

基于信用风险最优信用投资组合问题研究

姜凤利, 赵晓颖

(辽宁石油化工大学 理学院, 辽宁 抚顺 113001)

摘 要: 信用风险管理是银行业务中不可或缺的部分。通过修改标准Markowitz模型, 研究是否发放贷款二进制变量的优化信用投资组合问题。该模型允许在考虑资产可能的相关性及从影响风险指标和投资组合收益的角度决定是否提供贷款的情况下, 估计信用投资组合的累积风险和收益率。最后利用提出的模型, 基于标准普尔评级机构的统计数据, 实现最优投资组合的实证研究。

关键词: 信用风险; 违约概率; 违约损失率; Markowitz模型; 分支定界

中图分类号: F224.9

文献标志码: A

doi:10.3969/j.issn.1672-6952.2019.03.017

Research on Optimal Credit Investment Portfolio Problems Based on Credit Risk

Jiang Fengli, Zhao Xiaoying

(School of Science, Liaoning Shihua University, Fushun Liaoning 113001, China)

Abstract: Credit risk management is an integral part of banking business. By modifying the standard Markowitz model, the paper aims to study optimum credit portfolio with binary variable, which decides whether providing loads. The model can evaluate the cumulative risk and returns by considering the asset correlation and whether providing loads in the prospective of influencing risk indicators and profit rates. It enforces the empirical research of optimum portfolio by using the proposed model in this paper and the statistics offered by Standard & Poor's rating agency.

Keywords: Credit risk; Default probabilities; Default loss rate; Markowitz model; Branch and bound algorithm

信用风险是现代经济生活中一种重要的金融风险形式,是消费者、投资者以及社会经济实体所面临的重大挑战。信用风险直接影响市场的经济行为,也会影响一个国家的经济发展甚至全球经济的平稳性^[1]。在金融市场中,信用风险是银行业务风险份额比例最大的一种风险,在很大程度上决定风险加权资产规模、贷款损失储备量、资本充足率等银行业务指标,最终实现银行资本的收益最大化^[2-3]。因此,选择一个可靠的信用风险管理模型,是银行决策者的关键战略决策。

投资组合优化和多样化概念的发展,加深了人们对金融市场和金融决策的理解,自H.Markowitz^[4]在经典之作《资产选择》中提出投资组合理论,开启了金融数理分析的先河。但是,Markowitz模型仅仅是现代投资组合理论的开始,投资组合方法仍有

许多现实因素需要从不同角度对其进行扩展。参考文献[5-7]在构建投资组合模型时,为了避免产生次优组合而引入了交易成本;M.Kritzman^[8]研究了估计误差对投资组合权重的影响;R.Clarke等^[9]、康志林等^[10]分别研究了不同约束条件下的投资组合问题。正是由于国内外众多学者不断地对Markowitz模型加以改进,才使得Markowitz模型无论是学术角度还是实践角度都具有广泛的意义和应用价值。

投资组合的信用风险管理是银行投资组合战略决策的重要基础,作为银行信用风险管理的重要组成部分,其现实意义主要表现在两个方面:一方面,如果高估投资组合信用风险,则为避免可能出现的损失而储备大量的资金,从而大大降低银行业务的收益;另一方面,如果低估投资组合信用风险,

收稿日期:2018-08-29 修回日期:2018-09-27

基金项目:辽宁省教育厅基本科研项目(L2017WQN006);辽宁石油化工大学博士启动基金项目(1100130231)。

作者简介:姜凤利(1980-),男,博士,讲师,从事金融时间序列、金融风险管理等研究;E-mail:jfl_001@163.com。

则会降低银行的金融稳定性,增加银行破产的可能性。在实际应用中,投资组合信用风险管理的一个重要问题是进行投资组合信用风险的评估与实证分析,即信用风险评价模型应该给予银行管理者和银行监管部门一个关于信用风险和贷款损失概率大小的认识,并给出一个随机形成或符合银行战略特点的投资组合。如何创建具有目标收益率和多样化的投资组合,控制信用风险水平的规范性分析是投资组合信用风险管理的另一个重要问题。

从理论上讲,银行信用投资组合策略主要分为高风险策略、中度风险策略和低风险策略。高风险策略的特点是高风险业务所占比例较大,同时贷款收益较高;中度风险策略的特点是对风险程度不同的业务进行合理的组合;低风险策略的特点是严格限制高风险业务。但是,信用投资组合与证券投资组合相比较,存在两个显著的差别:(1)银行贷款没有像上市证券一样的市场价格;(2)银行无法获得预先确定的贷款规模。因此,银行风险管理的解决方案通常是简化对贷款收益率的确定,而借助二进制字符确定是否在所要求的规模上发放贷款。本文基于是否发放贷款的二进制解决方案的基础上,建立一个考虑整数变量限制的信用投资组合优化 Markowitz 模型。实证分析结果表明,该模型可以实现贷款的最优投资组合。

1 信用风险管理

信用风险评价方法是银行信用风险管理体系中的一个基本要素。信用指数通常定义为其经济活动指标的一个线性组合:

$$Y_i = X_{i1}\alpha_1 + X_{i2}\alpha_2 + \cdots + X_{im}\alpha_m \quad (1)$$

式中, Y_i 为贷款申请 i 的信用指数; X_{i1} 、 X_{i2} 、 $\cdots$ 、 X_{im} 为贷款申请 i 的经济活动指数向量; α_1 、 α_2 、 $\cdots$ 、 α_m 为权重向量。

一般而言,可应用 Probit 模型和 Logit 模型来衡量因变量与离散变量之间的关系,在计量经济分析中两个模型并无优劣之分。根据 Probit 模型和 Logit 模型,将信用指数 Y_i 转化为贷款申请的违约概率 PD_i ^[11-12],其表达式分别见式(2)及式(3)。

Probit 模型:

$$PD_i = \phi(-Y_i) \quad (2)$$

Logit 模型:

$$PD_i = \frac{1}{1 + \exp(-Y_i)} \quad (3)$$

式中, $\phi(\cdot)$ 为正态分布函数。

在实际应用中,评级机构(标准普尔公司、穆迪公司等)会根据每一个贷款申请的信用水平和违约

概率的大小给予一个信用等级。巴塞尔银行监管委员会的调查显示,银行内部信用评级规模一般为 10 个等级(记 R1—R10)^[13-14]。标准普尔、穆迪公司综合评级及综合违约概率如表 1 所示。由表 1 可知,信用评级类别的下降导致违约概率的增加,这也是信用评级的主要特征。例如,按照标准普尔公司的方法,违约概率从信用等级为 AAA 的 0 到信用等级为 D 的 100.00%,这表明不同信用评级对应的违约概率具有单调性。然而,在标准普尔公司的评级中,评级为 AA- 和 A+ 等级对应的违约概率不符合单调性特点,AA- 对应的违约概率(0.03%)大于 A+ 对应的违约概率(0.02%);在穆迪公司的评级中,评级为 Aa3 至 Baa2 等级对应的违约概率也不符合单调性特点。为了消除这一影响,利用信用评级的平滑聚类方法进行重新描述。表 1 的最后两列给出了利用信用评级的平滑聚类方法重新确定的综合评级及综合违约概率,其满足单调性的要求。

表 1 标准普尔、穆迪公司综合评级及综合违约概率

等级		违约概率/%		综合 评级	综合违 约概 率/%
标准普 尔公司	穆迪 公司	标准普 尔公司	穆迪 公司		
AAA	Aaa	0	0	R1	0
AA+	Aa1	0	0	R1	0
AA	Aa2	0	0	R2	0.015
AA-	Aa3	0.03	0.06	R2	0.015
A+	A1	0.02	0	R3	0.035
A	A2	0.05	0	R3	0.035
A-	A3	0.05	0	R4	0.085
BBB+	Baa1	0.12	0.07	R4	0.085
BBB	Baa2	0.22	0.06	R5	0.285
BBB-	Baa3	0.35	0.39	R5	0.285
BB+	Ba1	0.44	0.64	R6	0.690
BB	Ba2	0.94	0.54	R6	0.690
BB-	Ba3	1.33	2.47	R7	2.120
B+	B1	2.91	3.48	R7	2.120
B	B2	8.38	6.23	R8	9.350
B-	B3	10.32	11.88	R8	9.350
CCC	Caa	21.94	18.85	R9	21.940
D	D	100.00	100.00	R10	100.000

根据违约概率 PD_i 和违约损失率 LGD 确定贷款价格:

$$P_i = \frac{PD_i(1-LGD) + (1-PD_i)}{1+r_f} V_i \quad (4)$$

$$P_i = \sum_{t=1}^T \frac{CF_{it}}{(1+y_i)^t} \quad (5)$$

式中, P_i 为贷款 i 的价格; r_f 为无风险利率; V_i 为贷款金额; CF_{it} 为贷款 i 在 t 时刻的现金流量; y_i 为贷款 i 到期收益率; T 为贷款到期时间。

联立式(4)、(5)得贷款 i 的收益率为:

$$y_i = \frac{(1+r_f)}{PD_i(1-LGD) + (1-PD_i)} - 1 \quad (6)$$

将 P_i 作为一个具有期望和方差的随机变量, 则贷款收益率 y_i 是 P_i 的一个函数:

$$y_i = \frac{V_i - P_i}{P_i} \quad (7)$$

根据 Delta 方法, 贷款收益率标准差 σ_i^2 通过式(8)进行计算:

$$\sigma_i^2 = \left(\frac{\partial y_i}{\partial P_i} \right)^2 D(P_i) \quad (8)$$

式中, $\partial y_i / \partial P_i$ 为贷款价格收益率的偏导数; $D(P_i)$ 为价格方差。

$D(P_i)$ 通过式(9)进行计算:

$$D(P_i) = \frac{1}{(1+r_f)^2} [(V_i - P_i(1+r_f))^2(1-PD_i) + ((1-LGD)V_i - P_i(1+r_f))^2 PD_i] \quad (9)$$

由式(7)得 $\frac{\partial y_i}{\partial P_i} = \left(-\frac{V_i}{P_i^2} \right)$, 将其代入式(8), 则式(8)可转化为:

$$\sigma_i^2 = \left(-\frac{V_i}{P_i^2} \right)^2 D(P_i) = (1+r_f)^2 \cdot \frac{[(LGD \cdot PD_i)^2(1-PD_i) + (LGD(PD_i-1))^2 PD_i]}{[(1-LGD \cdot PD_i)]^2} \quad (10)$$

假设违约损失率 $LGD = 50\%$, 无风险利率 $r_f = 0.05$, 则根据式(6)和式(10)可分别计算标准普尔信用评级(R1—R9)的贷款收益率 y_i 和收益率标准差 σ_i , 结果见表 2。

2 信用投资组合结构优化模型

根据贷款申请 $i = 1, 2, \dots, N$ 申请的贷款量 $V_1, V_2, \dots, V_N$ 建立投资组合。假设银行信贷资源规模总量为 V , 且每一笔贷款的权重系数 $w_i = V_i/V$ 。二进制变量 n_i 反映银行是否提供贷款: 如果提供贷款, 则 $n_i = 1$; 否则 $n_i = 0$ 。此时,

$$\sum_{i=1}^N V_i n_i \leq V \Rightarrow \sum_{i=1}^N w_i n_i \leq 1 \quad (11)$$

表 2 贷款收益率与收益率标准差

信用等级	贷款收益率/%	收益率标准差
R1	0.050 0	0
R2	0.050 1	0.006 1
R3	0.050 2	0.009 4
R4	0.050 4	0.014 6
R5	0.051 4	0.026 7
R6	0.053 5	0.041 7
R7	0.060 7	0.073 6
R8	0.099 0	0.160 2
R9	0.173 2	0.261 1

假设任意 i, j 两笔贷款间的相关系数相同, 均为 ρ , 则信用投资组合优化问题为:

$$L = \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 n_i^2 w_i^2 + 2 \sum_{i>j=1}^N (\sigma_i \sigma_j \rho) (n_i w_i) (n_j w_j) \rightarrow \min \quad (12)$$

$$\text{s.t} \begin{cases} \sum_{i=1}^N y_i n_i w_i \geq \bar{y} \\ \sum_{i=1}^N w_i n_i \leq 1 \\ n_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (13)$$

将贷款收益率 y_i 、收益标准差 σ_i^2 和权重 w_i 代入式(12)、(13), 利用分支定界定向枚举算法^[15-16]求解最优值。记符号 K 表示包含在投资组合中的贷款, 而 $N \setminus \{K\}$ 表示不包含在投资组合中的贷款。具体步骤如下:

第一步: 为了得到式(12)目标函数的上限值 L^* , 需解决下列辅助优化问题:

$$\sum_{i=1}^N y_i n_i w_i \rightarrow \max \quad (14)$$

$$\text{s.t} \begin{cases} \sum_{i=1}^N w_i n_i \leq 1 \\ n_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (15)$$

将式(14)的最优解 y^0 与式(13)的 $\bar{y}$ 进行比较。如果式(13)在 $y = y^0$ 时的值小于 $\bar{y}$, 则式(12)无解; 否则, 计算式(12)在 $y = y^0$ 时的目标函数值并接受式(12)的上限值 L^* 。

下限值 L^* 可从具有最小标准差 σ_i^2 的贷款组合中获得。如果 $L^* = L^*$, 则求得的解即为最优解; 如

果 $L^n < L^*$, 则转到第二步。

第二步: 选择不包括在投资组合中的贷款 $k \in N \setminus \{K\}$, 并解决带有限制条件式 (13) 和 $n_j = 1, j \in K$ 及 $n_k = 1$ 的辅助问题 $\max \{L_k | y_k \in F_k\}$, 其中 $F_k \subseteq F$ 。记该问题的解为 $\{L_k, y_k\}$, 如果该辅助问题无解, 则 $n_k = 0$, 将选择下一个贷款 k ; 否则, 转到第三步。

第三步: 如果 $L_k > L^*$, 则贷款 k 不被发放, 即 $n_k = 0$; 如果 $L_k \leq L^*$, 则 $n_k = 1$, 且上限等于 L_k 。如果 $K := K \cup k$, 则转到第二步。

当完成所有贷款审查 ($N \setminus \{K\} = \{0\}$) 时, 信用贷款组合形成过程结束。此时, 对应最小值 L^* 的投

资组合为最优投资组合。

3 实证分析

基于表1中评级机构数据的最优信用投资组合为例, 根据信用评级 R1—R9 相应的贷款收益率和收益标准差 (见表2), 取相关系数 $\rho = 0.2$ 及相应间隔区间 $[0.12, 0.24]$ 。假设存在 18 个贷款申请, 且每一个信用等级对应两个申请规模: 信用投资组合总量的 10% 和 20%。研究两个潜在的银行策略: 具有目标收益的高风险投资组合 ($y_p = 9\%$) 和低风险投资组合 ($y_p = 6\%$)。信用投资组合贷款发放的最优策略分析结果见表3。

表3 信用投资组合贷款发放的最优策略分析结果

编号	信用等级	收益率/%	收益标准差	权重系数	n_i		总收益率/%	
					低风险目	高风险目	低风险目标	高风险目标
					标收益率 ($y_p = 6\%$)	标收益率 ($y_p = 9\%$)	收益率($y_p = 6\%$)	收益率($y_p = 9\%$)
1	R1	0.050 0	0	0.1	1	1	0.005 0	0.005 0
2	R1	0.050 0	0	0.2	1	1	0.010 0	0.010 0
3	R2	0.050 1	0.006 1	0.1	1	1	0.005 0	0.005 0
4	R2	0.050 1	0.006 1	0.2	1	1	0.010 0	0.010 0
5	R3	0.050 2	0.009 4	0.1	1	0	0.005 0	0
6	R3	0.050 2	0.009 4	0.2	1	0	0.010 0	0
7	R4	0.050 4	0.014 6	0.1	0	0	0	0
8	R4	0.050 4	0.014 6	0.2	0	0	0	0
9	R5	0.051 4	0.026 7	0.1	0	0	0	0
10	R5	0.051 4	0.026 7	0.2	0	0	0	0
11	R6	0.053 5	0.041 7	0.1	0	0	0	0
12	R6	0.053 5	0.041 7	0.2	0	0	0	0
13	R7	0.060 7	0.073 6	0.1	0	0	0	0
14	R7	0.060 7	0.073 6	0.2	0	0	0	0
15	R8	0.099 0	0.160 2	0.1	0	1	0	0.009 9
16	R8	0.099 0	0.160 2	0.2	0	0	0	0
17	R9	0.173 2	0.261 1	0.1	1	1	0.017 3	0.017 3
18	R9	0.173 2	0.261 1	0.2	0	1	0	0.034 6
投资组合收益率							0.062 3	0.091 8
投资组合收益率的标准差							0.027 2	0.069 2

从表3可以看出, 若要实现信用投资组合低目标收益率 ($y_p = 6\%$), 则应该提供贷款给具有最小

收益标准差的贷款申请, 尤其是编号为 1—6 贷款。然而, 编号为 1—6 贷款申请的贷款收益率总和为

5%左右,因此为了实现目标收益率6%,还需要为编号17发放贷款,此时总贷款收益率达到6.23%,收益率标准差为2.72%,且只有10%的投资具有高风险的特点。若要实现高风险策略信用投资组合目标收益率($y_p=9\%$),则应该提供贷款给编号为1—4、15和17、18贷款申请。编号为1—4贷款申请的组合收益率为5%左右,剩余收益率由编号为15和17、18贷款申请来完成,最终总贷款收益率达到9.18%。此时,高风险投资占投资组合的40%,明显

高于低风险策略的比例,且投资组合收益率的标准差为6.92%,是低风险策略的最优解收益率标准差的近3倍。

上述结果是根据式(12)、(13)求得的信用投资组合的最优策略。式(12)、(13)也可以应用到在已经形成投资组合的情况下决定是否发放新的贷款问题中。现设定贷款申请11—14进入信用投资组合中,并且投资组合收益率为5.70%。此时,编号为1—10和15—18贷款申请均是可以发放的。信用投资组合新贷款发放的最优策略分析结果见表4。

表4 信用投资组合新贷款发放的最优策略分析结果

编号	等级	收益率/%	收益标准差	权重系数	n_i		总收益率/%	
					低风险目标收益率($y_p=5\%$)	高风险目标收益率($y_p=9\%$)	低风险目标收益率($y_p=5\%$)	高风险目标收益率($y_p=9\%$)
1	R1	0.050 0	0	0.1	1	0	0.005 0	0
2	R1	0.050 0	0	0.2	1	0	0.010 0	0
3	R2	0.050 1	0.006 1	0.1	1	0	0.005 0	0
4	R2	0.050 1	0.006 1	0.2	0	0	0	0
5	R3	0.050 2	0.009 4	0.1	0	0	0	0
6	R3	0.050 2	0.009 4	0.2	0	0	0	0
7	R4	0.050 4	0.014 6	0.1	0	0	0	0
8	R4	0.050 4	0.014 6	0.2	0	0	0	0
9	R5	0.051 4	0.026 7	0.1	0	0	0	0
10	R5	0.051 4	0.026 7	0.2	0	0	0	0
11	R6	0.053 5	0.041 7	0.1	1	1	0.005 3	0.005 3
12	R6	0.053 5	0.041 7	0.2	1	1	0.010 7	0.010 7
13	R7	0.060 7	0.073 6	0.1	1	1	0.006 1	0.006 1
14	R7	0.060 7	0.073 6	0.2	1	1	0.012 1	0.012 1
15	R8	0.099 0	0.160 2	0.1	0	1	0	0.009 9
16	R8	0.099 0	0.160 2	0.2	0	0	0	0
17	R9	0.173 2	0.261 1	0.1	0	1	0	0.017 3
18	R9	0.173 2	0.261 1	0.2	0	1	0	0.034 6
投资组合收益率/%							0.054 2	0.096 0
投资组合收益率的标准差							0.023 1	0.080 9

由表4可知,根据降低风险策略,投资组合的最低收益率为5%的最优解决方案是提供编号为1—3低风险贷款申请,相应的低风险贷款比例从0增加到40%。此时,信用投资组合的收益率达到

5.42%,收益率标准差为2.31%。根据增加风险策略,投资组合的最高收益率为9.00%,则需增加编号为15和17、18高风险贷款申请。此时,信用投资组合的收益率达到9.60%,收益率标准差为8.09%。

4 结 论

信用风险管理文化是一种融合现代商业银行经营思想、管理理念、风险控制行为、风险道德标准环境等多种要素于一体的企业文化。银行应倡导和提升全员风险意识,切实提升信用风险管理的整体水平。在借鉴国际先进的信用风险度量和管理工具的基础上,应充分考虑中国银行业乃至金融体系的现实因素,加快探索符合中国银行业实际的信用风险度量和管理工具,不断完善我国商业银行的信用风险管理方法。通过创新信用风险管理工具,大力发展信用评级机构,积极提高商业银行内部评级体系的有效性。银行风险管理专家需利用主观

判断法和数量分析法建立科学的个人信用评分标准体系,全面掌握借款人的各类资料,针对个人不同阶段的实际情况,发出风险预警信号,对可能违约的风险因素、违约概率评估和潜在损失大小预测等进行信用风险分析。信用风险分析还应包含新贷款的风险因素和信用投资组合总收益的影响评估信用风险分析过程。本文改进了投资组合管理的Markowitz模型,同时考虑了关于发放贷款的离散性方案和根据银行指定的信贷政策,成功地解决了信用风险积极性限制的问题。实证分析表明,该方法具有较好的实用性,可以为金融风险管理专家进行风险决策提供一些理论依据。

参 考 文 献

- [1] 戴志敏,金欣.信用及信用风险的内涵研究[J].浙江学刊,2010(1):164-169.
- [2] 崔佳,王涵生.银行信用风险管理及启示[J].金融理论与实践,2008(1):117-120.
- [3] 杨茜.我国商业银行信用风险管理问题分析[J].西部金融,2012(6):80-82.
- [4] Markowitz H.Portfolio selection[J].Journal of Finance,1952,7(1):77-91.
- [5] Li H,Hauptmann E,Thum C,et al.Direct estimation of equity market impact[J].Risk,2005,18(5):57-62.
- [6] 孙超,李胜宏.带比例交易成本的投资组合选择[J].浙江大学学报(理学版),2008,35(2):153-159.
- [7] 任大源,徐玖平,黄南京,等.含交易成本和机会成本的极小极大多期投资组合选择模型[J].系统工程理论与实践,2012,32(1):11-19.
- [8] Kritzman M. Are optimizers error maximizers?[J].Journal of Portfolio Management,2006,32(4):66-69.
- [9] Clarke R,Desilva H,Thorley S.Portfolio constraints and the fundamental law of active management[J].Financial Analysts Journal,2002,58(5):48.
- [10] 康志林,曾燕.Minimax准则下带约束的最优投资组合策略[J].系统工程学报,2012,27(5):656-666.
- [11] 罗剑朝,赵雯.农户对村镇银行贷款意愿的影响因素实证分析——基于有序Probit模型的估计[J].西部金融,2012(2):18-35.
- [12] 徐喆.逻辑回归模型在互联网金融P2P业务信用风险的应用[J].统计科学与实践,2015(11):26-29.
- [13] 姜凤利.基于信用转移矩阵的违约概率和风险溢价计算[J].辽宁石油化工大学学报,2015,35(4):66-69.
- [14] 戴国强,吴许均.基于违约概率和违约损失率的贷款定价研究[J].国际金融研究,2005(10):43-48.
- [15] 贾新花,赵茂先,胡宗国.一种0-1型双层线性规划的分支-定界法[J].山东理工大学学报(自然科学版),2008,22(6):105-107.
- [16] 孙树亮,陈忠,刘政连.改进的分支定界算法[J].软件,2011,32(10):32-34.

(编辑 陈 雷)