中国科学(A 辑)
第 25 卷 第 8 期 SCIENCE IN CHINA (Series A) 1995 年 8 月

环 $T=\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}_{(\theta,\psi)}$ 整体维数的估计*

郝志峰 佟文廷
(南京大学数学系，南京 210008)

摘要 给出了环 $T=\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}_{(\theta,\psi)}$ 整体维数的一个估计：若 T 为左 Noether 环，且 M 为平坦右 S 模，则

$$\max\{\mathrm{LGD}(R), \mathrm{LGD}(S)\}\leqslant \mathrm{LGD}(T)\leqslant 1+\max\{\mathrm{LGD}(S),\ 1+\mathrm{pd}({}_SN)+\mathrm{LGD}(R/MN)\}.$$

关键词 整体维数 维数转移公式

本文回答了文献[1]中关于环 $T=\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}_{(\theta,\psi)}$ 的整体维数估计的公开问题，给出了一个较为精确的估计. 文献[1, 2]只对于(i) $N=0$ 或 $M=0$ 和(ii) $\theta=0$ 或 $\psi=0$ 这两种特殊情形给出了 T 的整体维数的估计. 所用的工具分别为范畴论和谱序列，其方法则是将 T 看作一种平凡扩张. 但对于一般的情形，至今几乎没有什么进展. 其主要困难在于平凡扩张这种方法似乎很难用来解决这个一般的问题. 另外，一般情形的结果是出人意料的. 本文采用了一种不同的方法，即构造出一个新的四项正合列，从而以经典的维数转移公式作工具，给出了环 T 的整体维数的一个上下界估计.

1 定义和记号

本文中的环均指带恒等元的左 Noether 环. 设 R, S 为环，M 为左 R、右 S 模，N 为左 S、右 R 模，且有双 R 模同态 θ: $M\otimes_S N\to R$ 和双 S 模同态 ψ: $N\otimes_R M\to S$ 使得 $\theta(m, n)m'=m\psi(n,m')$ 且 $\psi(n,m)n'=n\cdot\theta(m,n')$. 令环 $T=\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}_{(\theta,\psi)}$，其元素为 $\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix}$ ($r\in R$, $s\in S$, $m\in M$, $n\in N$)，其加法按通常的定义，其乘法定义为

$$\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} r' & m' \\ n' & s' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r\cdot r'+\theta(m,n') & r\cdot m'+m\cdot s' \\ n\cdot r'+s\cdot n' & \psi(n,m')+s\cdot s' \end{pmatrix}.$$

在文献[3]中，称 T 为一个 Morita 系统环. 并给出了它的许多性质和例子，其中之一为

命题 1[3] T 是左 Nother 环当且仅当 R,S、${}_RM$, ${}_SN$ 为左 Noether 的.

1994-09-02 收稿，1995-03-11 收修改稿
* 国家自然科学基金资助项目

下面将 $\theta(M\otimes_S N)$ 简记为 MN, $\psi(N\otimes_S M)$ 记为 NM. ${}_RM(M_R)$ 表示 M 为左(右)R 模. $\mathrm{pd}({}_RM)$ 表示左 R 模 M 的投射维数, $\mathrm{LGD}(R)=\sup\{\mathrm{pd}({}_RM)\}$ 为环 R 的左整体维数.

2 T 模的分解

令 (R,M) 为由 (r,m) $(r\in R,\ m\in M)$ 生成的集合, 且令 $(r,m)\cdot\begin{pmatrix} r' & m' \\ n' & s' \end{pmatrix}=(r\cdot r'+\theta(m,n'),\ rm'+m\cdot s')$ 为 T 在 (R,M) 上的乘法. 则 (R,M) 成为一个右 T 模. 若令 $r'\cdot(r,m)=(r'\cdot r,\ r'\cdot m)$, 则 (R,M) 成为一个左 R 模. 同理 (N,S) 也可定义为左 S、右 T 模. 若 L 为任一左 T 模, 令 $P=(R,M)\otimes_T L$, $Q=(N,S)\otimes_T L$, 则 P,Q 分别成为左 R 模、左 S 模. 在 P,Q 上定义映射 f: $M\otimes_S Q\to P$ 使

$$f\left[m\otimes_S\left(\sum_i(n_i,s_i)\otimes_T l_i\right)\right]=\sum_i[(\theta(m,n_i),m\cdot s_i)\otimes_T l_i],$$

并定义 g: $N\otimes_R P\to Q$ 使

$$g\left[n\otimes_R\left(\sum_j(r_j,m_j)\otimes_T l_j\right)\right]=\sum_j[(n\cdot r_j,\ \psi(n,m_j))\otimes_T l_j].$$

容易验证 f, g 分别为左 R 模同态、左 S 模同态, 且满足交换图 1.

$$\begin{tikzcd} N\otimes_R M\otimes_S Q \arrow[r, "1\otimes_R f"] \arrow[d, "\psi\otimes_S 1"'] & N\otimes_R P \arrow[d, "g"] \\ S\otimes_S Q \arrow[r, "\simeq"] & Q \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M\otimes_S N\otimes_R P \arrow[r, "1\otimes_S g"] \arrow[d, "\theta\otimes_R 1"'] & M\otimes_S Q \arrow[d, "f"] \\ R\otimes_R P \arrow[r, "\simeq"] & P \end{tikzcd}$$

图 1

将上面构作出的 P, Q, f, g 记为 $\left[\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix},\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\right]$, 则对任一左 T 模 L 即可构作出 $\left[\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix},\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\right]$ 且满足交换图 1. 反过来, 若给出了 $\left[\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix},\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\right]$, 其中 P,Q 分别为左 R 模、左 S 模, f: $M\otimes_S Q\to P$, g: $N\otimes_R P\to R$ 分别为左 R 模同态、左 S 模同态, 且满足交换图 1, 则由定义

$$\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix},\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\right]=\left[\begin{pmatrix} r\cdot p+f(m\otimes_S q) \\ g(n\otimes_R p)+s\cdot q \end{pmatrix},\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\right]$$

可知 $\left[\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix},\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\right]$ 也可视为一个左 T 模. 显见以上两种构作互逆, 即 L 与 $\left[\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix},\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\right]$ 一一对应. 至于两个左 T 模 $\left[\begin{pmatrix} P_1 \\ Q_1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} f_1 \\ g_1 \end{pmatrix}\right]$ 和 $\left[\begin{pmatrix} P_2 \\ Q_2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} f_2 \\ g_2 \end{pmatrix}\right]$ 之间的同态可记为 $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$, 其中 h: $P_1\to P_2$, k: $Q_1\to Q_2$ 分别为左 R 模同态和左 S 态模同态, 且满足交换图 2.

$$\begin{tikzcd} N\otimes_R P_1 \arrow[r, "1\otimes_R h"] \arrow[d, "g_1"] & N\otimes_R P_2 \arrow[d, "g_2"] \\ Q_1 \arrow[r, "k"] & Q_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M\otimes_S Q_1 \arrow[r, "1\otimes_S k"] \arrow[d, "f_1"] & M\otimes_S Q_2 \arrow[d, "f_2"] \\ P_1 \arrow[r, "h"] & P_2 \end{tikzcd}$$

图 2

下面我们给出一个关于左 T 模 $\left[\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\right]$ 的四项正合列，本文将利用这个正合列来估计环 T 的整体维数.

命题 2 设 $\left[\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\right]$ 为左 T 模，则有图 3 所示的正合列. 其中 i 为嵌入同态，j 为投射同态.

$$0 \to \left[\begin{pmatrix} \ker(f) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \xrightarrow{\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}} \left[\begin{pmatrix} M\otimes_S Q \\ Q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ g(1\otimes_R f) \end{pmatrix}\right] \xrightarrow{\begin{pmatrix} f \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\left[\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\right] \xrightarrow{\begin{pmatrix} j \\ 0 \end{pmatrix}} \left[\begin{pmatrix} P/f(M\otimes_S Q) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \to 0,$$

图 3

证 只需逐项证明四项中的每一项均为左 T 模，且在连接处的同态定义合理且正合即可.

在开始计算投射维数前，我们还需要给出一些特殊的左 T 模.

引理 1 若 P 为 R^m 的子模，且包含 $(MN)^m$，则 $\left[\begin{pmatrix} P \\ N^m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_P \\ g_P \end{pmatrix}\right]$ 为左 T 模，其中 f_P 为复合同态 $M\otimes_S N^m \xrightarrow{\theta^m} (MN)^m \hookrightarrow P$, g_P 为复合同态 $N\otimes_R P \overset{1\otimes i}{\hookrightarrow} N\otimes_R R^m \xrightarrow{\simeq} N^m$.

证 只需验证 f_P, g_P 满足交换图 1.

引理 2 若 $\left[\begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$ 为左 T 模，则 P 为左 R/MN 模.

证 由交换图 1 即知 $(MN)P=\theta(M\otimes_S N)\otimes_R P=f[(1\otimes_R g)(N\otimes_R P)]=0$, 其中 $f=0$, $g=0$ 为已知，故 P 为左 R/MN 模.

推论 1 在命题 2 的条件下，$\ker(f)$ 和 $P/f(M\otimes_S Q)$ 均为左 R/MN 模.

引理 3 若 P 为左 R/MN 模，则 $\left[\begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$ 为左 T 模.

3 $\left[\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\right]$ 的投射维数

本节将逐一估计正合列 (图 3) 中每一项的投射维数. 首引给出一个熟知的引理 (见文献[4], p.242, p.243).

引理 4(维数转移公式) 若有左 R 模正合列 $0\to A\to B\to C\to 0$, 则

$$\mathrm{pd}({}_R C)\leqslant 1+\max\{\mathrm{pd}({}_R A),\ \mathrm{pd}({}_R B)\},$$
$$\mathrm{pd}({}_R B)\leqslant \max\{\mathrm{pd}({}_R A),\ \mathrm{pd}({}_R C)\}.$$

引理 5 若 Q_0 为投射左 S 模，则 $\left[\begin{pmatrix} M\otimes_S Q_0 \\ Q_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \psi\otimes_S 1 \end{pmatrix}\right]$ 为投射左 T 模.

证　由 $\left[\begin{pmatrix} M\otimes_S Q_0 \\ Q_0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ \psi\otimes_S 1 \end{pmatrix}\right]\simeq\left[\begin{pmatrix} M \\ S \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ \psi \end{pmatrix}\right]\otimes_S Q_0$ 知只需证 $\left[\begin{pmatrix} M \\ S \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ \psi \end{pmatrix}\right]$ 为投射左 T 模．事实上，这可由 $\left[\begin{pmatrix} M \\ S \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ \psi \end{pmatrix}\right]\oplus\left[\begin{pmatrix} R \\ N \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \theta \\ 1 \end{pmatrix}\right]\simeq T$ 看出．

命题 3　设 M 为平坦右 S 模，且 Q 为左 S 模，则 $\mathrm{pd}\left({}_T\left[\begin{pmatrix} M\otimes_S Q \\ Q \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ g(1\otimes_R f) \end{pmatrix}\right]\right)\leqslant \mathrm{pd}({}_SQ)$.

证　若 $\mathrm{pd}({}_SQ)=\infty$，则不等式显然成立．

下设 $\mathrm{pd}({}_SQ)=n<\infty$，即有左 S 模投射分解 $0\to Q_n\xrightarrow{q_n}\cdots\xrightarrow{q_2}Q_1\xrightarrow{q_1}Q_0\xrightarrow{q_0}Q\to 0$. 由引理 5 与 M 的平坦性，我们得到 T 模 $\left[\begin{pmatrix} M\otimes_S Q \\ Q \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ \psi\otimes_S 1 \end{pmatrix}\right]$ 的投射分解：

$$0\to\left[\begin{pmatrix} M\otimes_S Q_n \\ Q_n \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ \psi\otimes_S 1 \end{pmatrix}\right]\xrightarrow{\begin{pmatrix} 1\otimes_S q_n \\ q_n \end{pmatrix}}\cdots\longrightarrow\left[\begin{pmatrix} M\otimes_S Q_0 \\ Q_0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ \psi\otimes_S 1 \end{pmatrix}\right]$$
$$\xrightarrow{\begin{pmatrix} 1\otimes_S q_0 \\ q_0 \end{pmatrix}}\left[\begin{pmatrix} M\otimes_S Q \\ Q \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ \psi\otimes_S 1 \end{pmatrix}\right]\longrightarrow 0.$$

由此知 $\mathrm{pd}\left({}_T\left[\begin{pmatrix} M\otimes_S Q \\ Q \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ \psi\otimes_S 1 \end{pmatrix}\right]\right)\leqslant n=\mathrm{pd}({}_SQ)$. 再由交换图 1 知 $\psi\otimes_S 1=g(1\otimes_R f)$，于是命题得证．

引理 6　若 P_1 为有限生成投射左 R/MN 模，且 M 为平坦右 S 模，则

$$\mathrm{pd}\left({}_T\left[\begin{pmatrix} P_1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]\right)\leqslant \mathrm{pd}({}_SN)+1.$$

证　由 P_1 为有限生成投射左 R/MN 模知，存在投射左 R/MN 模 P_2 使得 $P_1\oplus P_2\simeq(R/MN)^m$，即有左 R 模正合列

$$0\to(MN)^m\to R^m\to P_1\oplus P_2\to 0.$$

令 p_1: $R^m\to P_2$ 和 p_2: $R^m\to P_1$ 分别为满同态 $R^m\to P_1\oplus P_2\to 0$ 与相应标准投射的复合同态，$W_1=\ker(p_1)$, $W_2=\ker(p_2)$. 这样我们获得一个左 R 模正合列

$$0\to(MN)^m\xrightarrow{i_1}W_1\xrightarrow{j_1}P_1\to 0.$$

由引理 2 知，$\left[\begin{pmatrix} W_1 \\ N^m \end{pmatrix},\begin{pmatrix} f_{W_1} \\ g_{W_1} \end{pmatrix}\right]$, $\left[\begin{pmatrix} W_2 \\ N^m \end{pmatrix},\begin{pmatrix} f_{W_2} \\ g_{W_2} \end{pmatrix}\right]$ 均为左 T 模，从而容易验证有下面的左 T 模正合列

$$0\to\left[\begin{pmatrix} (MN)^m \\ N^m \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ \psi\otimes_S 1 \end{pmatrix}\right]\xrightarrow{\begin{pmatrix} i_1 \\ 1 \end{pmatrix}}\left[\begin{pmatrix} W_1 \\ N^m \end{pmatrix},\begin{pmatrix} f_{W_1} \\ g_{W_1} \end{pmatrix}\right]\xrightarrow{\begin{pmatrix} j_1 \\ 0 \end{pmatrix}}\left[\begin{pmatrix} P_1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]\to 0.$$

由命题 3 知 $\mathrm{pd}\left({}_T\left[\begin{pmatrix} (MN)^m \\ N^m \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ \psi\otimes_S 1 \end{pmatrix}\right]\right)\leqslant\mathrm{pd}({}_SN^m)=\mathrm{pd}({}_SN)$. 至于 $\left[\begin{pmatrix} W_1 \\ N^m \end{pmatrix},\begin{pmatrix} f_{W_1} \\ g_{W_1} \end{pmatrix}\right]$ 的投射维

数，注意到 $W_1+W_2=R^m$, $W_1\cap W_2=(MN)^m$ 为 R^m 的子模，即有左 R 模正合列

$$0\longrightarrow (MN)^m\xrightarrow{i_2} W_1\oplus W_2\xrightarrow{j_2} R^m\longrightarrow 0.$$

由此我们有左 T 模合列

$$0\to\left[\begin{pmatrix}(MN)^m\\ N^m\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\ \psi\otimes_S 1\end{pmatrix}\right]\xrightarrow{\begin{pmatrix}i_2\\ \Delta\end{pmatrix}}\left[\begin{pmatrix}W_1\\ N^m\end{pmatrix},\begin{pmatrix}f_{W_1}\\ g_{W_1}\end{pmatrix}\right]\oplus\left[\begin{pmatrix}W_2\\ N^m\end{pmatrix},\begin{pmatrix}f_{W_2}\\ g_{W_2}\end{pmatrix}\right]$$
$$\xrightarrow{\begin{pmatrix}j_2\\ \Delta'\end{pmatrix}}\left[\begin{pmatrix}R^m\\ N^m\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\theta\\ 1\end{pmatrix}\right]\to 0,$$

其中 Δ, Δ' 由 $0\to N^m\xrightarrow{\Delta}N^m\oplus N^m\xrightarrow{\Delta'}N^m\to 0$ 给出．由引理 4 的证明知，$\left[\begin{pmatrix}R\\ N\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\theta\\ 1\end{pmatrix}\right]$ 为投射左 T 模，故 $\left[\begin{pmatrix}R^m\\ N^m\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\theta\\ 1\end{pmatrix}\right]$ 亦然．因此由上面的正合列知

$$\mathrm{pd}\left({}_T\left[\begin{pmatrix}W_1\\ N^m\end{pmatrix},\begin{pmatrix}f_{W_1}\\ g_{W_1}\end{pmatrix}\right]\right)\leqslant\mathrm{pd}\left({}_T\left[\begin{pmatrix}W_1\\ N^m\end{pmatrix},\begin{pmatrix}f_{W_1}\\ g_{W_1}\end{pmatrix}\right]\oplus\left[\begin{pmatrix}W_2\\ N^m\end{pmatrix},\begin{pmatrix}f_{W_2}\\ g_{W_2}\end{pmatrix}\right]\right)=$$
$$\mathrm{pd}\left({}_T\left[\begin{pmatrix}(MN)^m\\ N^m\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\ \psi\otimes_S 1\end{pmatrix}\right]\right)\leqslant$$
$$\mathrm{pd}({}_SN).$$

由正合列(图 1) 和引理 4 可得

$$\mathrm{pd}\left({}_T\left[\begin{pmatrix}P_1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\right]\right)\leqslant 1+\mathrm{pd}({}_SN).$$

命题 4　若 P 为有限生成左 R/MN 模，且 M 为平坦右 S 模，则

$$\mathrm{pd}\left({}_T\left[\begin{pmatrix}P\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\right]\right)\leqslant 1+\mathrm{pd}({}_SN)+\mathrm{pd}({}_{R/MN}P).$$

证　若 $\mathrm{pd}({}_{R/MN}P)=\infty$, 则不等式显然成立．因此下设 $\mathrm{pd}({}_{R/MN}P)=n<\infty$, 即 P 有左 R/MN 模投射分解

$$0\longrightarrow P_n\xrightarrow{p_n}\cdots\longrightarrow P_1\xrightarrow{p_1}P_0\xrightarrow{p_0}P\longrightarrow 0,$$

其中 P_i 为有限生成投射左 R/MN 模．这个分解可提升为左 T 模长正合列

$$0\to\left[\begin{pmatrix}P_n\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\right]\xrightarrow{\begin{pmatrix}p_n\\ 0\end{pmatrix}}\cdots\longrightarrow\left[\begin{pmatrix}P_0\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\right]\xrightarrow{\begin{pmatrix}p_0\\ 0\end{pmatrix}}\left[\begin{pmatrix}P\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\right]\to 0.$$

由引理 5, $\mathrm{pd}\left({}_T\left[\begin{pmatrix}P_i\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\right]\right)\leqslant 1+\mathrm{pd}({}_SN)$, $i=0, l,\cdots,n$. 将长正合列分解成一些短正合列，并利用引理 4, 即得

$$\mathrm{pd}\left({}_T\left[\begin{pmatrix}P\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\right]\right)\leqslant 1+\mathrm{pd}({}_SN)+n=1+\mathrm{pd}({}_SN)+\mathrm{pd}({}_{R/MN}P).$$

由命题 3 和命题 4, 可以估计 $\left[\begin{pmatrix}P\\ Q\end{pmatrix},\begin{pmatrix}f\\ g\end{pmatrix}\right]$ 投射维数的上界．

定理 1　设 $T=\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}_{(\theta,\psi)}$ 为左 Noether 环，且 M 为平坦右 S 模．若 $\left[\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix},\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\right]$ 为左 T 模，则

$$\mathrm{pd}\left({}_T\left[\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix},\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\right]\right)\leqslant 1+\max\{\mathrm{pd}({}_SQ),\ 1+\mathrm{pd}({}_SN)+\mathrm{pd}({}_{R/MN}\ker(f)),$$
$$\mathrm{pd}({}_SN)+\mathrm{pd}({}_{R/MN}P/f(M\otimes_S Q))\}.$$

证　将命题 2 中的正合列(图 3)折成两个短正合列，记为

$$0\to\left[\begin{pmatrix} \ker(f) \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]\to\left[\begin{pmatrix} M\otimes_S Q \\ Q \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ g(1\otimes_R f) \end{pmatrix}\right]\to K\to 0, \tag{1}$$

$$0\to K\to\left[\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix},\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\right]\to\left[\begin{pmatrix} P/f(M\otimes_S Q) \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]\to 0. \tag{2}$$

由引理 4，命题 3，4 知，由正合列(1)可得 $\mathrm{pd}({}_TK)\leqslant 1+\max\{\mathrm{pd}({}_SQ), 1+\mathrm{pd}({}_SN)+\mathrm{pd}({}_{R/MN}\ker(f))$．再应用引理 4、命题 4 于正合列(2)即得

$$\mathrm{pd}\left({}_T\left[\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix},\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\right]\right)\leqslant\max\{\mathrm{pd}({}_TK),\ 1+\mathrm{pd}({}_SN)+\mathrm{pd}({}_{R/MN}P/f(M\otimes_S Q))\}\leqslant$$
$$1+\max\{\mathrm{pd}({}_SQ),\ 1+\mathrm{pd}({}_SN)+\mathrm{pd}({}_{R/MN}\ker(f)),$$
$$\mathrm{pd}({}_SN)+\mathrm{pd}({}_{R/MN}P/f(M\otimes_S Q))\}.$$

4　主要结果及应用

定理 2　设 $T=\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}_{(\theta,\psi)}$ 为左 Noether 环，且 M 为平坦右 S 模，则

$$\max\{\mathrm{LGD}(R),\ \mathrm{LGD}(S)\}\leqslant\mathrm{LGD}(T)\leqslant 1+\max\{\mathrm{LGD}(S),\ 1+\mathrm{pd}({}_SN)+\mathrm{LGD}(R/MN)\}.$$

证　由定理 1 与推论 1 知，不等式的第二个不等号成立．下面只需再证其第一个不等号也成立．不妨设 Q 为任一左 S 模，则 $\left[\begin{pmatrix} M\otimes_S Q \\ Q \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ \psi\otimes_S 1 \end{pmatrix}\right]$ 为左 T 模，且有左 S 模同构

$$(N,S)\otimes_T\left[\begin{pmatrix} M\otimes_S Q \\ Q \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ \psi\otimes_S 1 \end{pmatrix}\right]\simeq Q.$$

注意到 (N,S) 为投射右 T 模，故有

$$\mathrm{pd}({}_SQ)\leqslant\mathrm{pd}\left({}_T\left[\begin{pmatrix} M\otimes_S Q \\ Q \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ \psi\otimes_S 1 \end{pmatrix}\right]\right).$$

由此即得 $\mathrm{LGD}(S)\leqslant\mathrm{LGD}(T)$．同理可得 $\mathrm{LGD}(R)\leqslant\mathrm{LGD}(T)$，故有

$$\max\{\mathrm{LGD}(R),\ \mathrm{LGD}(S)\}\leqslant\mathrm{LGD}(T).$$

推论 2　在定理 2 的条件下，

(i) 若 $N=0$，则

$$\max\{\mathrm{LGD}(R),\ \mathrm{LGD}(S)\}\leqslant\mathrm{LGD}(T)\leqslant 1+\max\{\mathrm{LGD}(S),\ 1+\mathrm{LGD}(R)\};$$

(ii) 若 $\theta=0$，则

$$\max\{\mathrm{LGD}(R),\ \mathrm{LGD}(S)\}\leqslant\mathrm{LGD}(T)\leqslant 1+\max\{\mathrm{LGD}(S),\ 1+\mathrm{pd}({}_SN)+\mathrm{LGD}(R)\};$$

(iii) 若 $\theta: M\otimes_S N \to R$ 为满同态，则

$$\max\{\mathrm{LGD}(R),\ \mathrm{LGD}(S)\}\leqslant \mathrm{LGD}(T)\leqslant 1+\max\{\mathrm{LGD}(S),\ 1+\mathrm{pd}({}_SN)\}.$$

若 R 为环，e为 R 的一个幂等元，则 R 有熟知的 Pierce 分解 $\begin{pmatrix} eRe & eRf \\ fRe & fRf \end{pmatrix}$，其中 $f=1-e$. 这时我们有

命题 5 若 e 为左 Noether 环 R 的幂等元，且 eRf 是一个平坦右 fRf 模，则

$$\max\{\mathrm{LGD}(eRe),\mathrm{LGD}(fRf)\}\leqslant \mathrm{LGD}(R)\leqslant 1+\max\{\mathrm{LGD}(fRf), 1+\mathrm{pd}({}_{fRf}fRe)+\mathrm{LGD}(eRe/eRfRe)\}.$$

由文献[5]中 II. 定理 3.4 知，若 $eRe=eRfRe$，则 eRf 为有限生成投射右 fRf 模，fRe 为有限生成投射左 fRf 模，故有

推论 3 若 e 为左 Noether 环 R 的幂等元，且 $eRe=eRfRe$，则有

$$\max\{\mathrm{LGD}(eRe),\ \mathrm{LGD}(fRf)\}\leqslant \mathrm{LGD}(R)\leqslant 1+\max\{\mathrm{LGD}(fRf),\ 1\}.$$

若 A 为环 R 的一个右理想，记□$(A)=\{r\in R\mid rA\subseteq A\}$，则由文献[3]中 1.1.11 知，$\begin{pmatrix} □(A) & A \\ R & R \end{pmatrix}$ 为一个 Morita 系统环. 据此，我们有

命题 6 设 A 为左 Noether 环 R 的一个右平坦理想，□(A) 定义如前，则

$$\max\{\mathrm{LGD}(□(A)),\mathrm{LGD}(R)\}\leqslant \mathrm{LGD}\left(\begin{pmatrix} □(A) & A \\ R & R \end{pmatrix}\right)\leqslant 1+\max\{\mathrm{LGD}(R),\ 1+\mathrm{LGD}(\mathrm{End}(R/A))\}.$$

证 注意由文献[3]中 1.1.11 知□$(A)/A\simeq \mathrm{End}(R/A)$，即可得证.

致谢 对周伯壎教授的指导和审稿人提出的修改建议，均表示感谢.

参 考 文 献

1 Palmer I, Roos J E. Explicit formulae for the global homological dimensions of trivial extensions of rings. J of Algebra, 1974, 27: 380~413

2 Fossum R, Griffith P, Reiten I. Trivial extensions of abelian categories. Lecture Notes in Math 456. Berlin: Springer-Verlag, 1975

3 McConnell J C, Robson J C. Noncommutative Noetherian Rings. New York: John Wiley and Sons, 1987

4 Rotman J. An Introduction to Homological Algebra. New York: Academic Press, 1979

5 Bass H. Algebraic K-theory. New York: Benjamin, 1968