

奇数情形 Goldbach 问题研究

陈景润 王天泽

(中国科学院数学研究所, 北京) (河南大学数学系, 开封)

关键词 L -函数、素数、特征

1742 年 Goldbach 在与 Euler 的几次通信中提出了每一个偶数 $N_1 \geq 6$ 都能够表示成为两个奇素数的和。这就是现在熟知的 Goldbach 猜想。多年来, 许多数学工作者为之付出了艰辛的劳动, 但至今仍未得到解决。目前, 关于这一问题的最好结果是: 陈景润在 1966 年得到的每一个大偶数都能够表示成为一个素数和一个不超过两个素数的乘积之和, 以及 Vinogradov 在 1937 年得到的每一个奇数 $N \geq N_0$ 都能够表示成为三个素数的和。关于后者, Borozdkin^[1] 在 1956 年又宣布了 N_0 可以取为 $e^{e^{16.033}} \approx 10^{4008660}$, 但至今尚未见到其证明。最近, 我们通过 L -函数的零点分布、算术数列中的素数分布等问题的进一步研究, 证明了 N_0 可以取为 $e^{e^{11.503}} \approx 10^{43001}$ 。这使得 Borozdkin 的结果得到了较大的改进。

一、 L -函数例外零点的界限估计问题

设 x 是模 q 的任一特征, $s = \sigma + it$ 是复数, 令 $\mathcal{L}_q(s) = \prod_{\chi \bmod q} L(s, \chi)$, 则对于 $\mathcal{L}_q(s)$ 的例外零点 β_1 , 我们首次得到了一个不包含任何未定常数的明确上界估计, 证明了¹⁾

定理 1 设 $x \geq e^{e^{11.503}}$ 是一个实数, $3 \leq q \leq (\log x)^3$ 是整数, χ_1 是模 q 的原特征, $\beta_1 = 1 - \delta_1 \geq 1 - \frac{0.1077}{\log q}$ 是 $L(s, \chi_1)$ 的一个零点, 则我们有

$$\delta_1 \geq \frac{1}{240 \log \log x}.$$

二、算术数列中的素数分布问题

关于这一问题的最简单而又最重要的结果是

$$\psi(x; q, l) = \sum_{\substack{n \equiv l \pmod{q} \\ n \leq x}} \Lambda(n) = \frac{x}{\varphi(q)} - \frac{E_1 x^{\beta_1} \chi_1(l)}{\beta_1 \varphi(q)} + O(x e^{-C_1 \sqrt{\log x}}),$$

其中 $\Lambda(n)$ 是 Mangoldt 函数, C_1 是依赖于 q 的常数。当存在模 q 的“例外”特征 χ_1 使得 $L(s, \chi_1)$ 有“例外”零点 β_1 时 $E_1 = 1$, 否则 $E_1 = 0$ 。目前, 关于 C_1 对 q 的依赖关系以及 O 中蕴含常数的估值都未能得到。当 l 经过模 q 的简化剩余系时, 我们对全部 $\varphi(q)$ 个 $\psi(x; q, l)$ 的某种加权和做了详细的研究, 对 q “较小”和“较大”两种情况分别得出了一个明确的余项估计, 证明了^{2) 3)}。

本文 1988 年 3 月 23 日收到。

- 1) 陈景润、王天泽, 关于 L -函数例外零点的一个定理, 数学学报(待发表)。
- 2) 陈景润、王天泽, 关于算术数列中的素数分布, 中国科学(待发表)。
- 3) 陈景润、王天泽, 关于哥德巴赫问题, 数学学报(待发表)。

定理 2 设 $x \geq e^{11.5}$ 是一个实数, a, q 是正整数并且满足 $(a, q) = 1$, 则当 $1 \leq q(\leq \log x)^4$ 时我们有

$$\left| \sum_{l=1}^q e\left(\frac{al}{q}\right) \phi(x; q, l) - \frac{\mu(q)x}{\varphi(q)} + \frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(a)\tau(\tilde{\chi})x^{\tilde{\beta}}}{\tilde{\beta}\varphi(q)} \right| \leq 0.13xq^{\frac{1}{4}}(\log x)^{-10.5}.$$

当 $(\log x)^3 \leq q \leq (\log x)^{6.5}$ 时我们有

$$\left| \sum_{l=1}^{q'} e\left(\frac{al}{q}\right) \phi(x; q, l) - \frac{\mu(q)x}{\varphi(q)} + \frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(a)\tau(\tilde{\chi})x^{\tilde{\beta}}}{\tilde{\beta}\varphi(q)} \right| \leq 0.00652xq^{\frac{1}{4}}(\log x)^{-7.5},$$

其中 $\sum_{l=1}^{q'}$ 表示 $\sum_{\substack{l=1 \\ (l, q)=1}}^q$, $\mu(n)$ 表示 Möbius 函数, $\tau(\tilde{\chi}) = \sum_{h=1}^q \tilde{\chi}(h)e\left(\frac{h}{q}\right)$, 当存在模 q 的

实特征 $\tilde{\chi}$ 使得 $L(s, \tilde{\chi})$ 有实零点 $\tilde{\beta} \geq 1 - \frac{0.1077}{\log q}$ 时 $\tilde{E} = 1$, 否则 $\tilde{E} = 0$.

三、主要结果的证明

令 $r = \log N$, $\tau = Nr^{-2.5}$, $I(N)$ 代表将 N 表示成为 $N = p_1 + p_2 + p_3$ 的形式的表法个数, 则熟知 $I(N) = \int_{-\tau^{-1}}^{1-\tau^{-1}} S^3(\alpha)e(-N\alpha)d\alpha$, 其中 $S(\alpha) = \sum_{p \leq N} e(p\alpha)$. 由于对任何实数 $\alpha \in [-\tau^{-1}, 1 - \tau^{-1}]$ 都有

$$\alpha = \frac{a}{q} + z, (a, q) = 1, 1 \leq q \leq \tau, |z| \leq \frac{1}{q\tau}.$$

我们用 E_1 表示满足 $1 \leq q \leq r^3$ 的点 α 所组成的集合, 用 E_2 表示满足 $r^3 \leq q \leq r^{6.5}$ 的点 α 所组成的集合, 再令

$$E_3 = [-\tau^{-1}, 1 - \tau^{-1}] - E_1 - E_2, I_i(N) = \int_{E_i} S^3(\alpha)e(-N\alpha)d\alpha, 1 \leq i \leq 3,$$

则有
$$I(N) = \sum_{i=1}^3 I_i(N).$$

当 $\alpha \in E_1$ 时, 由于 $r^{6.5} \leq q \leq Nr^{-2.5}$, 所以由文献[2]中的定理 1 可知当 $N \geq e^{20000}$ 时有 $|S(\alpha)| \leq 2.94Nr^{-2.5}\log r$, 由此易得

$$|I_1(N)| \leq (\max_{\alpha \in E_1} |S(\alpha)|) \int_0^1 |S(\alpha)|^2 d\alpha \leq (2.94Nr^{-2.5}\log r)\pi(N) \leq 0.31N^2r^{-3}.$$

当 $\alpha \in E_2$ 时, 由于 $r^3 \leq q \leq r^{6.5}$, 所以使用定理 2 我们可以证明当 $N \geq e^{11.503}$ 时有 $|S(\alpha)| \leq 0.05Nr^{-2}$, 故有 $|I_2(N)| \leq (0.05Nr^{-2})\pi(N) \leq 0.075N^2r^{-3}$.

对于 $I_3(N)$, 使用定理 1 和定理 2 我们可以证明当 $N \geq e^{11.503}$ 时有

$$I_3(N) \geq 0.657N^2r^{-3}.$$

于是我们就证明了如下的

定理 3 每一个奇数 $N \geq e^{11.503}$ 都能够表示成为三个素数的和。

参 考 文 献

- [1] Бороздкий, Гр. Гр. Всесоюзного Мат. Съезда СССР, 1(1956). 3.
- [2] Chen Jingrun, *Scientia Sinica*, 28(1985), 449-458.