

基于相似性原理的正交各向异性板弯曲 Hamilton 体系*

姚伟岸 苏 滨 钟万颢

(大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116023)

摘要 基于平面弹性与板弯曲之间的相似性原理及混合能变分原理, 进一步将 Hamilton 体系引入到正交各向异性板弯曲问题之中. 于是, 与平面弹性问题相类似, 许多有效的数学物理方法如分离变量法和本征函数展开法等可应用于正交各向异性板弯曲问题. 从而可直接给出矩形板问题的分析解, 扩大了解析求解的范围. 此方法与传统的半逆法有着本质上的区别, 作为其应用, 对两侧边固支的正交各向异性板进行了具体的分析与求解, 结果表明此方法是十分有效和精确的.

关键词 板弯曲 正交各向异性 Hamilton 体系 相似性

板弯曲的经典控制方程是高阶偏微分方程, 它难于解析求解. 传统的 Naiver 法、Levy 法等半逆解法, 对对边为简支的各向同性板是非常有效的^[1], 但对复杂一点的边界条件则难于应用, 尤其是对各向异性问题. 据作者所知, 目前对各向异性板弯曲问题还没有一个十分有效的方法用于求解其分析解^[2]. 传统的半逆法都属于单类变量的 Lagrange 体系, 因其缺乏理性而使其求解受到很大的限制. 其实平面弹性问题可以通过引入对偶变量而进入辛几何空间, 即在 Hamilton 体系下进行求解, 从而突破 Lagrange 体系的局限性^[3,4].

平面弹性问题的 Airy 应力函数与板弯曲的挠度均满足重调和函数, 它们之间存在相似性^[5]. 仿照平面弹性 Hamilton 体系, 文献[6,7]给出了各向同性板弯曲经典理论的另一套基本方程与求解方法, 并给出一个求解矩形及环扇形板在各种边界条件下分析解的有效方法, 突破了传统半逆解法的限制, 为板弯曲问题的分析求解开拓出一条新路. 本文进一步将 Hamilton 求解体系应用于正交各向异性板弯曲问题, 通过分离变量、本征函数展开等直接法进行求解, 并对两侧边固支的正交各向异性板进行了具体求解.

1 相似性原理与类 H-R 变分原理

设板的内力正向如图 1 所示, 则板弯曲的平衡方程为

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0, \quad (1b)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q = 0. \quad (1c)$$

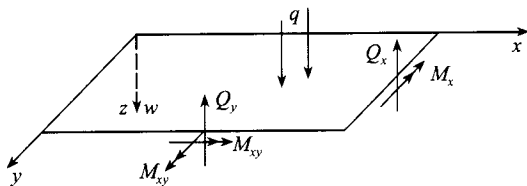


图1 内力正向规定示意图

荷载 q 可以用一个特解通过叠加原理预先处理, 因此先考虑 $q = 0$ 的齐次方程. 与平面弹

性的位移 u, v 对应, 板弯曲有弯矩函数向量 ϕ_x, ϕ_y . 弯矩与弯矩函数的关系为

$$M_y = \partial \phi_x / \partial x, \quad M_x = \partial \phi_y / \partial y, \quad 2M_{xy} = \partial \phi_x / \partial y + \partial \phi_y / \partial x. \quad (2)$$

代入验证即知其满足(1c)式对应的齐次方程.

曲率-挠度关系为

$$\kappa_y = \partial^2 w / \partial y^2, \quad \kappa_x = \partial^2 w / \partial x^2, \quad \kappa_{xy} = -\partial^2 w / \partial x \partial y. \quad (3)$$

记曲率 $\kappa = \{\kappa_y, \kappa_x, \kappa_{xy}\}^T$ 与弯矩 $m = \{M_y, M_x, 2M_{xy}\}^T$ 的关系为

$$\kappa = C m \text{ 或 } m = C^{-1} \kappa. \quad (4)$$

对正交各向异性板

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

将板弯曲的给力边界与给定位移边界分别记作 s_m 和 s_w . 假设边界为直边, 其外法线方向记为 n , 沿周界方向为 s , (n, s) 构成右手系. 用 (ϕ_n, ϕ_s) 记述其弯矩函数, 则

$$Q_n = \frac{\partial M_n}{\partial n} - \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi_s}{\partial n \partial s} - \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial s^2} \right). \quad (6)$$

板弯曲的给力边界条件为给定法向弯矩及等价剪力 $\bar{M}_n$ 及 $\bar{V}_n$:

$$(M_n =) \partial \phi_s / \partial s = \bar{M}_n, \quad (V_n = Q_n - \partial M_{ns} / \partial s =) -\partial^2 \phi_n / \partial s^2 = \bar{V}_n. \quad (7)$$

注意到(7)式中只含有沿边界 s 的微商, 因此可以积分. 积分后在边界 s_m 上

$$\phi_s = \bar{\phi}_s = \int_{s_0}^s \bar{M}_n ds' + a_1, \quad \phi_n = \bar{\phi}_n = \int_{s_0}^s (s' - s) \bar{V}_n ds' + a_0 + a_2 s, \quad (8)$$

其中 a_0, a_1, a_2 为待定常数, 其余皆为已知函数.

s_w 上的给定位移边界条件可写为

$$\kappa_{ns} = -\partial^2 w / \partial n \partial s = \bar{\kappa}_{ns}, \quad \kappa_s = \partial^2 w / \partial s^2 = \bar{\kappa}_s. \quad (9)$$

在 s_w 上, 在与平面弹性的相似中, ϕ_n, ϕ_s 相当于 u_n, u_s , 即法向与切向位移; 而 κ_s, κ_{ns} 相当于法向正应力 σ_n 与剪应力 τ_{ns} , 因此板弯曲的给力和给定位移边界条件分别相当于平面弹性的给定位移和给力边界条件.

根据板弯曲与平面弹性的相似性原理, 可以给出与平面弹性相类似的各种变分原理^[6~9]. 如与平面弹性问题的 Hellinger-Reissner 变分原理类似, 可写出板弯曲的类 H-R 变分原理

$$\delta \Pi_m = \delta \iint_{\Omega} \left[\kappa_x \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \kappa_y \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \kappa_{xy} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial x} + \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right) - U_0(\kappa_y, \kappa_x, \kappa_{xy}) \right] dx dy = 0, \quad (10)$$

其中 $U_0(\boldsymbol{\kappa})$ 为应变能密度,

$$U_0(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\kappa} = \frac{1}{2} D_{11} \kappa_y^2 + \frac{1}{2} D_{22} \kappa_x^2 + D_{12} \kappa_x \kappa_y + \frac{1}{2} D_{66} \kappa_{xy}^2. \quad (11)$$

执行 $\delta \Pi_m = 0$, 其中 $\phi_x, \phi_y, \kappa_y, \kappa_x, \kappa_{xy}$ 视作独立变量, 即可导出弯矩-曲率关系

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} &= M_x = \frac{\partial U_0}{\partial \kappa_x}, \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial x} &= M_y = \frac{\partial U_0}{\partial \kappa_y}, \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial x} + \frac{\partial \phi_x}{\partial y} &= 2M_{xy} = \frac{\partial U_0}{\partial \kappa_{xy}}, \end{aligned} \quad (12)$$

与曲率协调方程

$$\frac{\partial \kappa_y}{\partial x} + \frac{\partial \kappa_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \kappa_x}{\partial y} + \frac{\partial \kappa_{xy}}{\partial x} = 0. \quad (13)$$

2 正交各向异性矩形板基本方程

这里选择 y 为横向, 则 x 坐标模拟为 Hamilton 体系的时间, 即用 $(\cdot)$ 代表 $\partial/\partial x$. 按 Hamilton 体系的常规, 将(10)式对 κ_x 取极小有

$$\kappa_x = (\partial \phi_y / \partial y - D_{12} \kappa_y) / D_{22}, \quad (14)$$

将其代入(10)式整理有

$$\begin{aligned} \delta \iint_{\Omega} \left[\kappa_y \dot{\phi}_x + \kappa_{xy} \dot{\phi}_y - \frac{D_{12}}{D_{22}} \kappa_y \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \kappa_{xy} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right. \\ \left. + \frac{1}{2D_{22}} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{2} D_{66} \kappa_{xy}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{D_{12}^2}{D_{22}} - D_{11} \right) \kappa_y^2 \right] dx dy = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

执行变分, 即可导出 Hamilton 体系的对偶方程组

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{H} \mathbf{v}, \quad (16)$$

其中 $\mathbf{v}$ 与 $\mathbf{H}$ 分别是全状态向量和 Hamilton 算子矩阵

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{D_{12}}{D_{22}} \frac{\partial}{\partial y} & D_{11} - \frac{D_{12}^2}{D_{22}} & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & D_{66} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & -\frac{1}{D_{22}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{D_{12}}{D_{22}} \frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

对方程(16)式, 我们可以采用分离变量法求解, 令

$$\mathbf{v}(x, y) = \boldsymbol{\xi}(x) \cdot \boldsymbol{\Psi}(y), \quad (18)$$

将上式代入(16)式即可得本征方程

$$\mathbf{H} \boldsymbol{\Psi}(y) = \mu \boldsymbol{\Psi}(y). \quad (19)$$

而

$$\xi(x) = \exp(\mu x), \quad (20)$$

这里 μ 是本征值, 待求; $\Psi(y)$ 是本征函数向量, 它还应当满足两侧边相应的边界条件.

对某些边界条件, (19) 式可能存在零本征解, 这一部分可通过完全的理性推导而直接得到, 与具体问题有关. 为写出非零本征解的通解, 首先要求出特征值 λ , 其方程为

$$\det \begin{bmatrix} -\mu & \lambda D_{12}/D_{22} & D_{11} - D_{12}^2/D_{22} & 0 \\ -\lambda & -\mu & 0 & D_{66} \\ 0 & 0 & -\mu & -\lambda \\ 0 & -\lambda^2/D_{22} & \lambda D_{12}/D_{22} & -\mu \end{bmatrix} = 0, \quad (21)$$

展开即得

$$D_{11}\lambda^4 + (2D_{12} + D_{66})\lambda^2\mu^2 + D_{22}\mu^4 = 0. \quad (22)$$

上述特征方程的根 λ 可存在 3 种情况: (i) λ 为不相等的实根; (ii) λ 为两相等的实根; (iii) λ 为 2 对复根. 对应以上 3 种不同情况微分方程组 (19) 的通解有不同的形式. 本文将第 3 种情况为例进行讨论, 而其他 2 种情况可完全类似地进行求解, 这里不展开讨论了.

当 λ 为 2 对复根时, 即

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \quad \lambda_{3,4} = -\alpha \pm i\beta \quad (\alpha > 0, \beta > 0), \quad (23)$$

微分方程组 (19) 相应的通解为

$$\begin{aligned} \phi_x &= A_1 \exp(\alpha\mu y) \cos\beta\mu y + B_1 \exp(\alpha\mu y) \sin\beta\mu y \\ &\quad + C_1 \exp(-\alpha\mu y) \cos\beta\mu y + D_1 \exp(-\alpha\mu y) \sin\beta\mu y, \\ \phi_y &= A_2 \exp(\alpha\mu y) \cos\beta\mu y + B_2 \exp(\alpha\mu y) \sin\beta\mu y \\ &\quad + C_2 \exp(-\alpha\mu y) \cos\beta\mu y + D_2 \exp(-\alpha\mu y) \sin\beta\mu y, \\ \kappa_y &= A_3 \exp(\alpha\mu y) \cos\beta\mu y + B_3 \exp(\alpha\mu y) \sin\beta\mu y \\ &\quad + C_3 \exp(-\alpha\mu y) \cos\beta\mu y + D_3 \exp(-\alpha\mu y) \sin\beta\mu y, \\ \kappa_{xy} &= A_4 \exp(\alpha\mu y) \cos\beta\mu y + B_4 \exp(\alpha\mu y) \sin\beta\mu y \\ &\quad + C_4 \exp(-\alpha\mu y) \cos\beta\mu y + D_4 \exp(-\alpha\mu y) \sin\beta\mu y. \end{aligned} \quad (24)$$

在 $A_i, B_i, C_i, D_i (i=1 \sim 4)$ 中独立的常数只有 4 个, 例如可选择为 A_2, B_2, C_2, D_2 , 代入 (19) 式可得到它们之间的关系. 将 (24) 式代入两侧边边界条件即可得到非零本征值超越方程及相关本征函数向量. 不同的边界条件其本征值及本征函数向量是不同的. 下面就对边固支的边界条件进行讨论, 其他边界条件也可类似地进行求解.

3 两侧边固支板

设 $y = \pm b$ 边皆固支, 即边界条件为

$$\partial\phi_y/\partial y - D_{12}\kappa_y = 0, \quad \kappa_{xy} = 0, \quad \text{当 } y = \pm b \text{ 时}. \quad (25)$$

求解可知 $H\Psi = 0$ 不存在有真实物理意义的解. 因此对于 (25) 式的边界条件可以只讨论非零本征解. 将 (24) 式代入 (25) 式得到关于 A_2, B_2, C_2, D_2 的线性齐次代数方程组, 令其系数行列式为零, 即可得到对边固支板非零本征值的超越方程

$$2\alpha^2[\cos(4\beta b\mu) - 1] + \beta^2 \exp(-4\alpha b\mu)[\exp(4\alpha b\mu) - 1]^2 = 0. \quad (26)$$

对超越方程 (26) 式的求解, 本文采用的是 Newton 迭代解法.

有了本征值,其相应本征解的解析表达式就可得到,而挠度 w_n 则可通过对 $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$ 的进一步积分而得到.

Hamilton 矩阵本征解之间存在共轭辛正交关系,于是任一全状态向量可以用本征函数向量展开

$$\boldsymbol{v} = \sum_{n=1}^{\infty} [f_n \boldsymbol{\Psi}_n \exp(\mu_n x) + f_{-n} \boldsymbol{\Psi}_{-n} \exp(-\mu_n x)].$$

(27)

于是原问题的解为

$$w = \bar{w} + \sum_{n=1}^{\infty} (f_n w_n + f_{-n} w_{-n}),$$

(28)

其中 $\bar{w}$ 为与荷载 q 对应的一个特解. (27)式中的 $f_n (n = \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 是待求常数,它由两端的边界条件来决定. 在实际应用中,可只取(27)式中的前 k 项进行求解:

$$\boldsymbol{v} = \sum_{n=1}^k [f_n \boldsymbol{\Psi}_n \exp(\mu_n x) + f_{-n} \boldsymbol{\Psi}_{-n} \exp(-\mu_n x)].$$

(29)

当然, (29)式是严格满足域内齐次微分方程及两侧边固支边界条件(25)式的,而对两端边界条件不是严格满足的,但由于忽略的部分仅是小量且衰减是非常快的,因此解将仅在两端附近有微小的振荡.

例如,当板在两端 $x = \pm a$ 为固支时,将(29)式代入两端边界条件的变分式,有

$$\int_{-b}^b [(\kappa_y - \bar{\kappa}_y) \delta \phi_x + (\kappa_{xy} - \bar{\kappa}_{xy}) \delta \phi_y]_{x=\pm a} dy = 0,$$

(30)

即可得到关于系数 $f_n (n = \pm 1, \pm 2, \cdots, k)$ 的一个线性代数方程组,从而确定系数 f_n . 但这里需要说明一点的是,由于本征值及本征解出现了复数,因此在具体计算过程中,应首先将(29)式转化为实型正则方程,然后进行求解.

这里给出一个算例,研究受均布荷载作用的四边固支碳/环氧复合材料板,为简单计本文均采用无量纲数值. 取板长度为 $2a = 3$, 宽度为 $2b = 2$, 其刚度系数为 $D_{11} = 160.38$, $D_{12} = 49.68$, $D_{22} = 1780.74$, $D_{66} = 374.4$, 而均布荷载 $q = 2$. 不难给出荷载 q 对应的一个特解

$$\bar{w} = -q(y^2 - b^2)^2/24D_{11}.$$

(31)

$\bar{w}(y)$ 已满足板域内的平衡方程(1)式和两侧边固支的边界条件. 相应地,

$$\bar{\kappa}_x = 0, \quad \bar{\kappa}_y = q(b^2 - 3y^2)/6D_{11}, \quad \bar{\kappa}_{xy} = 0.$$

(32)

表 1 给出了方程(26)式的前几个本征根. 表 2 为取 $k = 4$ 时计算得到的各点挠度值. 由于板对称所以只列出 1/4 块板上的各点挠度值. 括号内为通过 SAP93 用有限元计算得到的结果,划分为 40×40 个单元. 本文结果与有限元结果相差很小,说明本文方法是有效和精确的.

在文献[2]中采用能量法对四边固支正交各向异性矩形板进行了计算,其选取的挠度函数为

$$w = \sum_m \sum_n A_{mn} (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 x^m y^n, \quad m, n = 0, 1, 2, \cdots,$$

(33)

表 1 正交各向异性对边固支板非零本征值

	n				
	1	2	3	4	5
$\text{Re}(\mu_n)$	1.02345	1.75904	2.48965	3.22064	3.95163
$\text{Im}(\mu_n)$	0.79770	1.24605	1.69985	2.15389	2.60790

表 2 四边固支正交各向异性板受垂直均布荷载各点挠度值(×10⁻⁶)

y	x					
	0.0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5
0	182.7(182.6)	169.0(168.9)	130.7(130.6)	77.21(77.11)	25.01(24.94)	-0.209(0)
0.2	170.7(170.6)	157.9(157.8)	122.3(122.2)	72.37(72.31)	23.48(23.45)	0.0356(0)
0.4	135.9(135.8)	125.9(125.8)	97.95(97.87)	58.31(58.27)	19.08(19.07)	0.280(0)
0.6	83.90(83.84)	77.93(77.86)	61.06(60.99)	36.85(36.76)	12.33(12.24)	-0.0389(0)
0.8	28.71(28.69)	26.76(26.73)	21.20(21.16)	13.08(12.99)	4.540(4.442)	-0.328(0)
1.0	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)

和

$$w = A[1 + \cos(\pi x/a)][1 + \cos(\pi y/b)].$$

(34)

表 3 为文献[2]中选取不同挠度函数时计算得到的中心点最大挠度值和有限元计算结果以及本文计算结果的比较,可以看出,本文所给解与有限元方法结果十分接近,而文献[2]给出的解误差较大,这表明本文得到的解是正确的.

表 3 中心点挠度值比较 (×10⁻⁶)

	挠度函数取(33)式		挠度函数取(34)式	有限元结果	本文结果
	m = n = 0	m, n = 0, 1, 2			
中心点最大挠度值	191.1	201.3	188.0	182.6	182.7

4 结束语

基于平面弹性与板弯曲的相似性原理,平面弹性问题的各种有效求解方法如 Hamilton 求解体系就可以直接引入到板弯曲中来. Hamilton 求解辛体系与传统的方法论正成对照,新方法论采用由弯矩函数和曲率组成的全状态向量来描述其控制方程,通过对对偶方程组的分离变量及本征函数展开等直接法给出问题的分析解. 本文对正交各向异性板的分析和求解证明了 Hamilton 体系可以求解各种边界条件的板弯曲问题,其方法是十分有效和精确的,非常有推广和应用价值.

参 考 文 献

1 Timoshenko S P, Woinowsky-Krieger S. Theory of Plates and Shells. New York: McGraw-Hill, 1959

2 罗祖道,李思简. 各向异性材料力学. 上海:上海交通大学出版社,1994

3 钟万勰. 弹性力学求解新体系. 大连:大连理工大学出版社,1995

4 Zhong Wanxie. Plane elasticity in sectorial domain and the Hamiltonian system. Appl Math Mech, 1994, 15(12): 1113 ~ 1123

5 Fraeijns De Veubeke B. Zienkiewicz O C. Strain-energy bounds in finite-element analysis by slab analogy. Journal of Strain Analysis, 1967, 2(4): 265 ~ 271

6 Zhong Wanxie, Yao Weian. New solution system for plate bending. In: Cheng F Y, Gu Yuanxian, eds. Computational Mechanics in Structural Engineering. Elsevier, 1999. 17 ~ 30

7 Yao Weian, Zhong Wanxie, Su Bin. New solution system for circular sector plate bending and its application. Acta Mechanica Solida Sinica, 1999, 12(4): 307 ~ 315

8 钟万勰,姚伟岸. 板弯曲与平面弹性有限元的同一性. 计算力学学报,1998,15(1): 1 ~ 13

9 钟万勰,姚伟岸. 板弯曲与平面弹性问题的多类变量变分原理. 力学学报,1999,31(6): 717 ~ 723