



综 述

积分几何不变运动公式与弦幂积分不等式

献给沈一兵教授 85 寿辰

徐文学¹, 周家足^{1,2*}

1. 西南大学数学与统计学院, 重庆 400715;

2. 武汉科技大学理学院, 武汉 430065

E-mail: xuwenxue83@swu.edu.cn, zhoujz@swu.edu.cn

收稿日期: 2022-06-13; 接受日期: 2022-09-21; 网络出版日期: 2023-02-07; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 12071318) 和重庆市自然科学基金 (批准号: cstc2021jcyj-msxmX1057) 资助项目

摘要 本文先介绍积分几何与凸几何的历史、发展、研究现状和中国学者的一些工作. 然后介绍我们在不变运动公式和弦幂积分不等式方面的一些最新工作, 还介绍与积分几何密切相关的凸体类上的仿射等周不等式.

关键词 不变运动公式 等周不等式 Bonnesen 型不等式 仿射等周不等式 弦幂积分

MSC (2020) 主题分类 52A22, 52A40

1 引言

积分几何起源于几何概率, 可追溯到 1777 年的蒲丰 (Buffon) 投针问题. 庞加莱 (Poincaré) 提出了几何概率需满足某种变换群下的不变性, 因此避免了几何概率中的贝特朗悖论 (Bertrand's paradox), 为积分几何的建立奠定了基础思想. 1935 至 1939 年间, 布拉施克 (Blaschke) 和他的学生陈省身、吴大任、桑塔洛 (Santaló) 等在德国汉堡 (Hamburg) 大学组织讨论班系统地探索了利用几何概率思想研究几何问题, 一系列的研究论文以“积分几何”为标题发表, 积分几何随之建立^[6, 50, 51].

Blaschke 率先将 Poincaré 公式推广到平面及 3 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^3$ 空间^[51], 即 Blaschke 基本运动公式. 陈省身和韦伊 (Weil) 将局部紧群上不变测度引入积分几何, 奠定了齐性空间积分几何学, 对积分几何的发展作出了卓越的贡献. 陈省身将 Blaschke 基本运动公式推广到 n 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 并率先研究齐性空间的积分几何^[11, 12, 14]. Santaló 毕生致力于发展积分几何, 是随后 40 余年世界积分几何的领袖; 他总结了截至当时的主要理论和应用成果^[51]. Blaschke-Santaló 时期的积分几何主要研究几何测度 (截面测度或投影测度) 之间的关系.

积分几何是具有浓浓中国传统和色彩的数学分支. Blaschke 在文献 [6] 中用施泰纳 (Steiner) 对称化的方法解决了经典的等周问题, 并进一步用此方法证明了等周不等式的重要推广—Brunn-Minkowski

英文引用格式: Xu W X, Zhou J Z. Invariant kinematic formulas and inequalities for chord power integrals in integral geometry (in Chinese). Sci Sin Math, 2024, 54: 1707–1722, doi: 10.1360/SSM-2022-0108

不等式. 该文献对中国学者学习和研究帮助极大. 任德麟在中国本土从事积分几何研究, 著有《积分几何学引论》^[49], 总结了中国学者的重要工作, 并培养了中国最早的积分几何研究生. 吴大任、任德麟关于弦幂积分不等式的工作达到当时国际前沿水平, 最近 10 多年来, 中国学者在积分几何、凸几何与几何不等式等领域取得一系列重要结果.

凸几何与积分几何同宗同源, 可追溯到柯西 (Cauchy) 的均质积分 (也称为内蕴体积, 光滑凸体时为平均曲率积分) 以及 Steiner 几何对称化. Cauchy 投影公式以及 Crofton 积分公式的发现、Erlanger 纲领的提出、Poincaré 关于 Bertrand 悖论的修正、Riemann 几何的诞生、Kolmogorov 关于概率论的公理化构造等是凸几何的早期基础. 积分几何与凸几何中 Brunn-Minkowski 理论 (也称为凸体的混合体积理论) 的主要研究对象是凸体与星体 (流形), 其内容包括几何测度论、几何截片 (geometric tomography)、随机几何等^[24, 50, 52]. 积分几何与凸几何研究凸体的基本方法和手段是, 将凸体向低维线性子空间投影 (均值积分), 将超平面运动与凸体相截, 将所有低维平面运动与凸体相截 (Crofton 运动公式), 将一凸体运动与另一凸体相交 (principal kinematic formula), 凸体 Steiner 对称化等. 盖尔范特 (Gelfand) 创建的另一积分几何主要研究流形上函数集合的积分变换 (拉东 (Radon) 变换和傅里叶 (Fourier) 变换等), 如今发展为函数集上的 Brunn-Minkowski 理论^[13, 27, 30].

凸几何是研究 $\mathbb{R}^n$ 中凸体“集合”的几何 (在赋予了 Minkowski 加法、数乘的结构后, 这类凸体集合构成了一个锥), 是以 (整体) 微分几何、泛函分析、偏微分方程和拓扑学为基础的现代数学中一个非常重要的研究领域. Buffon、Blaschke、Chern、Crofton、Gelfand、Minkowski、Poincaré、Rota、Santaló、Weil 和 Lutwak 等对积分几何与凸几何的发展做了开创性的工作. Klain 和 Rota^[36] 详细解释了积分几何与凸几何、概率论的联系. Gardner^[24] 和 Schneider^[52] 的论著及 Grinberg 等编著的论文集^[29] 包含了当时积分几何与凸几何的最新成就及综述性论文. 周家足和任德麟^[73] 介绍了积分几何与几何不等式的重要联系及中国数学家的一些新的工作. 经典的 Brunn-Minkowski 理论, 即混合体积理论由 Minkowski 开创, Lutwak 开创了 L_p Brunn-Minkowski 理论, Lutwak 等^[42, 43] 开创了 Orlicz-Brunn-Minkowski 理论, Ludwig 和 Reitzner^[38] 开创了赋值 Orlicz-Brunn-Minkowski 理论, Zhu 等^[74] 首先研究对偶 Orlicz-Brunn-Minkowski 理论, Gardner 等^[25] 深化了对偶 Orlicz-Brunn-Minkowski 理论. Fang 和 Zhou^[18, 19] 在中国开始了函数集上 Brunn-Minkowski 理论研究, Fang 等^[17] 在混合索伯列夫 (Sobolev) 不等式取得进展.

积分几何中最重要的两类不变运动公式是基本运动公式 (fundamental kinematic formula) 和克罗夫顿 (Crofton) 公式.

基本运动公式 设 G 为李群 (微分流形并附有群结构), $H \subset G$ 为闭子群, 设 M^p 和 N^q 为齐性空间 G/H 中维数分别为 p 和 q 的紧子流形. dg 为齐性空间 G/H 的不变密度 (测度论中的 Haar 测度). 对于任意 $g \in G$, 设 $I(M^p \cap gN^q)$ 为交子流形 $M^p \cap gN^q$ (维数为 $p+q-n \geq 0$) 的几何不变量, 则估计积分 $\int_G I(M^p \cap gN^q)dg$, 并表示为与 M^p 和 N^q 有关的几何不变量 $I_i(M^p)$ 和 $I_i(N^q)$ 的线性组合, 即

$$\int_G I(M^p \cap gN^q)dg = \sum_i c(i, p, q) I_i(M^p) I_{n-i}(N^q), \quad (1.1)$$

其中 $c(i, p, q)$ 为与指标 i , p 和 q 有关的常数.

计算这些常数 $c(i, p, q)$ 是积分几何学中一个非常复杂而困难的问题. 对于不同空间 (如常曲率空间) 和相应各种子流形 (如可取曲线、超曲面和连通域等), 令 $I(M_p \cap gN_q)$ 为交子流形 $M^p \cap gN^q$ 的体积、表面积、曲率或其他不变量就导致了著名的 Poincaré、Blaschke、Crofton、Santaló、Chern、Federer、Shifrin、Howard、Chen-Zhou 基本运动公式^[10, 31, 51, 69].

Crofton 公式为 (1.1) 中当 N^q 为随机平面时的情形, 即紧致流形与随机平面相交不变量的测度: 设 $\tilde{G}_{k,n}$ ($0 \leq k \leq n$) 为仿射 Grassmann 流形, M^p 为 $\mathbb{R}^n$ 中 p - 维紧子流形, $d\xi_k$ 为 $\tilde{G}_{k,n}$ 中的规范测度, 则 Crofton 公式为

$$\int_{\tilde{G}_{k,n}} I(M^p \cap \xi_k) d\xi_k = \sum_i c(i, p, k) I_i(M^p). \quad (1.2)$$

这类公式始于 Crofton 研究的弦长积分, Crofton 公式蕴涵了著名的 Santaló 公式和 Crofton-Hadwiger 公式等. Crofton 公式与几何测度论、赋值理论联系密切并广泛应用在几何概率中 (参见文献 [1, 3, 16, 36, 51, 53]).

不变运动公式的经典应用之一是解决 Euclid 空间中一域包含另一域的充分条件. 哈德威格 (Hadwiger) 首先利用平面中的 Poincaré 运动公式和 Blaschke 基本运动公式给出平面上一域包含另一域的充分条件 [51]. 任德麟运用等周亏格给出了更具几何直观的平面上一域包含另一域的充分条件 [13, 50, 51]. 而空间中一域包含另一域的充分条件, 即高维 Hadwiger 包含问题很久没有解决. 陈省身预测空间中一域 K_1 包含另一域 K_2 的充分条件是与域 K_1 和 K_2 的积分不变量有关的几何不等式 (组). 张高勇最先得到了 3 维空间中一个凸体包含另一凸体的充分条件 [50]. Zhou [68–71] 利用 Chen-Zhou 不变运动公式及关于两超平面交的中曲率运动公式得到了高维空间中光滑域包含另一域的充分条件, 后来又得到了常曲率平面以及 3 维常曲率空间一域包含另一域的充分条件.

积分几何中基本运动公式和 Crofton 公式已经被推广到常曲率空间, 积分不变量也被推广为各种测度. 复空间中的积分几何和不变运动公式以及应用问题很多. 积分几何与整体微分几何、微分方程和随机几何等密切相关, 已被广泛应用于医学 (肿瘤)、金属学、采矿学 (探针搜索) 和信息科学等领域 [51, 53].

弦幂积分是关于凸体的一类特殊的 Crofton 型公式, 是凸体体积与面积泛函的推广. Blaschke、Santaló、吴大任、任德麟、张高勇等得到了蕴涵经典等周不等式的弦幂积分不等式 [50, 51], Zhang [64, 65] 应用弦幂积分不等式证明了逆 Petty 投影不等式的猜想, 即张投影不等式.

本文先介绍积分几何中不变运动公式的起源、发展、研究现状, 以及在 Bonnesen 型不等式和弦幂积分不等式等方面的应用及研究进展. 然后介绍积分几何中的仿射等周不等式. 最后证明 Blaschke-Santaló 不等式 (4.15) 的一个新的推广, 即弦幂积分不等式 (5.4).

2 预备知识

设 S^{n-1} 为 n 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球面, B 为 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球体. 对于任意 $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \cdot y$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中标准内积. 记 $\mathcal{K}^n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中所有凸体 (具有非空内点的紧凸集) 构成的集合, $\mathcal{K}_s^n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中所有关于原点对称的凸体构成的集合. 以 $V_i(K)$ 表示凸体 K 的 i 维体积 (Lebesgue 测度). 记 $S(K)$ 为凸体 K 的表面积, $V_n(B) = \omega_n$, 单位球面 S^{n-1} 的表面积为 α_{n-1} , 则有 $\alpha_{n-1} = n\omega_n$. 记 $\chi(\cdot)$ 为 Euler-Poincaré 示性数, 当 $K \in \mathcal{K}^n$ 时, $\chi(K) = 1$, $\chi(\emptyset) = 0$. 凸体 K 的极体 K^* 定义为

$$K^* = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot y \leq 1, y \in K\}.$$

$\mathbb{R}^n$ 中凸集 K 和 L 的 Minkowski 和定义为

$$K + L = \{x + y : x \in K, y \in L\}.$$

凸集 K 的数量积定义为

$$\lambda K = \{\lambda x : x \in K, \lambda \geq 0\}.$$

设 $K, L \in \mathcal{K}^n$, 若存在 $\lambda > 0$ 和 $x \in \mathbb{R}^n$ 使得 $K = \lambda L + x$, 则称 K 与 L 位似. 对于任意 $K \in \mathcal{K}^n$, 其支撑函数 $h_K : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 定义为

$$h_K(x) = \max\{x \cdot y : y \in K\}, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

凸体 K 的投影体 ΠK 由支撑函数

$$h_{\Pi K}(u) = V_{n-1}(K | u^\perp), \quad u \in S^{n-1}$$

定义, 其中 $K | u^\perp$ 是 K 在 $u^\perp$ 上的正交投影. ΠK 是关于原点对称的凸体, 其极体 $(\Pi K)^*$ 通常记为 $\Pi^* K$.

Grassmann 流形 $G_{n,i}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中 i 维子空间构成的集合, 仿射 Grassmann 流形 $\tilde{G}_{n,i}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中所有 i 维随机平面构成的集合. 对于 $\xi_i \in G_{n,i}$, $K \in \mathcal{K}^n$, 记 $V_i(K | \xi_i)$ 为 K 在 ξ_i 上投影体的 i 维体积. 凸体 K 的第 $n-i$ 阶均值积分 (quermassintegral) 定义为

$$W_{n-i}(K) = \frac{\omega_n}{\omega_i} \int_{G(n,i)} V_i(K | \xi_i) d\xi_i, \quad 0 \leq i \leq n, \quad (2.1)$$

其中 $d\xi_i$ 为 $G_{n,i}$ 上的 Haar 测度. 特别地, $W_0(K) = V(K)$, $nW_1(K) = S(K)$, $W_n(K) = \omega_n$.

与凸体 K 的均值积分密切相关的是内蕴体积 $\tilde{V}_i(V)$, 其定义为

$$\tilde{V}_i(K) = \frac{\binom{n}{i}}{\omega_{n-i}} W_{n-i}(K), \quad 0 \leq i \leq n.$$

赋值 (valuation) 是定义在 $\mathcal{K}^n$ 上的函数 φ , 对于所有的 $K, L \in \mathcal{K}^n$ 且 $K \cup L \in \mathcal{K}^n$, $K \cap L \in \mathcal{K}^n$ 时

$$\varphi(K \cup L) + \varphi(K \cap L) = \varphi(K) + \varphi(L).$$

若集 K 与过原点的任意直线相交为线段, 则称 K 为星型集. 紧的星型集 K 的径向函数 $\rho_K(\cdot) : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow [0, \infty)$ 为

$$\rho_K(x) = \max\{c \geq 0 : cx \in K\}.$$

若 K 的径向函数是连续的, 则称 K 为星体. 星体 K 的第 $(n-i)$ -阶对偶均值积分 $\tilde{W}_{n-i}$ 定义为

$$\tilde{W}_{n-i}(K) = \frac{\omega_n}{\omega_i} \int_{G(n,i)} V_i(K \cap \xi_i) d\xi_i, \quad 0 \leq i \leq n.$$

设 $\mathbb{R}^n$ 中光滑超曲面 Σ 的 $n-1$ 个主曲率为 $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$, 则 Σ 的 r -阶中曲率 $H_r(\Sigma)$ 是 Σ 的 $n-1$ 个主曲率 $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ 的 r -阶初等对称函数规范化:

$$\prod_{r=1}^{n-1} (1 + t\kappa_r) = \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n-1}{r} H_r(\Sigma) t^r,$$

即

$$H_r(\Sigma) = \binom{n-1}{r}^{-1} \{\kappa_{i_1}, \dots, \kappa_{i_r}\}, \quad r = 1, \dots, n-1,$$

其中 $\{\kappa_{i_1}, \dots, \kappa_{i_r}\}$ 为主曲率 $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ 的 r 阶初等对称函数. Σ 的平均曲率为

$$H_1 = \frac{1}{n-1}(\kappa_1 + \dots + \kappa_{n-1}),$$

Σ 的 Gauss-Kronecker 曲率为

$$\kappa_1 \cdots \kappa_{n-1} dA = dS,$$

其中 dS 为 Σ 的 Gauss 映照象 $\subseteq S^{n-1}$ 的密度.

Σ 的 r - 阶中曲率积分是

$$\tilde{H}_r(\Sigma) = \binom{n-1}{r}^{-1} \int_{\Sigma} \{\kappa_{i_1}, \dots, \kappa_{i_r}\} dA, \quad r = 1, \dots, n-1.$$

若凸体 K 的边界 ∂K 为 C^2 的, 则记 K 的 r - 阶平均曲率积分为 $M_r(K)$, 即 $M_r(K) = \tilde{H}_r(\partial K)$.

3 不变运动公式

Poincaré 公式和 Blaschke 基本运动公式是平面积分几何中两个最重要的运动公式. Blaschke 进一步将平面的 Blaschke 基本运动公式推广到 $\mathbb{R}^3$ 中. 陈省身、严志达进一步将它推广为 $\mathbb{R}^n$ 中的陈省身 - 严志达基本运动公式^[14, 50, 51]:

定理 3.1 设 K 和 L 为 $\mathbb{R}^n$ 中的二区域, 它们的边界 ∂K 和 ∂L 是 C^2 类超曲面, K 和 L 的第 i 阶平均曲率积分分别为 $M_i(K)$ 和 $M_i(L)$. 设 dg 为 $\mathbb{R}^n$ 中刚体运动群 G_n 的运动密度, 则

$$\int_{G_n} \chi(K \cap gL) dg = \chi(K)V(L) + \chi(L)V(K) + \frac{1}{n^2 \omega_n} \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n}{i+1} M_i(K) M_{n-i-2}(L), \quad (3.1)$$

其中 $\chi(\cdot)$ 表示相应区域的 Euler-Poincaré 示性数.

若限制在凸体上, 即 $K, L \in \mathcal{K}^n$, 则 $\chi(K \cap gL) = \chi(K) = \chi(L) = 1$, 从而陈省身 - 严志达基本运动公式 (3.1) 有如下简洁形式^[53, 66]:

$$\int_G \chi(K \cap gL) dg = \frac{1}{\omega_n} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} W_i(K) W_{n-i}(L). \quad (3.2)$$

陈省身 - 严志达基本运动公式 (3.1) 可推广为关于两凸体相交内蕴体积的基本运动公式^[53]: 设 $K, L \in \mathcal{K}^n$, $j \in \{0, \dots, n\}$, 则有

$$\int_G \tilde{V}_j(K \cap gL) dg = \sum_{i=j}^n c_{i,j} \tilde{V}_i(K) \tilde{V}_{n-i+j}(L), \quad (3.3)$$

其中常数为

$$c_{k,j} = \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n-k+j+1}{2})\Gamma(\frac{j+1}{2})}.$$

当 $j = 0$ 时, (3.3) 即为陈省身 - 严志达基本运动公式的简洁形式 (3.2).

基本运动公式还有一些重要推广. 其中一个推广是从两个凸体相交的情形到多个凸体相交的情形. 另一个是将运动群限制为平移群, 则得到平移不变运动公式, 关于平移不变运动公式有更加广泛的应用 [53]. Luo 等 [39] 给出了平面平移不变运动公式, 并应用它得到了一系列平移 Bonnesen 型不等式. Böröczky 等 [7] 应用平面平移 Bonnesen 型不等式证明了 log-Minkowski 不等式并解决了 log Brunn-Minkowski 问题的唯一性. 关于凸体的基本运动公式 (3.3) 涉及 Brunn-Minkowski 理论中的内蕴体积, 即均值积分, 在对偶 Brunn-Minkowski 理论中是关于星体的对偶均值积分, Zhang [66] 得到了陈省身 - 严志达基本运动公式 (3.2) 的对偶形式, 即张高勇对偶基本运动公式:

定理 3.2 设 K 和 L 为 $\mathbb{R}^n$ 中关于原点的星体, N_g 为连接原点 O 与 gO 的线段, 则有

$$\int_{G_n} \chi(K \cap gL \cap N_g) dg = \frac{1}{\omega_n} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \tilde{W}_i(K) \tilde{W}_{n-i}(L).$$

Crofton 公式是另一类重要的不变运动公式. 当不变运动公式 (1.1) 中 N 为 q - 维随机平面 ξ_q 时, 即得到 Crofton 运动公式

$$\int_{\tilde{G}_{n,q}} I(M^p \cap \xi_q) d\xi_q = \sum_i c(i, p, q) I_i(M^p). \quad (3.4)$$

经典的 Crofton 公式是平面凸体 K 与随机直线 ξ_1 相交的测度为该凸体的周长 L , 即

$$\int_{\tilde{G}_{2,1}} \chi(K \cap \xi_1) d\xi_1 = L.$$

设 $K \in \mathcal{K}^n$. 当 $k \in \{1, \dots, n\}$ 和 $j \in \{0, \dots, k\}$ 时, 则有关于内蕴体积 $\tilde{V}_j(K)$ 的广义 Crofton 公式:

$$\int_{\tilde{G}_{n,k}} \tilde{V}_j(K \cap \xi_k) d\xi_k = c_{k,j} \tilde{V}_{n-k+j}(K).$$

当 $j = 0$ 时, 上式化成

$$\tilde{V}_k(K) = c_{0,k} \int_{\tilde{G}_{n,k}} \tilde{V}_j(K \cap \xi_k) d\xi_k,$$

给出内蕴体积的一种积分几何解释, 即不计一个常数因子, 内蕴体积 $\tilde{V}_k(K)$ 为 $n - k$ 维仿射平面与凸体相交的不变测度.

赋值理论中最著名的结果是 Hadwiger 特征定理, 此定理被 Hadwiger 推广为关于凸体类上泛函的广义运动公式 [53].

Hadwiger 积分几何定理 设 $K, L \in \mathcal{K}^n$, $\varphi: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ 为连续的赋值, 则有

$$\int_{G_n} \varphi(K \cap gL) dg = \sum_{i=0}^n \varphi_{n-i}(K) \tilde{V}_i(L), \quad (3.5)$$

其中

$$\varphi_{n-i}(K) = \int_{\tilde{G}_{n,i}} \varphi(K \cap \xi_i) d\xi_i.$$

积分几何中除了基本运动公式和 Crofton 公式外, 还有关于曲率测度、Gauss 测度、两凸体边界的相交测度等广义测度的不变运动公式^[53,56]. 凸体类上的积分几何与赋值理论已被推广到流形上^[2,54]. 关于复空间上积分几何问题很多, 最新进展可参见文献^[4,5,15].

4 等周问题与 Bonnesen 型不等式

4.1 等周问题

经典的等周问题是数学的起源, 可追溯到古希腊时期: 平面上固定周长的所有闭曲线中圆所围成的区域面积最大. 但其严格的数学证明直到微积分完善很久后的 20 世纪才由魏尔斯特拉斯 (Weierstrass) 给出, 在 Weierstrass 证明之前, 伯努利 (Bernoulli)、欧拉 (Euler)、拉格朗日 (Lagrange) 都曾声称证明了经典的等周问题, 但不久后发现证明有瑕疵. 后来赫尔维茨 (Hurwitz) 在证明中去掉了曲线光滑性条件 (在这之前的证明都要求曲线具有一定的光滑性), 利用 Fourier 级数给出一个简短的证明. 施密特 (Schmidt) 把闭曲线所围区域直接与相同周长的圆盘比较给出了一个优美的证明, 他的证明仅应用了弧长公式、平面区域面积的格林定理和柯西 - 施瓦茨 (Cauchy-Schwarz) 不等式, 并孕育了数学中应用最多的“比较定理”. 后来陆续发表的很多证明都非常直接和简单. 经典的等周问题很自然地推广到曲面和高维空间.

经典的等周问题等价于平面等周不等式: 设 K 为 Euclid 平面 $\mathbb{R}^2$ 中周长为 L 、面积为 A 的域, 则

$$L^2 - 4\pi A \geq 0,$$

其中等号成立当且仅当 K 为圆盘.

高维的等周问题是, 空间中具有给定表面积的几何体中球的体积最大. 设 K 为 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中体积为 $V_n(K)$ 、表面积为 $S(K)$ 的凸体, 则

$$S(K)^n - n^n \omega_n V_n(K)^{n-1} \geq 0, \quad (4.1)$$

等号成立当且仅当 K 为球.

等周不等式的研究延续千年仍是一个历久弥新的问题, 文献^[46]详细介绍了截至当时等周不等式的发展及与分析不等式 (Sobolev 不等式、Wirtinger 不等式和 Poincaré 不等式等)、积分几何、Minkowski 理论、物理等的广泛联系. 2 维黎曼流形上的等周不等式是 Hsiung^[32] 的贡献. 等周不等式的一些研究进展可参见文献^[21,23,35,45,55]. 最近的一个重大突破是 Euclid 空间中的极小子流形上的等周不等式^[8]. 等周不等式的自然推广 Brunn-Minkowski 不等式对解决 Minkowski 问题的唯一性至关重要.

4.2 Bonnesen 型不等式

1924 年前后, Bonnesen 发现了关于平面上的凸体 K 成立形如

$$L^2 - 4\pi A \geq B_K$$

的不等式, 其中, B_K 是与 K 有关的几何量, 是非负的且当 K 为圆盘时为 0. 此类不等式给出了平面凸域与圆盘的接近程度, 称为 Bonnesen 型不等式. Bonnesen 利用域的最大内接圆半径 r_i 和最小外接圆的半径 r_e 给出了著名的 Bonnesen 等周不等式

$$L^2 - 4\pi A \geq \pi^2(r_e - r_i)^2, \quad (4.2)$$

其中等号成立当且仅当 $r_i = r_e$, 即 K 为圆盘.

高维 Bonnesen 型不等式刻画空间中域与球体的接近程度:

$$S(K)^n - n^n \omega_n V_n(K)^{n-1} \geq B_K, \quad (4.3)$$

其中 B_K 是与 K 有关的非负几何量, 当 K 为球时为 0.

Bonnesen 自己从未得到过任何高维 Bonnesen 型不等式. 后人都把类似 (4.3) 的不等式称为 Bonnesen 型不等式. 在之后的百年间, 发现了很多 Bonnesen 型不等式, 其中 Figalli、Fusco、Maggi、Osserman、Pratelli、周家足、张高勇等做了一些非常重要的工作 (参见文献 [21–23, 46, 47, 51, 52, 65, 73]). 周家足利用一域包含另一域的包含测度方法给出了平面 Bonnesen 型不等式的统一证明. 周家足等还得到了平面两凸域对称混合等周不等式、Bonnesen 型对称混合不等式、Bonnesen 型对称混合等似不等式的统一证明 (参见文献 [39, 60, 62, 63, 72]).

设 $g \in G$ 为 $\mathbb{R}^2$ 中任一等距, K_k ($k = 0, 1$) 为连通且道路连通、面积为 A_k 的域, 其边界 ∂K_k 是周长为 L_k 的简单光滑闭曲线, dg 为 G 的不变运动密度. 则有 Blaschke 公式

$$\int_{\{g: K_0 \cap gK_1 \neq \emptyset\}} \chi(K_0 \cap gK_1) dg = 2\pi(A_0 + A_1) + L_0 L_1.$$

如果记 $\partial K_0 \cap g\partial K_1$ 的交点数为 $\sharp\{\partial K_0 \cap g\partial K_1\}$, 则有如下 Poincaré 基本运动公式:

$$\int_{\{g: \partial K_0 \cap g\partial K_1 \neq \emptyset\}} \sharp\{\partial K_0 \cap g\partial K_1\} dg = 4L_0 L_1. \quad (4.4)$$

因域 K_k 为连通且道路连通, 其边界 ∂K_k 为逐段光滑闭曲线, 所以 $\chi(K_0 \cap gK_1) = n(g)$ 为交 $K_0 \cap gK_1$ 的连通分支, Blaschke 基本运动公式可改写为

$$\int_{\{g: K_0 \cap gK_1 \neq \emptyset\}} n(g) dg = 2\pi(A_0 + A_1) + L_0 L_1. \quad (4.5)$$

如果记 μ 为所有满足 $gK_1 \subset K_0$ 或 $gK_1 \supset K_0$ 的 g 的集合, 则 (4.5) 可写为

$$\int_{\mu} dg + \int_{\{g: \partial K_0 \cap g\partial K_1 \neq \emptyset\}} n(g) dg = 2\pi(A_0 + A_1) + L_0 L_1. \quad (4.6)$$

当 $\partial K_0 \cap g\partial K_1 \neq \emptyset$ 时, $K_0 \cap gK_1$ 的每个连通分支至少由 ∂K_0 和 $g\partial K_1$ 的一段弧组成, 因此

$$n(g) \leq \frac{\sharp\{\partial K_0 \cap g\partial K_1\}}{2}.$$

结合 (4.4) 和 (4.6) 可得

$$\int_{\mu} dg \geq 2\pi(A_0 + A_1) - L_0 L_1. \quad (4.7)$$

根据 (4.7) 可得一域包含另一域的一个充分条件为

$$2\pi(A_0 + A_1) - L_0 L_1 > 0.$$

设 $K_1 \equiv K$, K_0 为半径为 r 的圆盘 $B(r)$, r_i 为 K 的最大内接圆半径, r_e 为 K 的最小外接圆半径, 则当 $r_i \leq r \leq r_e$ 时, $B(r)$ 与 K 不能相互包含, 即 $m\{g \in G : gK \subset B(r) \text{ 或 } gK \supset B(r)\} = 0$. 由 (4.7) 立即可得以下 Bonnesen 不等式 [46, 50, 73]:

定理 4.1 [47, 49–51, 73] Euclid 平面 $\mathbb{R}^2$ 中由简单闭曲线围成的面积为 A 、周长为 L 的域 K 满足不等式

$$\pi r^2 - Lr + A \leq 0, \quad r_i \leq r \leq r_e, \quad (4.8)$$

当 K 为圆盘时等号成立.

由不等式 (4.8) 可得到比 (4.2) 更强的如下 Bonnesen 型不等式:

定理 4.2 设 K 为 Euclid 平面 $\mathbb{R}^2$ 中面积为 A 、周长为 L 的域, 对 $r_i \leq r \leq r_e$, 有

$$\begin{aligned} L^2 - 4\pi A &\geq \pi^2(r_e - r_i)^2 + (L - \pi r_e - \pi r_i)^2, \\ L^2 - 4\pi A &\geq A^2\left(\frac{1}{r_e} - \frac{1}{r_i}\right)^2 + A^2\left(\frac{1}{r_e} + \frac{1}{r_i} - \frac{L}{A}\right)^2, \\ \frac{L - \sqrt{L^2 - 4\pi A}}{2\pi} &\leq r_i \leq \frac{L}{2\pi} \leq r_e \leq \frac{L + \sqrt{L^2 - 4\pi A}}{2\pi}, \\ L^2 - 4\pi A &\geq A^2\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_e}\right)^2, \quad L^2 - 4\pi A \geq A^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_e}\right)^2, \\ L^2 - 4\pi A &\geq A^2\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r}\right)^2, \quad L^2 - 4\pi A \geq \left(\frac{A}{r} - \pi r\right)^2, \\ L^2 - 4\pi A &\geq L^2\left(\frac{r_e - r_i}{r_e + r_i}\right)^2, \quad L^2 - 4\pi A \geq \left(L - \frac{2A}{r}\right)^2, \\ L^2 - 4\pi A &\geq L^2\left(\frac{r - r_i}{r + r_i}\right)^2, \quad L^2 - 4\pi A \geq L^2\left(\frac{r_e - r}{r_e + r}\right)^2, \end{aligned}$$

等号成立当且仅当 K 为圆盘.

Grinberg 等 [29] 和 Zhang [65] 利用高维空间中的包含测度得到高维空间中的 Bonnesen 型不等式.

定理 4.3 设 $K \in \mathcal{K}^n$, 则有

$$\left(\frac{S(K)}{n\omega_n}\right)^{n/(n-1)} - \frac{V(K)}{\omega_n} \geq \left(\left(\frac{V(K)}{\omega_n}\right)^{1/n} - r_i\right)^n.$$

更多高维的 Bonnesen 型不等式参见文献 [47, 52, 73].

4.3 仿射等周不等式

仿射等周不等式是仿射几何中一类重要的不等式, 主要研究仿射表面积、体积等仿射不变量的极值问题. 球刻画了等周不等式的极值情形, 椭球或单形刻画仿射等周不等式的极值情形. 经典的 Brunn-Minkowski 理论起源于 Brunn 的博士论文 [9] 及 Minkowski 在凸集的集合上定义加法与数乘. Brunn-Minkowski 不等式是 Brunn-Minkowski 理论的基石, 它表明体积泛函在 Minkowski 加法下的凹性:

Brunn-Minkowski 不等式 设 $K, L \in \mathcal{K}^n$, 则

$$V(K+L)^{1/n} \geq V(K)^{1/n} + V(L)^{1/n}, \quad (4.9)$$

等号成立当且仅当 K 与 L 位似.

由凸体 K 和 L 的体积变分定义 K 与 L 的混合体积 $V_1(K, L)$ 为

$$V_1(K, L) = \frac{1}{n} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{V(K + \varepsilon L)}{\varepsilon} = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} h_L(u) dS_K(u),$$

其中 $S_K(\cdot)$ 为 K (定义在球面 S^{n-1} 上) 的表面积测度, 即

$$S_K(\omega) = \int_{x \in \partial K, v(x) \in \omega} d\mathcal{H}^{n-1}(x), \quad \omega \subset S^{n-1},$$

其中 $\mathcal{H}^{n-1}$ 是 $(n-1)$ - 维 Hausdorff 测度.

Brunn-Minkowski 不等式 (4.9) 等价于如下 Minkowski 混合体积不等式:

$$V_1(K, L)^n \geq V_n(K)^{n-1} V_n(L), \quad (4.10)$$

等号成立当且仅当 K 与 L 位似.

当 L 为单位球 B 时, $nV_1(K, B)$ 为凸体 K 的表面积 $S(K)$, 上式为经典的等周不等式 (4.1).

Lutwak 在 Firey^[20] 的凸体类上的 L_p 加法基础上建立了 L_p Brunn-Minkowski 理论. 2010 年前后, Lutwak 等引入了 Orlicz 投影体^[43] 和 Orlicz 质心体^[42], 建立了 Orlicz Brunn-Minkowski 理论. 相应地, L_p Brunn-Minkowski 不等式、Blaschke-Santaló 型不等式、Petty 投影不等式、Busemann-Petty 质心不等式和 Alexandrov-Fenchel 不等式等对解决凸几何中 Minkowski 问题的解的唯一性至关重要. 中国学者做了很多重要工作 (参见文献 [33, 37, 58, 59, 75, 76]).

凸体的 Cauchy 表面积公式由凸体投影面积的积分给出, 但该公式不是仿射不变量, 要将其仿射化: 设 $K \in \mathcal{K}^n$, 称

$$\Phi(K) = \frac{(n\omega_n)^{1+\frac{1}{n}}}{\omega_{n-1}} \left(\int_{S^{n-1}} V_{n-1}(K | u^\perp)^{-n} du \right)^{-1/n}$$

为凸体 K 的积分仿射表面积, 上式积分中仅 $-n$ 次方是仿射不变的. 凸体的积分仿射表面积与其投影极体的体积满足关系

$$\Phi(K) = \frac{n\omega_n^{1+\frac{1}{n}}}{\omega_{n-1}} V_n(\Pi^* K)^{-1/n}. \quad (4.11)$$

凸几何中另一个基本的几何不等式是著名的 Petty 投影不等式, 具有给定积分仿射表面积的凸几何体中椭球具有最大的体积^[28]

$$V_n(K)^{n-1} V_n(\Pi^* K) \leq \left(\frac{\omega_n}{\omega_{n-1}} \right)^n, \quad (4.12)$$

等号成立当且仅当 K 为椭球.

Petty 投影不等式等价于关于凸体积分表面积的仿射等周不等式, 即由 (4.11) 和 (4.12) 可得积分仿射等周不等式

$$\Phi(K)^n \geq n^n \omega_n V_n(K)^{n-1}, \quad (4.13)$$

等号成立当且仅当 K 为椭球.

凸体的积分仿射表面积比其表面积小, 即 $\Phi(K) \leq S(K)$, 故积分仿射等周不等式 (4.13) 是比经典的等周不等式 (4.1) 强的不等式. Lutwak^[40] 考虑了更一般的情形, 即推广积分仿射表面积为仿射均值积分, Grinberg^[28] 证明了其仿射不变性, Lutwak 关于仿射均值积分的等周性质的猜想最近被 Milman 和 Yehudayoff^[44] 解决. 借助于球面 p -余弦变换, 凸体的积分仿射表面积被推广到 L_p ($p \geq 1$) 的情形并得到相应的 L_p 积分仿射等周不等式, 它与 L_p Sobolev 不等式密切相关, 并广泛应用于概率论中^[67]. 积分仿射等周不等式另一个重要特点是存在逆不等式, 它刻画了单形的等周性质^[67].

设 K 为具有光滑边界 ∂K 的凸体, 经典的微分仿射表面积定义为

$$\Omega(K) = \int_{\partial K} G(K, x)^{1/(n+1)} dS(x),$$

其中 $G(K, x)$ 和 $dS(x)$ 分别为点 $x \in \partial K$ 处的 Gauss 曲率和表面积微元. 定义中的光滑性的条件可以去掉, 即可由多种不同方法推广到任意凸体的情形, 仿射微分几何中经典的仿射等周不等式如下:

微分仿射等周不等式 设 $K \in \mathcal{K}^n$, 则

$$\Omega(K)^{n+1} - n^{n+1} \omega_n^2 V_n(K)^{n-1} \leq 0, \quad (4.14)$$

等号成立当且仅当 K 为椭球.

当 K 为光滑凸体时, Blaschke 证明了平面及 3 维空间的情形, Santaló^[51] 证明了高维情形. 当 K 为任意凸体时, Petty^[48] 和 Lutwak^[41] 分别给出了不同的证明及推广. 微分仿射等周不等式与如下 Blaschke-Santaló 不等式等价.

Blaschke-Santaló 不等式 设 K 为质心在原点的凸体, 则 K 与它的极体 K^* 的体积满足

$$V_n(K)V_n(K^*) \leq \omega_n^2, \quad (4.15)$$

等号成立当且仅当 K 为椭球.

微分仿射表面积及微分仿射不等式被推广到 L_p -Orlicz 混合的情形. 由于凸体的微分仿射表面积分具有上半连续性, 因此它在赋值理论中非常重要.

微分仿射等周不等式或 Blaschke-Santaló 不等式的逆不等式是积分几何和凸几何中尚未解决的问题之一.

Mahler 猜想 设 $K \in \mathcal{K}_s^n$, 则 K 和 K 的极体 K^* 的体积满足

$$V_n(K)V_n(K^*) \geq \frac{4^n}{n!}, \quad (4.16)$$

当 K 为平行多面体时等号成立.

上述 Mahler 猜想的平面和 3 维情形已解决, 高维中仅解决了一些特殊情形^[34].

5 弦幂积分不等式

弦幂积分是一类特殊的 Crofton 运动公式, 是凸体 K 的表面积和体积的推广: 设 $K \in \mathcal{K}^n$, $p \geq 0$, σ 为随机直线 ξ_1 与 K 相交的弦长, 即 $\sigma = V_1(K \cap \xi_1)$, 则弦幂积分定义为^[66]

$$I_p(K) = \frac{2\alpha_{n-1}}{n} \int_{\tilde{G}_{1,n}} \sigma^p d\xi_1,$$

其中

$$I_0(K) = \frac{\omega_{n-1}}{n} S(K), \quad I_1(K) = \frac{\alpha_{n-1}}{n} V_n(K). \quad (5.1)$$

当 $p = n + 1$ 时, 则有著名的 Crofton-Hadwiger 公式

$$I_{n+1}(K) = (n + 1)V(K)^2. \quad (5.2)$$

文献 [66] 研究了凸几何中对偶均质积分与积分几何中弦幂积分的联系:

$$I_{p+1}(K) = (p + 1) \int_{z \in K} \tilde{W}_{n-p}(K, z) dz, \quad -1 < p < \infty.$$

当 $p = n$ 时, 上式为 Crofton-Hadwiger 公式.

弦幂积分序列 $\{I_0, I_1, I_2, \dots\}$ 之间的关系蕴涵丰富的几何不等式, 如 I_0 与 I_1 之间的关系为经典的等周不等式 [50, 51, 53, 66].

弦幂积分不等式

$$\frac{I_p(K)}{I_p(B)} - \left(\frac{V_n(K)}{V_n(B)} \right)^{\frac{p+n-1}{n}} \begin{cases} \geq 0, & p = 0, & \text{等周不等式,} \\ \geq 0, & 0 < p < 1, & \text{等号成立当且仅当 } K \text{ 为球,} \\ \equiv 0, & p = 1, & \text{Santaló 公式,} \\ \leq 0, & 1 < p < n + 1, & \text{等号成立当且仅当 } K \text{ 为球,} \\ \equiv 0, & p = n + 1, & \text{推广的 Crofton-Hadwiger 公式,} \\ \geq 0, & p > n + 1, & \text{等号成立当且仅当 } K \text{ 为球.} \end{cases} \quad (5.3)$$

当 p 为非负整数时, Blaschke 首先得到了平面中的弦幂积分不等式, 吴大任 [57] 得到了空间 $\mathbb{R}^3$ 的情形, 任德麟 [49] 得到了 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 的情形. 张高勇将弦幂积分不等式推广为对任意非负实数 p 的情形 [50]. Zhang [64] 应用弦幂积分证明了 Ball 猜想: 固定积分仿射表面积的凸几何体中单形体积最小, 即逆 Petty 投影不等式:

Zhang 投影不等式 设 $K \in \mathcal{K}^n$, 则

$$\frac{1}{n^n} \binom{2n}{n} \leq V_n(K)^{n-1} V_n(\Pi^* K),$$

其中等号成立当且仅当 K 为单形.

Zhang [65] 利用两凸体的包含测度估计给出了 Zhang 投影不等式一个新证明. Gardner 和 Zhang [26] 通过构造径向平均体 (radial mean body) 再次给出以上 Zhang 投影不等式一个不同的证明.

以下弦幂积分不等式是经典的 Blaschke-Santaló 不等式 (4.15) 的一个推广:

定理 5.1 设 $K \in \mathcal{K}_s^n$, $1 \leq p \leq n + 1$, 则

$$I_p(K) I_p(K^*) \leq I_p(B)^2, \quad (5.4)$$

当 $1 < p < n + 1$ 时, 等号成立当且仅当 K 为球; 当 $p = 1, n + 1$ 时, 等号成立当且仅当 K 为椭圆.

证明 当 $1 < p < n+1$ 时, 由弦幂积分不等式组 (5.3) 可知

$$I_p(K) \leq I_p(B) \left(\frac{V_n(K)}{V_n(B)} \right)^{\frac{p+n-1}{n}}, \quad I_p(K^*) \leq I_p(B) \left(\frac{V_n(K^*)}{V_n(B)} \right)^{\frac{p+n-1}{n}}. \quad (5.5)$$

以上两式左右两边分别相乘可得

$$I_p(K)I_p(K^*) \leq I_p(B)^2 \left(\frac{V_n(K)V_n(K^*)}{V_n(B)^2} \right)^{\frac{p+n-1}{n}}, \quad (5.6)$$

由 $K \in \mathcal{K}_s^n$ 及 Blaschke-Santaló 不等式可得 (5.4). (5.5) 中等号成立当且仅当 K 为球, (5.6) 中等号成立当且仅当 K 为椭球, 故当 $1 < p < n+1$ 时, 等号成立当且仅当 K 为球. 当 $p=1, n+1$ 时, 由 (5.1) 及 (5.2) 立即得到 (5.4), 即关于弦幂积分的 Blaschke-Santaló 不等式. $\square$

经典 Brunn-Minkowski 不等式表明泛函 $I_0(\cdot)^{1/(n-1)}$ 、 $I_1(\cdot)^{1/n}$ 和 $I_{n+1}(\cdot)^{1/(2n)}$ 在 Minkowski 加法下具备凹性. 而一个长期未解决的问题是, 一般弦幂积分 $I_p(\cdot)^{1/(n+p-1)}$ 是否在 Minkowski 加法下具有凹性, 即是否成立如下弦幂积分的 Brunn-Minkowski 型不等式?

猜想 5.1 设 $1 < p < n+1$, 对 $K, L \in \mathcal{K}^n$, 是否成立

$$I_p(K+L)^{1/(n+p-1)} \geq I_p(K)^{1/(n+p-1)} + I_p(L)^{1/(n+p-1)}?$$

等号成立当且仅当 K 与 L 位似.

设 $K \in \mathcal{K}^n$, 最近定义了一类新的弦长分布

$$d\xi_K = \frac{2\sigma}{V_n(K)} d\xi_1.$$

这是一个概率分布, 由此可以定义弦熵^[61]

$$E(K) = - \int_{\tilde{G}_{1,n}} \log \sigma d\xi_K = - \frac{2}{V_n(K)} \int_{\tilde{G}_{1,n}} \sigma \log \sigma d\xi_1.$$

有别于 $\mathbb{R}^n$ 中的经典的 Shannon 熵, 弦熵定义在仿射 Grassmann 流形上, 研究与凸体相交的随机弦长分布问题, 故弦熵具有几何与概率意义. 它具有刚性性质, 当 $c > 0$ 时, 有

$$E(cK) = E(K) - \log c. \quad (5.7)$$

文献 [61] 证明了弦熵具有极值性质, 即弦熵在球时取得极小值.

定理 5.2 设 $K \in \mathcal{K}^n$, B_K 为与 K 等体积的球体, 则

$$E(K) \geq E(B_K) = E(B) + \frac{1}{n} \log \left(\frac{V_n(B)}{V_n(K)} \right),$$

等号成立当且仅当 K 为球.

致谢 作者对审稿人的审稿意见和评论表示衷心感谢.

参考文献

- 1 Abardia J, Gallego E, Solanes G. The Gauss-Bonnet theorem and Crofton-type formulas in complex space forms. *Israel J Math*, 2012, 187: 287–315
- 2 Alesker S. Valuations on manifolds and integral geometry. *Geom Funct Anal*, 2010, 20: 1073–1143

- 3 Bernig A. Valuations with Crofton formula and Finsler geometry. *Adv Math*, 2007, 210: 733–753
- 4 Bernig A, Fu J H G. Hermitian integral geometry. *Ann of Math (2)*, 2011, 173: 907–945
- 5 Bernig A, Fu J H G, Solanes G. Integral geometry of complex space forms. *Geom Funct Anal*, 2014, 24: 403–492
- 6 Blaschke W. *Kreis und Kugel*. Berlin: De Gruyter, 1956 [W. 布拉施克. 圆与球. 苏步青, 译. 北京: 高等教育出版社, 2015]
- 7 Böröczky K J, Lutwak E, Yang D, et al. The log-Brunn-Minkowski inequality. *Adv Math*, 2012, 231: 1974–1997
- 8 Brendle S. The isoperimetric inequality for a minimal submanifold in Euclidean space. *J Amer Math Soc*, 2021, 34: 595–603
- 9 Brunn H. *Über Ovale und Eiflächen*. PhD Thesis. München: Akademische Buchdruckerei von F. Straub, 1887
- 10 Chern S S. On integral geometry in Klein spaces. *Ann of Math (2)*, 1942, 43: 178–189
- 11 Chern S S. On the kinematic formula in the Euclidean space of N dimensions. *Amer J Math*, 1952, 74: 227–236
- 12 Chern S S. On the kinematic formula in integral geometry. *J Math Mech*, 1966, 16: 101–118
- 13 Chern S S. *Differential Geometry and Integral Geometry*. Beijing: Higher Education Press, 2016
- 14 Chern S S, Yien C T. Sulla formula principale cinematica dello spazio ad n dimensioni. *Boll Un Mat Ital*, 1940, 2: 434–437
- 15 Dutertre N. Principal kinematic formulas for germs of closed definable sets. *Adv Math*, 2022, 399: 108251
- 16 Faifman D. Crofton formulas and indefinite signature. *Geom Funct Anal*, 2017, 27: 489–540
- 17 Fang N F, Xu W X, Zhou J Z, et al. The sharp convex mixed Lorentz-Sobolev inequality. *Adv Appl Math*, 2019, 111: 101936
- 18 Fang N F, Zhou J Z. LYZ ellipsoid and Petty projection body for log-concave functions. *Adv Math*, 2018, 340: 914–959
- 19 Fang N F, Zhou J Z. The Busemann-Petty problem on entropy of log-concave functions. *Sci China Math*, 2022, 65: 2171–2182
- 20 Firey W J. p -means of convex bodies. *Math Scand*, 1962, 10: 17–24
- 21 Fusco N. The quantitative isoperimetric inequality and related topics. *Bull Math Sci*, 2015, 5: 517–607
- 22 Fusco N, Gelli M S, Pisante G. On a Bonnesen type inequality involving the spherical deviation. *J Math Pures Appl (9)*, 2012, 98: 616–632
- 23 Fusco N, Maggi F, Pratelli A. The sharp quantitative isoperimetric inequality. *Ann of Math (2)*, 2008, 168: 941–980
- 24 Gardner R J. *Geometric Tomography*. New York: Cambridge University Press, 2006
- 25 Gardner R J, Hug D, Weil W, et al. The dual Orlicz-Brunn-Minkowski theory. *J Math Anal Appl*, 2015, 430: 810–829
- 26 Gardner R J, Zhang G. Affine inequalities and radial mean bodies. *Amer J Math*, 1998, 120: 505–528
- 27 Gelfand I, Gindikin S, Graev M. *Selected Topics in Integral Geometry*. Providence: Amer Math Soc, 2003
- 28 Grinberg E L. Isoperimetric inequalities and identities for k -dimensional cross-sections of convex bodies. *Math Ann*, 1991, 291: 75–86
- 29 Grinberg E L, Li S, Zhang G, et al. *Integral Geometry and Convexity*. Singapore: World Scientific, 2006
- 30 Helgason S. *Integral Geometry and Radon Transforms*. New York: Springer, 2011
- 31 Howard R. The Kinematic Formula in Riemannian Homogeneous Spaces. *Memoirs of the American Mathematical Society*, no. 509. Providence: Amer Math Soc, 1993
- 32 Hsiung C C. Isoperimetric inequalities for two-dimensional Riemannian manifolds with boundary. *Ann of Math (2)*, 1961, 73: 213–220
- 33 Huang Y, Lutwak E, Yang D, et al. Geometric measures in the dual Brunn-Minkowski theory and their associated Minkowski problems. *Acta Math*, 2016, 216: 325–388
- 34 Iriyeh H, Shibata M. Symmetric Mahler’s conjecture for the volume product in the 3-dimensional case. *Duke Math J*, 2020, 169: 1077–1134
- 35 Karpukhin M, Nadirashvili N, Penskoi A V, et al. An isoperimetric inequality for Laplace eigenvalues on the sphere. *J Differential Geom*, 2021, 118: 313–333
- 36 Klain D, Rota G-C. *Introduction to Geometric Probability*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997
- 37 Li A J, Xi D, Zhang G. Volume inequalities of convex bodies from cosine transforms on Grassmann manifolds. *Adv Math*, 2017, 304: 494–538
- 38 Ludwig M, Reitzner M. A classification of $SL(n)$ invariant valuations. *Ann of Math (2)*, 2010, 172: 1219–1267
- 39 Luo M, Xu W X, Zhou J Z. Translative containment measure and symmetric mixed isohomothetic inequalities. *Sci China Math*, 2015, 58: 2593–2610
- 40 Lutwak E. A general isoperimetric inequality. *Proc Amer Math Soc*, 1984, 90: 415–421
- 41 Lutwak E. On some affine isoperimetric inequalities. *J Differential Geom*, 1986, 23: 1–13

- 42 Lutwak E, Yang D, Zhang G. Orlicz centroid bodies. *J Differential Geom*, 2010, 84: 365–387
- 43 Lutwak E, Yang D, Zhang G. Orlicz projection bodies. *Adv Math*, 2010, 223: 220–242
- 44 Milman E, Yehudayoff A. Sharp isoperimetric inequalities for affine quermassintegrals. *J Amer Math Soc*, 2023, 36: 1061–1101
- 45 Nadirashvili N S, Penskoi A V. An isoperimetric inequality for the second non-zero eigenvalue of the Laplacian on the projective plane. *Geom Funct Anal*, 2018, 28: 1368–1393
- 46 Osserman R. The isoperimetric inequality. *Bull Amer Math Soc (NS)*, 1978, 84: 1182–1238
- 47 Osserman R. Bonnesen-style isoperimetric inequalities. *Amer Math Monthly*, 1979, 86: 1–29
- 48 Petty C M. Affine isoperimetric problems. *Ann N Y Acad Sci*, 1985, 440: 113–127
- 49 Ren D. Introduction to Integral Geometry (in Chinese). Shanghai: Shanghai Scientific & Technical Publishers, 1988 [任德麟. 积分几何学引论. 上海: 上海科学技术出版社, 1988]
- 50 Ren D. Topics in Integral Geometry. Singapore: World Scientific, 1994
- 51 Santaló L. Integral Geometry and Geometric Probability, 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2004
- 52 Schneider R. Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory, 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2014
- 53 Schneider R, Weil W. Stochastic and Integral Geometry. Berlin: Springer, 2008
- 54 Solanes G, Wannerer T. Integral geometry of exceptional spheres. *J Differential Geom*, 2021, 117: 137–191
- 55 Solynin A, Zalgaller V. An isoperimetric inequality for logarithmic capacity of polygons. *Ann of Math (2)*, 2004, 159: 277–303
- 56 Taylor J E. A Gaussian kinematic formula. *Ann Probab*, 2006, 34: 122–158
- 57 Wu D R. A set of isoperimetric inequalities for chord power integrals of convex set (in Chinese). *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Nankaiensis*, 1985, 1: 1–6 [吴大任. 关于凸集弦幂积分的一组等周不等式. 南开大学学报 (自然科学版), 1985, 1: 1–6]
- 58 Xi D, Jin H, Leng G. The Orlicz Brunn-Minkowski inequality. *Adv Math*, 2014, 260: 350–374
- 59 Xi D, Leng G. Dar’s conjecture and the log-Brunn-Minkowski inequality. *J Differential Geom*, 2016, 103: 145–189
- 60 Xia Y W, Xu W X, Zhou J Z, et al. Reverse Bonnesen style inequalities in a surface $\mathbb{X}_c^2$ of constant curvature. *Sci China Math*, 2013, 56: 1145–1154
- 61 Xu W X. Entropy of chord distribution of convex bodies. *Proc Amer Math Soc*, 2019, 147: 3131–3141
- 62 Xu W X, Zhou J Z, Zhu B C. On Bonnesen-type inequalities for a surface of constant curvature. *Proc Amer Math Soc*, 2015, 143: 4925–4935
- 63 Zeng C N, Ma L, Zhou J Z, et al. The Bonnesen isoperimetric inequality in a surface of constant curvature. *Sci China Math*, 2012, 55: 1913–1919
- 64 Zhang G. Restricted chord projection and affine inequalities. *Geom Dedicata*, 1991, 39: 213–222
- 65 Zhang G. Geometric inequalities and inclusion measures of convex bodies. *Mathematika*, 1994, 41: 95–116
- 66 Zhang G. Dual kinematic formulas. *Trans Amer Math Soc*, 1999, 351: 985–995
- 67 Zhang G. New affine isoperimetric inequalities. In: *Proceedings of the 4th International Congress of Chinese Mathematicians*, vol. II. Beijing: Higher Education Press/Somerville: International Press, 2008, 239–267
- 68 Zhou J Z. The sufficient condition for a convex body to enclose another in $\mathbb{R}^4$. *Proc Amer Math Soc*, 1994, 121: 907–913
- 69 Zhou J Z. Kinematic formulas for mean curvature powers of hypersurfaces and Hadwiger’s theorem in $\mathbb{R}^{2n}$. *Trans Amer Math Soc*, 1994, 345: 243–262
- 70 Zhou J Z. When can one domain enclose another in $\mathbb{R}^3$? *J Aust Math Soc*, 1995, 59: 266–272
- 71 Zhou J Z. Sufficient conditions for one domain to contain another in a space of constant curvature. *Proc Amer Math Soc*, 1998, 126: 2797–2803
- 72 Zhou J Z, Chen F W. The Bonnesen-type inequalities in a plane of constant curvature. *J Korean Math Soc*, 2007, 44: 1363–1372
- 73 Zhou J Z, Ren D L. Geometric inequalities—from integral geometry point of view (in Chinese). *Acta Math Sci Ser A Chin Ed*, 2010, 30: 1322–1339 [周家足, 任德麟. 从积分几何的观点看几何不等式. 数学物理学报, 2010, 30: 1322–1339]
- 74 Zhu B C, Zhou J Z, Xu W X. Dual Orlicz-Brunn-Minkowski theory. *Adv Math*, 2014, 264: 700–725
- 75 Zou D, Xiong G. Orlicz-John ellipsoids. *Adv Math*, 2014, 265: 132–168
- 76 Zou D, Xiong G. The L_p Minkowski problem for the electrostatic p -capacity. *J Differential Geom*, 2020, 116: 555–596

Invariant kinematic formulas and inequalities for chord power integrals in integral geometry

Wenxue Xu & Jiazuo Zhou

Abstract In this paper, we first introduce the history, developing process, recent progress, and works contributed by Chinese researchers in integral and convex geometry. Then we show our recent works in invariant kinematic formulas and chord power integrals. The affine isoperimetric inequalities on the set of convex bodies, closely related to integral geometry, are also addressed.

Keywords invariant kinematic formula, isoperimetric inequality, Bonnesen-style inequality, affine isoperimetric inequality, chord power integral

MSC(2020) 52A22, 52A40

doi: 10.1360/SSM-2022-0108