,圆形外导体——正多边形内导体同轴传输线(图 6, 7)的上限值

$$Z_{\max} = \frac{1}{2n} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1}{\int_0^{\pi/n} \left[ \frac{1}{\ln \left( \frac{R \cos \theta}{r} \right)} \right] d\theta}, \quad (7)$$

式中  $n$  是图形的对称轴数。

选择偏心同轴线作为比较图形,为了求出相应的偏心率值,由函数变换求得  $r/R \ll 1$  时,该类传输线的特性阻抗的准确值。变换函数<sup>[13]</sup>

$$W = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^{1-nk} \quad (8)$$

将正多边形外部空间变换为单位圆的外部空间,当  $r/R \ll 1$  时,忽略(8)式中的高次项,外导体近似看作圆,可由计算同轴线特性阻抗的公式求出它们的特性阻抗值。下面用 Melentiev's 方法求出(8)式中的系数  $a_k$ 。在  $W$  平面上相应的  $u$  和  $v$  是

$$u_i = \sum_{k=0}^m a_k \cos \frac{\pi}{m} k i, \quad (9a)$$

$$v_i = - \sum_{k=0}^m a_k \sin \frac{\pi}{m} k i, \quad (9b)$$

式中  $m$  是  $\pi/n$  区域的  $m$  等分。

则系数  $a_k$  可表示为

$$a_0 = \frac{1}{2m} (u_0 + u_m) + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m-1} u_i, \quad (10a)$$

$$a_m = \frac{1}{2m} [u_0 + (-1)^m u_m] + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^i u_i, \quad (10b)$$

$$a_k = \frac{1}{m} [u_0 + (-1)^k u_m] + \frac{2}{m} \sum_{i=1}^{m-1} u_i \cos \frac{\pi}{m} i k. \quad (10c)$$

由下列变换

$$W = \zeta(R + r\zeta^m), \quad (11)$$

式中

$$R = \frac{r_{\max} + r_{\min}}{2}, \quad r = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{2},$$

求出初值  $u_0^{(0)}, u_1^{(0)}, \dots$ , 然后代入(9),(10)式,经迭代后即得系数  $a_k$ 。

当  $r/R \ll 1$  时,将  $a_0 r$  作为正  $n$  边形内导体的等效圆半径  $r_e$  具有很高的精确度,可以认为是准确值。表 4 列出了  $r/R = 0.05$  时,由(7)式算出的圆形外导体——正三、四、五和六边形内导体同轴线的等效半径与相应的系数  $a_0$  的相对误差,以及由(3)式求出的具有相同误差值的偏心同轴线的偏心率  $E$  值。

表 4 公式(7)算出的等效半径和系数  $a_0$  的相对误差及相应的偏心同轴线的偏心率

| $n$                                  | 3       | 4       | 5       | 6       |
|--------------------------------------|---------|---------|---------|---------|
| $a_0$                                | 1.46104 | 1.18026 | 1.09865 | 1.06274 |
| (7)式算出的等效半径的相对误差<br>( $r/R = 0.05$ ) | 1.16832 | 1.05342 | 1.02442 | 1.01330 |
| 相应的偏心同轴线的偏心率 $E$                     | 0.60035 | 0.37291 | 0.26062 | 0.19508 |

### 1. 圆形外导体——方形内导体同轴传输线(图 6)

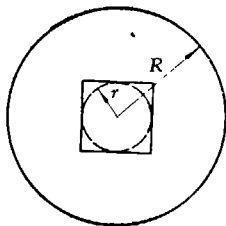


图 6 圆形外导体——方形内导体同轴传输线截面图

首先由(3)式求出偏心率  $E = 0.3729$  的偏心同轴线等效半径的绝对误差  $\delta r_d$ , 然后用  $\delta r_d * c + 1$  来修正(7)式算出的圆形外导体——方形内导体同轴线等效半径的上限值(其中  $c$  是方形外导体——圆形内导体同轴线等效半径的修正偏差系数), 得到该种传输线的特性阻抗值, 结果例于表 5。

表 5 本文方法和文献中的圆形外导体——方形内导体同轴传输线特性阻抗值的比较

| $r/R$                          | 0.05   | 0.1    | 0.2   | 0.3   | 0.4   | 0.5   | 0.6   | 0.7   |
|--------------------------------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $Z_{\max}$                     | 169.66 | 128.37 | 87.14 | 63.03 | 45.86 | 32.37 | 20.91 | 8.15  |
| $Z_0$ (本文方法)                   | 169.66 | 128.12 | 86.56 | 62.23 | 44.92 | 31.38 | 19.95 | 7.32  |
| $Z_0$ (文献[11], 保角变换——算术平均法)    | 169.67 | 128.11 | 86.55 | 62.24 | 44.98 | 31.51 | 20.20 | 8.85  |
| $Z_0$ (文献[11], 保角变换——几何平均法)    | 169.67 | 128.11 | 86.55 | 62.24 | 44.97 | 31.49 | 20.03 | 6.28  |
| $Z_0$ (文献[11], 保角变换——点匹配法)     | 169.59 | 128.05 | 86.51 | 62.21 | 44.93 | 31.40 | 19.67 | 4.23  |
| $Z_0$ (文献[8, 10], 共形逼近——几何平均法) | 169.21 | 127.66 | 86.10 | 61.79 | 44.54 | 31.17 | 20.24 | 10.99 |

从表 5 可知, 当  $r/R < 0.6$  时, 本文的结果和文献[11]由保角变换——算术平均法、保角变换——几何平均法和保角变换——点匹配法给出的结果基本一致。当  $r/R > 0.6$  时, 上述的三种方法给出的特性阻抗值的差别增大, 由本文方法求出的等效圆半径  $r_e$  的误差(即特性阻抗值的绝对误差)随着  $r/R$  的增大而减小的特性, 可推出保角变换——几何平均法和点匹配法算出的该种传输线的特性阻抗值偏小。与文献[11]推荐的方法不同, 我们认为将算术平均和几何平均两种方法算出的结果进行算术平均, 或采用本文方法的数值结果, 能达到更高的精确度。本文求出的方形内导体的等效圆半径由 1.18026 ( $r/R=0.05$ ) 上升到 1.26441 ( $r/R=0.7$ )。

## 2. 圆形外导体——正三、五和六边形内导体同轴传输线(图 7)

先由(3)式求出表 4 中偏心同轴线的等效半径的绝对误差, 然后由  $\delta r_d * c + 1$  修正(7)

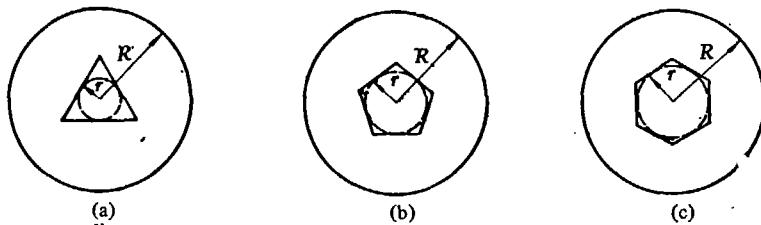


图 7 圆形外导体——正三、五和六边形内导体同轴传输线截面图

表 6 本文方法和文献中的圆形外导体——正三角形内导体同轴传输线特性阻抗值的比较

| $r/R$                      | 0.05   | 0.1    | 0.2   | 0.3   | 0.4   | 0.45  | 0.425 | 0.495 |
|----------------------------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $Z_{\max}$                 | 156.87 | 115.89 | 74.95 | 50.69 | 32.47 | 23.83 | 18.82 | 12.47 |
| $Z_0$ (本文方法)               | 156.87 | 115.19 | 73.27 | 48.31 | 29.65 | 20.88 | 15.83 | 9.44  |
| $Z_0$ (文献[14], 本征函数法)      | 155.20 | 113.58 | 71.95 | 47.40 | 28.86 |       |       |       |
| $Z_0$ (文献[10], 共形逼近——几何平均) | 150.10 | 108.64 | 67.09 | 42.78 | 25.53 | 18.47 | 15.23 | 12.76 |

表 7 本文方法和文献中的圆形外导体——正五边形内导体同轴传输线特性阻抗值的比较

| $r/R$                     | 0.05   | 0.1    | 0.2   | 0.3   | 0.4   | 0.5   | 0.6   | 0.7   | 0.8  |
|---------------------------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| $Z_{\max}$                | 173.96 | 132.53 | 91.16 | 66.97 | 49.80 | 36.44 | 25.44 | 15.90 | 5.90 |
| $Z_0$ (本文方法)              | 173.96 | 132.41 | 90.89 | 66.60 | 49.37 | 36.00 | 25.01 | 15.53 | 5.62 |
| $Z_0$ (文献[10],共形逼近——几何平均) | 173.25 | 131.69 | 90.14 | 65.82 | 48.58 | 35.20 | 24.27 | 15.03 | 7.02 |

表 8 本文方法和文献中的圆形外导体——正六边形内导体同轴传输线特性阻抗值的比较

| $r/R$                     | 0.02   | 0.05   | 0.1    | 0.2   | 0.3   | 0.4   | 0.5   | 0.6   | 0.7   | 0.8  | 0.86 |
|---------------------------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|------|
| $Z_{\max}$                | 230.88 | 175.95 | 134.47 | 93.02 | 68.79 | 51.60 | 38.25 | 27.31 | 17.98 | 9.64 | 3.96 |
| $Z_0$ (本文方法)              | 230.88 | 175.95 | 134.41 | 92.88 | 68.59 | 51.37 | 38.01 | 27.08 | 17.79 | 9.50 | 3.86 |
| $Z_0$ (文献[10],共形逼近——几何平均) | 230.22 | 175.28 | 133.73 | 92.17 | 67.87 | 50.62 | 37.24 | 26.31 | 17.07 | 9.07 | 4.73 |
| $Z_0$ (文献[14],本征函数法)      | 231.18 |        |        |       | 68.59 |       |       | 26.96 |       |      |      |

式算出的圆形外导体——正三、五和六边形内导体同轴线等效半径的上限值,得到这些传输线的特性阻抗值,结果列于表 6—8。

由表 6—8 可知,本文的结果与文献 [14] 用本征函数展开法给出的结果基本一致。当  $r/R < 0.8$  时,文献 [10] 用共形逼近——几何平均法求出的圆形外导体——正五和六边形内导体同轴传输线的特性阻抗与本文的结果大致相符。当  $r/R > 0.8$  时或者对圆形外导体——正三边形内导体同轴传输线,共形逼近——几何平均法给出的结果的准确度下降。

## 六、结 语

本文提出了求解复杂截面同轴传输线特性阻抗的新方法,通过理论分析和数值比较,证明是切实可用的,从而为复杂截面同轴传输线的理论研究提供了一种途径。本文方法的有效应用将陆续报道。

## 参 考 文 献

- [1] Gunston, M. A. R., *Microwave Transmission-Line Impedance Data*, VNR, London, 1972.
- [2] Riblet, H. J., *IEEE Trans. MTT*, MTT-27(1979), Apr., 294.
- [3] Rao, J. S. and Das, B. N., *ibid.*, MTT-27(1979), Apr., 299.
- [4] Collin, R. E., *Field Theory of Guided Waves*, McGraw-Hill, New York, 1960.
- [5] Lavy, R., *IEEE Trans. MTT*, MTT-28(1980), Apr., 369.
- [6] 林为干、钟祥礼, *物理学报*, 19(1963), 249.
- [7] 林为干、潘威炎, *电子学报*, 1979, 2: 86.
- [8] 林为干、曾令儒, *物理学报*, 30(1981), 12.
- [9] 曾令儒, *中国科学 A 辑*, 1982, 6: 553.
- [10] 曾令儒, *中国科学 A 辑*, 1983, 4: 357.
- [11] Lin, W. (林为干), *IEEE Trans. MTT*, MTT-29(1981), Nov., 1981.
- [12] Riblet, H. J., *ibid.*, MTT-32(1984), Oct., 841.
- [13] Kantorovitch, L. V. and Krylov, V., *Approximate Methods of Higher Analysis*, Interscience Publishers, New York, 1958.
- [14] Seshadri, T. K. and Rajaiah, K., *IEE Proc.*, Pt. II, 131(1984), Aug., 279.