

文章编号:1005-9865(2022)01-0001-09

有限长正弦地形上的波浪传播问题研究

滕 斌, 崔 杰

(大连理工大学 海岸和近海工程国家重点实验室, 辽宁 大连 116024)

摘 要:应用基于势流理论的频域边界元方法,研究了波浪在有限长正弦周期地形上的传播问题。开展了网格收敛性分析,并与物理模型试验结果做了对比,验证了数值方法的准确性。研究了正弦地形长度和幅度对水波反射率的影响,以及波浪在周期性地形上传播时的沿程波幅变化。研究发现,波浪反射系数随波数的变化及波浪幅值沿程的变化均呈包络状;当频率处于布拉格共振区域边缘且反射率为零时,周期地形上会出现极大的波幅;随海床波幅增大,第一布拉格共振带变宽且向低频移动。

关键词:水波反射率;布拉格共振;边界元方法;正弦地形;相对波幅;波浪传播

中图分类号:TV139.2 **文献标志码:**A **DOI:**10.16483/j.issn.1005-9865.2022.01.001

Study on wave propagation over sinusoidally varying topography

TENG Bin, CUI Jie

(State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: Based on the potential flow theory, the propagation of water waves over finite-length sinusoidal periodic terrain is studied by using a frequency-domain boundary element method. The grid convergence analysis and the comparison with the experimental results of the physical model are carried out to verify the accuracy of the numerical model. The influence of the length of sinusoidal terrain and the amplitude of topographic fluctuation on the reflection of water wave and the wave amplitude along the periodic terrain are studied. It is found that the variation of wave reflection coefficient with wave number and the variation of wave amplitude in space are enveloped; at the frequency corresponding to low reflection coefficient near the Bragg resonance region, a very large wave height may appear on the periodic terrain; with the increase of terrain amplitude, the first Bragg resonance band becomes wider and moves to low frequency.

Keywords: reflection coefficient of water waves; Bragg resonance; boundary element method; sinusoidally varying topography; relative amplitude; propagation of water waves

有限水深下波浪传播过程会受到海底地形的影响。周期性的沙纹和沙坝是常见的海岸地形,这些周期地形在很大程度上会影响水波在海岸上的传播。因此,探究周期地形对水波的作用是非常有意义的。

Davies^[1]应用摄动展开法研究了有限长正弦周期地形对水波的反射,发现当水波波长是地形波长的两倍时波浪反射率会显著增加。Heathershaw^[2]通过物理模型试验证实了这一现象。因其类似于固体物理中的布拉格共振现象,故将该现象称为水波的布拉格共振。布拉格共振现象有助于解释沙纹和沙坝的生成机理^[3-4],一些文献^[5-6]还提出了运用人工潜堤来防护海滩的建议。

为探究水波的布拉格共振现象,许多方法被用来研究周期地形对水波的反射问题。对于规则的周期地形,Davies和Heathershaw^[7]利用关于地形的摄动展开方法研究了小幅度起伏周期地形对水波的反射和透射

收稿日期:2021-03-13

基金项目:国家自然科学基金(51879039);国家重点研发计划(2021YFB2601100)

作者简介:滕 斌(1958-),男,教授,主要从事波浪与结构物作用的研究。E-mail: bteng@dlut.edu.cn

问题。该理论可以预测布拉格共振频率,但其计算的反射率在共振点处大于模型试验值,同时存在波能流不守恒的缺陷。Mei^[3]利用多尺度展开法研究了沙坝诱发的布拉格共振现象,计算的反射率与模型试验结果吻合良好。Davies 等^[8]还利用马修方程研究了长波在周期地形上的传播问题,发现当海床波数近似等于水面波数的两倍时,水波与海床发生强烈的相互作用,这时反射系数最大。

对于任意变化的地形,可采用数值方法进行研究。O'Hare 和 Davies^[9]、Cho 和 Lee^[10]将连续的曲面海底地形近似为高度变化的台阶地形,然后将台阶上的速度势按特征函数进行展开,运用传输矩阵和旋转矩阵联立相邻台阶的波浪场,以此求解了水波在周期地形上的传播问题,计算了周期地形对水波的反射。Kirby^[11]推导出一种扩展的缓坡方程,以此研究了带有坡度的海底起伏地形上的水波现象。Hsu 等^[12]利用一种新的缓坡方程方法 (EEMSE),研究了人工系列潜堤引起的水波布拉格共振现象。Liu 等^[13]采用修正缓坡方程方法 (MMSE) 研究了正弦地形上的波浪反射问题。Dalrymple 等^[14]采用边界元方法计算了 Davies 和 Heathershaw^[1, 7]试验中周期地形对水波的反射,研究了正向和斜向波浪入射下周期地形上的反射系数,该方法不受海底地形坡度和起伏高度的限制,计算结果与 Mei^[3]的多尺度展开法和试验结果吻合良好。Liu 等^[15]采用高阶谱方法研究了布拉格共振下的波一波间的相互作用,给出了布拉格共振发生的三种波浪与海底间的非线性相互作用条件。

下文应用基于势流理论的频域高阶边界元方法^[16],计算了正弦周期地形对水波的作用。该方法以拉普拉斯方程为控制方程,对地形不做任何近似简化,准确描述海底地形变化,可应用于任意的海底坡度和起伏高度。应用该方法系统地研究了正弦周期地形个数、地形高度对反射系数的影响,以及对应于高反射率和低反射率波浪频率下波面高度的沿程分布,发现了一些新的波浪特征和现象。

1 数学模型与方法

考虑水波在多个正弦周期地形上的传播问题,如图 1 所示。建立笛卡尔坐标系, x 轴位于静水面上, z 轴垂直向上, x 坐标零点位于周期地形的起始位置。地形的前后两侧为水平海底,水深分别为 d_1 和 d_2 ,海底方程为

$$z = f(x) = \begin{cases} -d_1 & x \leq 0 \\ -d_1 + a \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) & 0 < x < X_R \\ -d_2 & x \geq X_R \end{cases} \quad (1)$$

式中:局部地形幅度为 a ,周期地形波长为 λ ,总的地形长度为 X_R 。为描述方便,图 1 中只绘出了两个周期的地形。假设流体不可压缩且无黏无旋,有速度势函数 $\Phi(x, z, t)$ 存在。在小波幅近似下,速度势满足的控制方程和线性边界条件:

$$\nabla^2 \Phi(x, z, t) = 0, \quad f(x) < z < 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad z = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0, \quad z = f(x) \quad (4)$$

式中: g 为重力加速度, t 为时间, $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ 为速度势在边界处的方向导数,边界法向量指出域外为正。考虑左侧入射、频率为 ω 单色波浪的传播问题,速度势中可分离出时间因子 $e^{-i\omega t}$,而将其写为

$$\Phi = \text{Re}[\phi(x, z) e^{-i\omega t}] \quad (5)$$

复速度势 $\phi(x, z)$ 满足的控制方程和边界条件为

$$\nabla^2 \phi(x, z) = 0, \quad f(x) < z < 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\omega^2}{g} \phi, \quad z = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, \quad z = f(x) \quad (8)$$

采用二维边界元模型^[16]求解该问题。取图 1 中所示的流域为研究对象,其中 S_L 、 S_R 、 S_F 、 S_B 分别表示上游辐射边界、下游辐射边界、水面边界和海底边界。上、下游辐射边界 S_L 、 S_R 离开海底地形的距离为 L_H 。

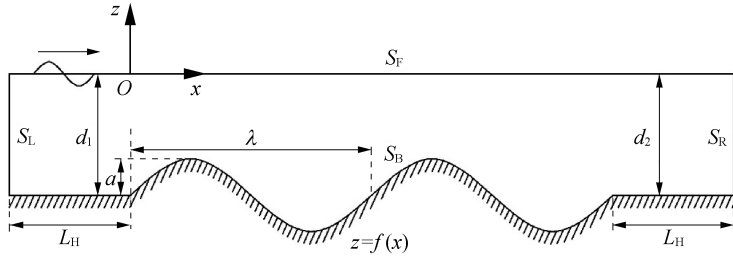


图 1 水底地形示意

Fig. 1 Sketch of two periods of underwater terrain

在左端立面 S_L 处分解速度势为入射势 ϕ_I 与反射势 ϕ_R :

$$\phi_I(x, z) = -\frac{igA}{\omega} \frac{\cosh[k_1(z + d_1)]}{\cosh(k_1 d_1)} e^{ik_1 x} \quad (9)$$

$$\phi_R(x, z) = -\frac{igA}{\omega} \left\{ R_0 \frac{\cosh[k_1(z + d_1)]}{\cosh(k_1 d_1)} e^{-ik_1 x} + \sum_{j=1}^{\infty} R_j \cos[\mu_{1j}(z + d_1)] e^{\mu_{1j} x} \right\} \quad (10)$$

式中: A 为入射波波幅, k_1 为水深 d_1 处的波数, 即色散关系 $\omega^2 = gk_1 \tanh(k_1 d_1)$ 的实根; $\mu_{1j} (j = 1, 2, \dots)$ 为色散方程 $\omega^2 = -g\mu_{1j} \tanh(\mu_{1j} d_1)$ 的实根; $R_j (j = 0, 1, 2, \dots)$ 为待定系数, 波浪反射系数为 $K_R = |R_0|$ 。

取 S_L 远离海底起伏段, 可忽略掉反射速度势的非传播模态, 而将其写为:

$$\phi_R(x, z) = R_0 \phi_I(x, z) \quad (11)$$

式中: $\phi_I(x, z) = -\frac{igA}{\omega} \frac{\cosh[k_1(z + d_1)]}{\cosh(k_1 d_1)} e^{-ik_1 x}$ 。反射速度势的舍弃部分为

$$\varepsilon_R(x, z) = -\frac{igA}{\omega} \sum_{j=1}^{\infty} R_j \cos[\mu_{1j}(z + d_1)] e^{\mu_{1j} x} \quad (12)$$

由式(9)和(11), 可得 S_L 处的边界条件:

$$\frac{\partial \phi_I}{\partial n} = -ik_1 \phi_I \quad (13)$$

$$\frac{\partial \phi_R}{\partial n} = ik_1 \phi_R \quad (14)$$

同样, 取 S_R 远离海底起伏段, 忽略非传播模态, 可将透射速度势近似表示:

$$\phi_T(x, z) = T_0 \phi_2(x, z) \quad (15)$$

式中: $\phi_2(x, z) = -\frac{igA}{\omega} \frac{\cosh[k_2(z + d_2)]}{\cosh(k_2 d_2)} e^{ik_2 x}$, k_2 为水深 d_2 处的水波波数, 满足色散关系 $\omega^2 = gk_2 \tanh(k_2 d_2)$,

T_0 为待定系数, 透射系数为 $K_T = |T_0|$ 。同样, 透射势的舍弃部分为

$$\varepsilon_T(x, z) = -\frac{igA}{\omega} \sum_{j=1}^{\infty} T_j \cos[\mu_{2j}(z + d_2)] e^{-\mu_{2j} x} \quad (16)$$

式中: μ_{2j} 为色散方程 $\omega^2 = -g\mu_{2j} \tanh(\mu_{2j} d_2)$ 的实根, $T_j (j = 1, 2, \dots)$ 为待定系数。由式(15), 可得 S_R 处的边界条件:

$$\frac{\partial \phi_T}{\partial n} = ik_2 \phi_T \quad (17)$$

选取 Rankine 源为格林函数:

$$G(x; x_0) = \frac{1}{2\pi} \ln(|x - x_0|) \quad (18)$$

式中: $x = (x, z)$ 和 $x_0 = (x, z)$ 分别为格林函数的场点和源点。对格林函数和速度势应用格林第二定理, 得

到边界积分方程:

$$\alpha \phi(\boldsymbol{x}_0) = \int_{S_F+S_B+S_L+S_R} \left[\frac{\partial G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{x}_0)}{\partial n} \phi(\boldsymbol{x}) - G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{x}_0) \frac{\partial \phi(\boldsymbol{x})}{\partial n} \right] \mathrm{d}s$$

(19)

式中: α 为固角系数。将边界条件代入式(19)后,可得:

$$\begin{aligned} &\alpha \phi(\boldsymbol{x}_0) - \int_{S_B+S_F} \frac{\partial G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{x}_0)}{\partial n} \phi(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}s + \frac{\omega^2}{g} \int_{S_F} G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{x}_0) \phi(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}s - \\ &R_0 \int_{S_L} \phi_1(\boldsymbol{x}) \left[\frac{\partial G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{x}_0)}{\partial n} - ik_1 G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{x}_0) \right] \mathrm{d}s - T_0 \int_{S_R} \phi_2(\boldsymbol{x}) \left[\frac{\partial G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{x}_0)}{\partial n} - ik_2 G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{x}_0) \right] \mathrm{d}s \\ &= \int_{S_L} \phi_1(\boldsymbol{x}) \left[\frac{\partial G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{x}_0)}{\partial n} + ik_1 G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{x}_0) \right] \mathrm{d}s \end{aligned}$$

(20)

将边界离散为三节点单元。使用多项式函数插值三节点上的速度势,然后运用高斯积分法求式(20)中的积分。未知量为:水面和水底的 N 个节点处的速度势,另外加上反射系数 R_0 和透射系数 T_0 。将源点分别布置在水面和水底的各个节点上,以及左、右边界的任一节点上,可建立 $(N+2)$ 个线性方程:

$$[A]_{(N+2) \times (N+2)} \begin{Bmatrix} \{\phi\}_N \\ R_0 \\ T_0 \end{Bmatrix} = \{B\}_{(N+2)}$$

(21)

由此可求得水面、海底边界节点处的速度势,以及反射系数 R_0 和透射系数 T_0 。

2 数值研究

2.1 数值模型的验证

首先以图 1 所示的地形为例,检验边界单元数量和计算域尺寸对计算结果的影响。水底地形由三部分组成:中间为正弦周期地形,前后两侧为等深的水平地形。正弦地形的平均水深和前后水平地形的水深均为 $d=0.312\ 5\ \text{m}$,正弦地形波幅为 $a=0.2\ \text{m}$,正弦地形波长为 $\lambda=1\ \text{m}$,正弦地形总长度为 $X_R=10\ \text{m}$ (波形个数为 $n=10$)。

表 1 是单元尺度对反射系数 K_R 影响的研究。计算中采用了四种网格,网格单元的密度分别为:网格一,30 单元/m;网格二,60 单元/m;网格三,120 单元/m;网格四,240 单元/m。正弦地形前后水平地形的长度与水深比均为 $L_H/d=16$ 。可以发现,当 $kd \leq 2.5$ 时由网格二和网格三计算的结果与网格四的结果直到小数点后第四数字都是相同的。而当 $kd > 2.5$ 时,计算结果的相对误差则明显增加。误差增加的主要原因是:随 kd 增加,水波波长减小,在网格尺寸不变的情况下计算精度下降。文中, $k\lambda/\pi$ 的最大取值为 2.5,水深为 $d=0.312\ 5\ \text{m}$,正弦地形波长为 $\lambda=1\ \text{m}$,此时 $kd < 2.5$ 。所以下文的算例均使用网格二。

表 1 各网格下的波浪反射率 ($a/d=0.64, n=10$)

Tab. 1 Reflection coefficients computed by different meshes ($a/d=0.64$ and $n=10$)

kd	网格一 30 单元/m	网格二 60 单元/m	网格三 120 单元/m	网格四 240 单元/m
0.2	0.004 02	0.004 01	0.004 01	0.003 91
0.4	0.015 14	0.015 13	0.015 13	0.015 05
0.6	0.039 74	0.039 71	0.039 72	0.039 67
0.8	0.117 60	0.117 50	0.117 49	0.117 48
1.0	0.676 50	0.676 80	0.677 09	0.677 29
1.5	0.037 71	0.037 66	0.037 64	0.037 63
2.0	0.012 91	0.012 91	0.012 91	0.012 91
2.5	0.004 88	0.004 89	0.004 90	0.004 91
3.0	0.000 76	0.000 73	0.000 71	0.001 54

表 2 是计算域大小对反射系数影响的研究。计算中分别选取了水平地形长度与水深比 $L_H/d = 1.0, 2.0, 5.0$ 和 10.0 的四种情况。网格密度采用上述网格二的划分方式,即 60 单元/m。可以发现,当 $kd \leq 2.5$ 时, $L_H/d = 5$ 下的计算结果与 $L_H/d = 10$ 的结果直到小数点后四位数字都是相同的;当 $kd > 2.5$ 时, $L_H/d = 5$ 的计算结果与 $L_H/d = 10$ 的结果相比直到小数点后三位数字都是相同的。在本文的计算中,考虑到要分析水平地形上的水波,故将前后水平地形的长度设置为 $L_H = 5\text{ m}$ ($L_H/d = 16.0$),此时水平地形长度已经可以满足计算精度的需求。

表 2 水平段长度对波浪反射系数的影响 ($a/d=0.64, n=10$)

Tab. 2 Reflection coefficients computed with different lengths of left and right horizontal sections ($a/d=0.64$ and $n=10$)				
kd	$L_H/d = 1$	$L_H/d = 2$	$L_H/d = 5$	$L_H/d = 10$
0.2	0.004 00	0.004 01	0.004 00	0.004 01
0.4	0.015 10	0.015 12	0.015 13	0.015 12
0.6	0.039 68	0.039 71	0.039 71	0.039 71
0.8	0.117 53	0.117 51	0.117 49	0.117 50
1.0	0.676 76	0.676 79	0.676 81	0.676 81
1.5	0.036 82	0.037 62	0.037 64	0.037 66
2.0	0.011 32	0.012 96	0.012 91	0.012 90
2.5	0.003 18	0.005 09	0.004 86	0.004 87
3.0	0.000 53	0.000 77	0.000 68	0.000 82

最后,将本模型结果与 Heathershaw^[2] 的物理模型试验结果做了对比,以验证本模型的正确性。正弦地形的平均水深和前后水平地形的水深为 $d=0.312\text{ 5 m}$,正弦地形波幅为 $a=0.05\text{ m}$,正弦地形波长为 $\lambda=1\text{ m}$,正弦地形总长度为 $X_R=10\text{ m}$ (波形个数为 $n=10$)。计算网格采用上述网格二的方式划分,地形前后的水平段长度均为 $L_H=5\text{ m}$ 。图 2 为计算与试验结果的对比。可见,本文边界元法计算的结果与物理模型试验吻合良好,可用于研究周期地形上的波浪传播问题。

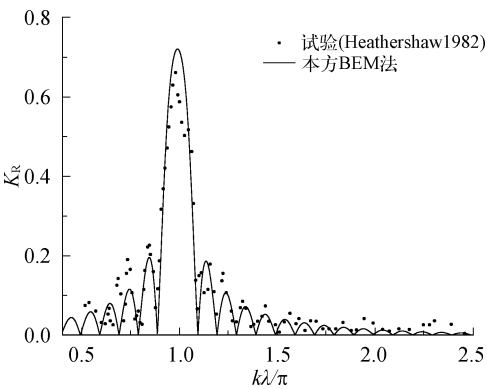


图 2 与 Heathershaw 物理模型试验结果的对比 ($a/d=0.16, n=10$)
Fig. 2 Comparison with Heathershaw's model test ($a/d=0.16$ and $n=10$)

2.2 正弦地形幅度对波浪反射的影响

图 3 是正弦地形幅度对波浪传播影响的对比研究。正弦地形的平均水深和前后水平地形的水深为 $d=0.312\text{ 5 m}$,正弦地形波长为 $\lambda=1\text{ m}$,正弦地形总长度为 $X_R=20\text{ m}$ (波形个数为 $n=20$),正弦地形波幅分别为 $a=0.05\text{ m}, 0.10\text{ m}$ 和 0.20 m ($a/d=0.16, 0.32, 0.64$)。

由图 3 中的 BEM 法的结果可以看到,反射系数随波数呈周期性的波动,存在着多个零反射系数的波数点,反射系数的包络线随地形波动幅度的增大而上升。在相对波数 $k\lambda/\pi=1.0$ 附近存在一较宽的波数带,带内反射系数接近于 1。另外,从图 3(c) ($a/d=0.64$ 算例)可以明显看出在 $k\lambda/\pi=1.8$ 附近,还存在反射

系数较大的波数带。这些波数带对应于无限长正弦地形上的第一和第二布拉格共振区。当波动地形幅度增大时,高反射系数区域的宽度增加,中心频率向低频区移动,这与 Liu 等^[15]指出的随海底波动幅度增强而出现的共振频率下移现象是一致的。当地形波幅为 $a/d = 0.16$ 时(图 3(a)),高阶的布拉格共振区域没有出现。其原因是当波浪频率较大时,水波波长变短,海底地形处于深水区,对波浪传播不再有影响。

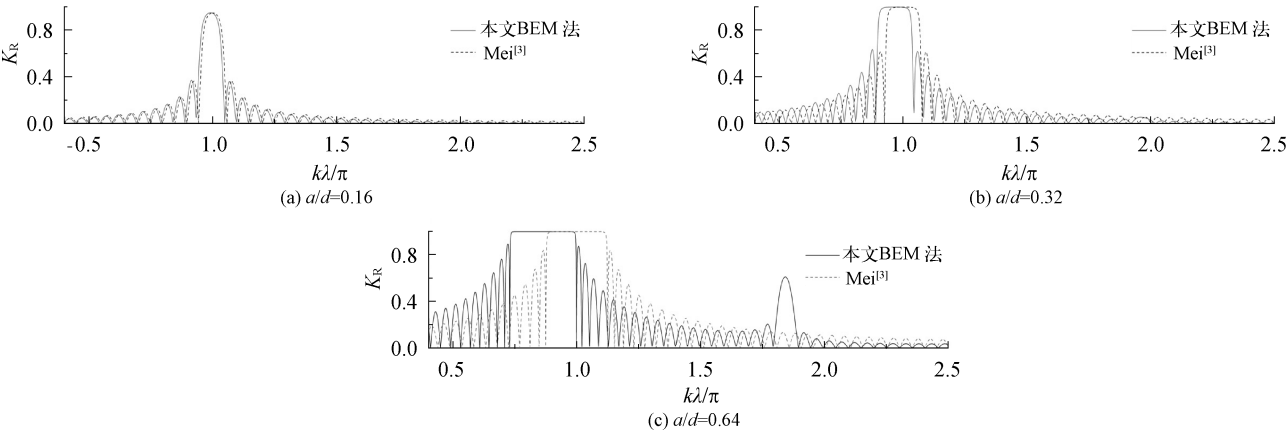


图 3 地形幅度对波浪反射的影响 ($n = 20$)
Fig. 3 Influence of sea bed amplitude on the wave reflection ($n = 20$)

图 3 中同时绘制了按照 Mei^[3]的理论解计算得到的结果。从图中可以看到,当地形波幅较小 $a/d = 0.16$ 时(图 3(a)),BEM 的结果与 Mei 的理论解吻合良好;而当波幅增大为 $a/d = 0.32$ 和 0.64 时(图 3(b)、(c)),Mei 的理论解无法计算出布拉格共振带下移、以及第二共振区的结果。由此可以发现,对于地形波幅较大的情况,Mei 的理论解有一定限制。而本文的 BEM 法可以用于计算任意的水底地形,对地形波幅的大小没有限制。

2.3 正弦地形个数对波浪反射的影响

图 4 是正弦地形个数对水波反射率的影响。正弦地形的平均水深和前后水平地形的水深均仍为 $d = 0.3125\text{ m}$,正弦地形波长为 $\lambda = 1\text{ m}$,正弦地形波幅为 $a = 0.2\text{ m}$ ($a/d = 0.64$)。图 4 分别为波浪在长度分别为 5 m 、 10 m 和 20 m 正弦地形(波形个数为 $n = 5$ 、 10 和 20)上反射系数随相对波数 $k\lambda/\pi$ 的变化关系。从三种情况的对比中可以看出,在第一个布拉格共振带附近,反射系数的外包络基本一致,第一个布拉格共振带的宽度和反射系数大小基本上不随海床地形长度而变化,但反射系数波动周期随海底地形长度而变化。海底地形较长(个数较多)的情形,反射系数的波动周期较短,反射系数的波动周期与海底周期地形长度成倒数关系($\propto 1/X_R$)。第二个布拉格共振带的宽度随海床地形长度的减少而变宽,反射系数随海床地形长度的减少而减小。

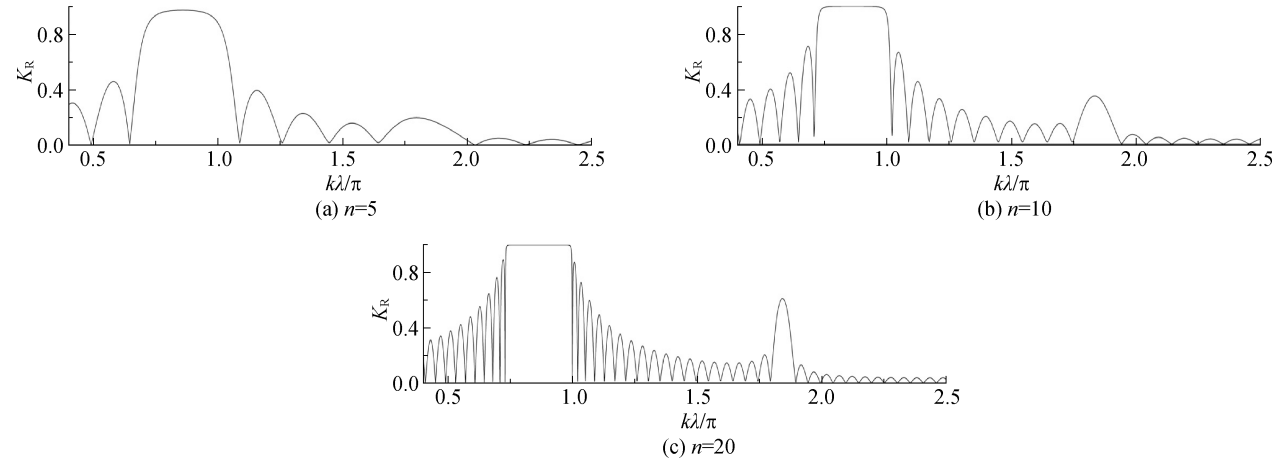


图 4 正弦地形个数对波浪反射的影响
Fig. 4 Influence of sea bed terrain number on the wave reflection

2.4 波幅的沿程分布

对波浪在正弦地形上传播过程中的波幅分布进行分析。波浪从左侧入射,正弦地形的平均水深和前后水平地形的水深均为 $d = 0.3125 \text{ m}$,正弦地形波幅为 $a = 0.2 \text{ m}$ ($a/d = 0.64$),正弦地形波长为 $\lambda = 1 \text{ m}$,正弦地形总长度为 $X_R = 20 \text{ m}$ (波形个数为 $n = 20$)。设入射波的波幅为 A_0 ,沿程的波动幅值为 $A(x)$ 。

2.4.1 布拉格共振区域内的波浪传播

图 5 为 $k\lambda/\pi = 0.860$ 位于第一共振区域内,波幅 $A(x)/A_0$ 的沿程变化。如图 3(c) 所示,该频率下反射率为 1。因反射系数为 1,在上游的水平地形上形成了由入射波与反射波叠加而成的驻波,其波节的间距为入射波波长的一半;在下游地形上,波幅为零,没有波浪通过。在正弦地形上,波幅 $A(x)/A_0$ 也呈立波状,存在多个波幅为零的节点,波幅 $A(x)/A_0$ 的包络沿程从 1 衰减到 0。同时应该注意到,波幅在周期地形上并非呈线性衰减。

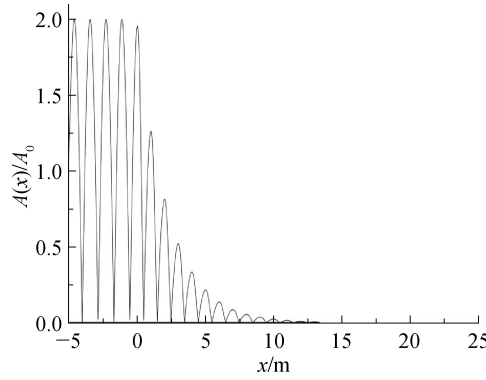


图 5 $k\lambda/\pi = 0.860$ 下波面幅值的沿程分布

Fig. 5 Distribution of wave amplitude along the x coordinate ($k\lambda/\pi = 0.860$)

2.4.2 布拉格共振区域外高反射区的波浪传播

图 6 是布拉格共振区域外高反射区 $k\lambda/\pi = 0.696, 0.721, 1.007, 1.035$ 处, $A(x)/A_0$ 的沿程变化。 $k\lambda/\pi = 0.696$ 和 0.721 为第一布拉格共振区左侧的第二和第一个反射率为峰值的位置; $k\lambda/\pi = 1.035$ 和 1.007 为第一布拉格共振区右侧的第一和第二个反射率为峰值的位置,如图 3(c) 所示。

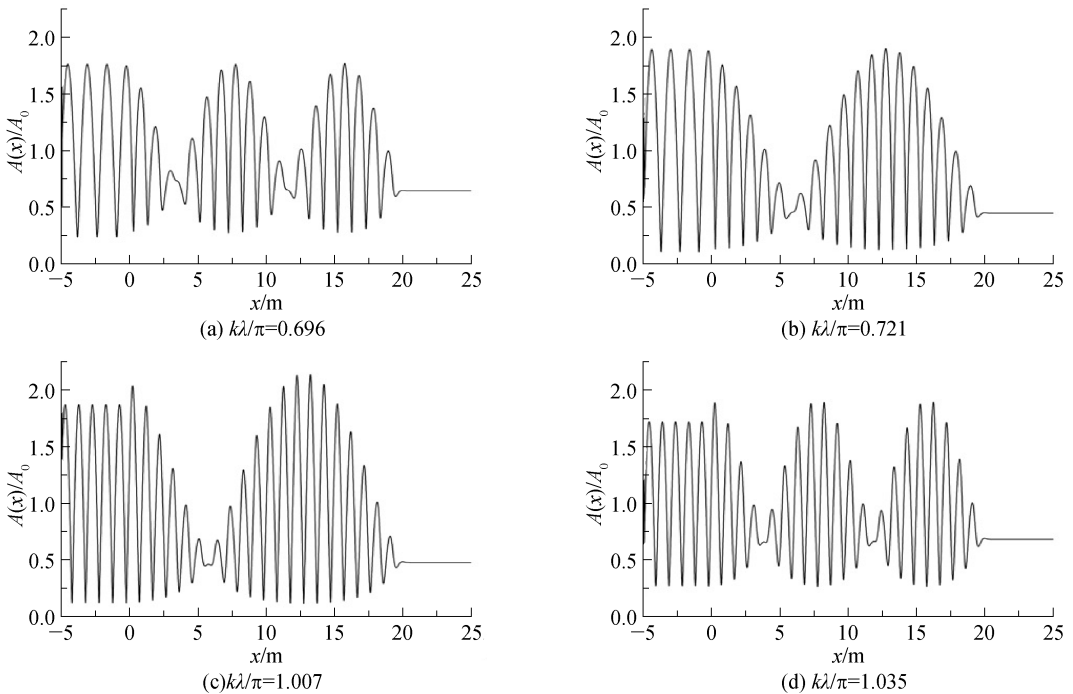


图 6 波面幅值沿水平空间 x 的分布 ($k\lambda/\pi = 0.696, 0.721, 1.007, 1.035$)

Fig. 6 Distribution of wave amplitude along the x coordinate ($k\lambda/\pi = 0.696, 0.721, 1.007, 1.035$)

可以发现,由于反射系数小于 1,左侧水平地形上的波浪为入射波浪与不完全反射波浪的叠加,右侧水平地形上为波幅减小了的稳定透射波浪。在正弦地形上,波幅 $A(x)/A_0$ 除了自身波动外,还存在波动的包络。在左、右第一个反射率峰值处,存在 1 个包络;而在左、右第二个反射率峰值处,存在 2 个包络。

2.4.3 布拉格共振区域外低反射区的波浪传播

图 7 是布拉格共振区外低反射区 $k\lambda/\pi = 0.708, 0.729, 0.999, 1.021$ 处, $A(x)/A_0$ 的沿程变化。 $k\lambda/\pi = 0.708$ 和 0.729 为第一布拉格共振区左端第二和第一个反射率为零的位置; $k\lambda/\pi = 0.999$ 和 1.021 为第一布拉格共振区右侧第一和第二反射率为零的位置(如图 3(c)所示)。

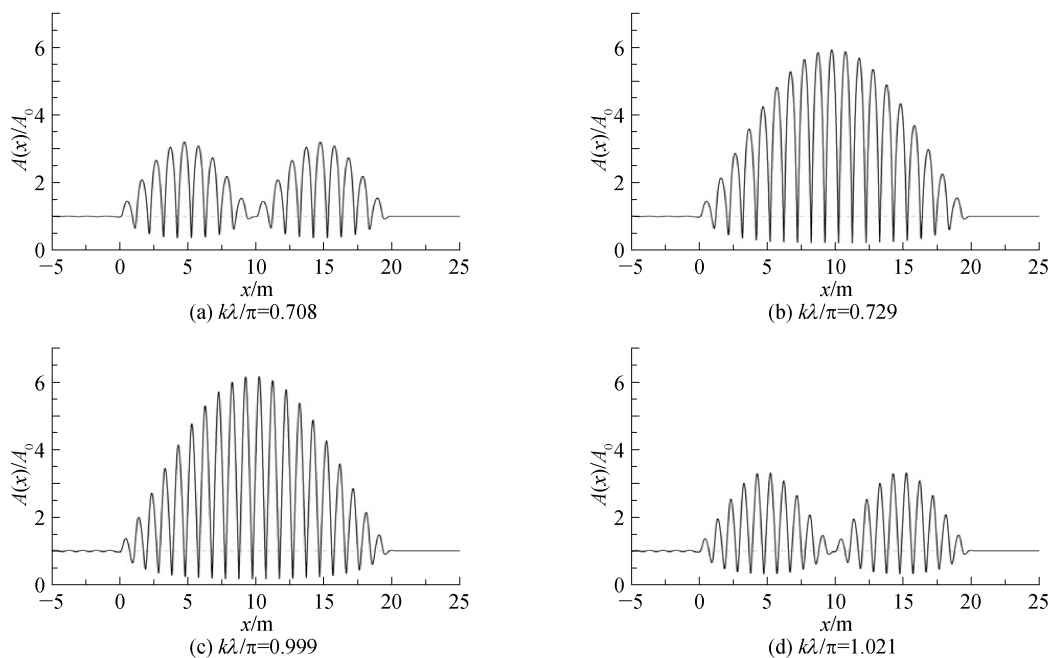


图 7 波面幅值沿水平空间 x 的分布 ($k\lambda/\pi = 0.708, 0.729, 0.999, 1.021$)

Fig. 7 Distribution of wave amplitude along the x coordinate ($k\lambda/\pi = 0.708, 0.729, 0.999, 1.021$)

在低反射区,反射系数接近于零。左侧和右侧水平地形处的波幅近似为 1,正弦地形上($0 \leq x \leq 20$)波幅 $A(x)/A_0$ 呈现出包络形状,并在包络线内振荡。在第一个布拉格共振区左、右侧第一反射率为零的频率处,出现 1 个包络,最大波幅为入射波幅的 6 倍左右。而在第一个布拉格共振区左、右侧第二反射率为零的频率处,最大波幅为入射波幅的 3 倍左右。

当入射波波幅不是很小时,上述的周期地形上的波幅增大现象可能导致强烈的水面波动,以及波浪的破碎,实际计算中需加以注意。

3 结 语

利用基于势流理论的频域边界元方法,对正弦地形上的波浪传播问题做了数值计算研究,得到如下结论:

1) 边界元方法可以被用来研究任意周期地形上的水波传播问题,对水底地形的波动幅度没有限制。当水底地形幅度较小时,边界元方法得到的结果与 Mei 的理论解较为吻合。随海底地形波动幅度的增加,边界元方法得到的布拉格共振区域明显向低频移动,这是 Mei 的理论所无法准确预测的。

2) 海底地形长度(或个数)对反射系数的外包络影响不大,但对反射系数的振荡周期有显著的影响,反射系数的振荡周期与海底地形长度成倒数关系。

3) 在非布拉格共振区域,周期地形上的波浪高度沿程空间分布呈现包络形状。当频率位于布拉格共振区域边缘且反射率为零时,包络中的最大波幅远大于入射波波幅。在文中的算例计算中,最大波幅可达到入射波幅的 6 倍左右。

参考文献:

- [1] DAVIES A G. The reflection of wave energy by undulations on the seabed[J]. *Dynamics of Atmospheres and Oceans*, 1982,6(4): 207-232.
- [2] HEATHERSHAW A D. Seabed-wave resonance and sand bar growth[J]. *Nature*, 1982,296(5855): 343-345.
- [3] MEI C C. Resonant reflection of surface water waves by periodic sandbars[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1985,152: 315-335.
- [4] HEATHERSHAW A D, DAVIES A G. Resonant wave reflection by transverse bedforms and its relation to beaches and offshore bars[J]. *Marine Geology*, 1985,62(3): 321-338.
- [5] MEI C C, HARA T, NACIRI M. Note on Bragg scattering of water waves by parallel bars on the seabed[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1988,186: 147-162.
- [6] BAILARD J A, DEVRIES J W, KIRBY J T. Considerations in using Bragg reflection for storm erosion protection[J]. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 1992,118(1): 62-74.
- [7] DAVIES A G, HEATHERSHAW A D. Surface-wave propagation over sinusoidally varying topography[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1984,144: 419-443.
- [8] DAVIES A G, GUAZZELLI E, BELZONS M. The propagation of long waves over an undulating bed[J]. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 1989,1(8): 1331-1340.
- [9] O'HARE T J, DAVIES A G. A new model for surface wave propagation over undulating topography[J]. *Coastal Engineering*, 1992,18(3): 251-266.
- [10] CHO Y S, LEE C. Resonant reflection of waves over sinusoidally varying topographies[J]. *Journal of Coastal Research*, 2000,16(3): 870-876.
- [11] KIRBY J T. A general wave equation for waves over rippled beds[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1986,162(1): 171-186.
- [12] HSU T W, TSAI L H, HUANG Y T. Bragg scattering of water waves by multiply composite artificial bars[J]. *Coastal Engineering Journal*, 2003,45(2): 235-253.
- [13] LIU H W, LI X F, LIN P. Analytical study of Bragg resonance by singly periodic sinusoidal ripples based on the modified mild-slope equation[J]. *Coastal Engineering*, 2019,150(AUG.): 121-134.
- [14] DALRYMPLE R A, KIRBY J T. Water waves over ripples[J]. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, 1986,112(2): 309-319.
- [15] LIU Y, YUE D K P. On generalized Bragg scattering of surface waves by bottom ripples[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1998,356: 297-326.
- [16] 滕斌, 侯志莹. 变化地形上波浪传播模拟的二维 BEM 模型[C]//第十九届中国海洋(岸)工程学术讨论会文集. 北京: 海洋出版社, 2019. (TENG B, HOU Z Y. Two-dimensional BEM model for wave propagation on changing terrain[C]//Proceedings of the 19th China Ocean and Coastal Engineering Academic Conference. Beijing: Ocean Press, 2019. (in Chinese))